D1. A Dürerenciás-tengeren sodrodó kalózhajó legénysége három lányból, illetve három fiúból állt. Már régóta a tengeren hánykolódtak, amikor a hajó legénysége közül valaki, a monoton napjainak színesebbé tételéhez, egyedül lement a hajóaljba és ellopott onnan egy üveg rumot. A hajó legénysége a papagájuk segítségével szeretné kideríteni, hogy ki volt a tettes. A papagáj négyszer szólalt meg, amelyből kétszer csak igazat mondott, kétszer csak hazudott. Ki volt a tolvaj, ha az alábbiak voltak a papagáj megszólalásai?

- A fiúk egy portya miatt a lopás napján nem voltak a hajón.
- Jasmine és John mindig együtt lopnak. Joe nem járt a hajóaljban aznap.
- A tolvaj féllábú vagy félszemű volt. Jessica nem szereti a rumot.
- Van, hogy Jane vagy Jack egyedül lop. Jessica szereti a rumot.

A legénység lány tagjai Félszemű Jane, Ötujjú Jasmine és Kétfalábú Jessica, míg a fiúk Féllábú Jack, Vaksi John és Rőtszakáll Joe. A kalózokat a vezetékneveik jellemezik és másra nem igaz az adott tulajdonság.
Mohay Lili feladata

Megoldás: A papagáj a harmadik megszólalásakor azt mondta, hogy “Jessica nem szereti a rumot”, míg a negyedikkor azt, hogy “Jessica szereti a rumot”. Ezek közül pontosan az egyik igaz. Ha a harmadik megszólalás volt az, akkor Féllábú Jack vagy Félszemű Jane a tolvaj, ekkor viszont a negyedik megszólalás első fele is igaz lenne, mivel a tolvaj egyedül volt. Tehát ha a harmadik megszólalás igaz, akkor a negyediknek egyszerre kellene igaznak és hamisnak lennie, ami nem lehetséges. Tehát a harmadik állítás hamis, a negyedik pedig igaz.
Mivel a papagáj 1 igaz és 1 hamis megszólalását már ismerjük, így az első kettő között is 1 igaz és 1 hamis van. Ha a második a hamis, akkor Joe aznap járt a hajóaljban, viszont így nem lehetett egész nap egy portyán, vagyis az első megszólalás is hamis, ellentmondva annak, hogy az első kettő közül pontosan az egyik igaz. Tehát a második állítás igaz.
A második megszólalás igazságából következik, hogy se Jasmine, se John nem lehetett a tolvaj (mivel a tolvaj egyedül volt), továbbá Joe sem (mivel a tolvaj volt a hajóaljban), a harmadik hamisságából pedig, hogy a tolvaj se Jack, se Jane nem lehetett. Azaz Kétfalábú Jessica lopta el a rumot.
Megjegyzés: Ráadásul még indítéka is volt, hiszen a negyedik állítás igaz léte alapján Jessica szereti a rumot.

D2. **a)** Egy asztal köré egyszerre leült 14 ember. Miután leültek, az első percben néhány ember vidám, és mindenki más szomorú. Ahogy a vidám emberek vicceket mesélnek, úgy minden későbbi percben pontosan azok az emberek lesznek szomorúak, akiknek mindkét szomszédja szomorú volt az előző percben, a többiek pedig vidámak lesznek. Igaz-e, hogy akárkik is voltak szomorúak kezdetben, ha volt legalább egy vidám ember, akkor egy idő után mindenki folyamatosan vidám lesz?
b) Mi a helyzet akkor, ha 1001 ember ül le az asztal köré?
Ha egy vidám ember mellett két szomorú ember ül, akkor ő szomorú lesz.
Imolay András feladata

Megoldás: **a)** Nem igaz, például üljön az asztal körül felváltva 7 lány és 7 fiú, azaz minden második ember lány, és kezdetben legyen minden lány vidám és minden fiú szomorú. Ekkor a következő percben minden lány szomorú lesz, mivel mindkét fiú szomszédjuk szomorú volt, és minden fiú vidám, az azt követő percben pedig minden fiú szomorú lesz, és minden lány vidám, stb. Így minden percben lesz 7 szomorú ember az asztal körül.

b) 1001 ember esetén igaz az állítás: ha kezdetben volt vidám ember, akkor egy idő után mindenki vidám lesz. Belátjuk, hogy minden percben nő a vidám emberek száma - ebből következik, hogy legfeljebb 1000 perc elteltével mindenki vidám lesz.
Legyen egy adott percben k db vidám ember az asztal körül, ők adjanak mindkét szomszédjuknak (egy darabka szalvétán) $1-1$ darab viccet, tehát összesen $2k$ darab vicc kerül kiosztásra. A feladat szerint a következő percben pontosan azok lesznek szomorúak, akik nem kaptak viccet (azaz mindkét szomszédjuk szomorú volt). Minden embernek két szomszédja van, tehát mindenki legfeljebb 2 db viccet kapott. Így a $2k$ darab viccből legalább k darab ember kapott.
Sőt, ha van olyan ember, aki csak 1 db viccet kapott, akkor legalább $k+1$ darab ember kapott viccet, azaz a vidám emberek száma legalább eggyel nőtt a skatulya-elv alapján.
Ha viszont nem volt olyan ember, aki 1 db viccet kapott, akkor mindenki, aki kapott viccet, az pontosan 2 db viccet kapott. Ez azt jelenti, hogy egy vidám embertől kettővel balra és kettővel jobbra is vidám ember kellett, hogy üljön, hiszen a szomszédja 2 db viccet kapott. Tehát ha Aladár vidám volt, és tőle a kör mentén kettesével ugrálva eljutunk Béláig, akkor Béla is vidám kellett, hogy legyen. Ez páratlan sok fő esetén mindig megtehető, hiszen a kör mentén valamelyik irányban Aladár és Béla távolsága páros. Tehát ez az eset csak akkor állhat fenn, ha már a viccosztás előtt eleve mindenki vidám volt.
Azaz készen vagyunk, mert amíg nem mindenki vidám, addig minden lépésben növekszik a vidám emberek száma, így legfeljebb 1000 perc múlva mindenki vidám lesz.

Megjegyzés: a megoldásból az is látható, hogy a feladat állítása tetszőleges páros létszámú asztaltársaság esetén is hamis, tetszőleges páratlan létszámú asztaltársaság esetén pedig igaz.

D3. Hét gyerek (A, B, C, D, E, F, G) bomba-pajzs játékot játszik. A játék egy fordulójának elején sípszóra mindenki választ magának a hat másik gyerek közül két különbözőt, egyiküket bombájának, másikukat pajzsának. Innentől 1 percük van arra, hogy elhelyezkedjenek a sík terepen, ezután mindenki egy helyben marad. Egy adott forduló végén azok a gyerekek kapnak pontot, akik az idő leteltével egy egyenesen állnak a választott bombájukkal és pajzsukkal úgy, hogy hármójuk közül a pajzs van középen.

a) Az egyik játékban a gyerekek a táblázatban látható módon választottak maguknak bombát és pajzsot. Mutassatok egy olyan felállást, ami esetén mind a hét gyerek szerez pontot a fordulóban.

gyerek	A	B	C	D	E	F	G
pajzs	D	A	A	G	G	C	C
bomba	F	E	G	E	B	B	D

b) Lehetséges-e, hogy a gyerekek úgy választanak maguknak bombát és pajzsot, hogy sehogy se tudnak beállni úgy, hogy mindenki szerezzen pontot a fordulóban?

c) Igaz-e, hogy ha egy fordulóban a gyerekek el tudnak helyezkedni úgy, hogy mindenki szerez pontot, akkor el tudnak helyezkedni úgy is, hogy mindenki szerezzen pontot és mindannyian egy egyenesen legyenek?

Nagy Kartal feladata

Megoldás: a) Álljanak fel a gyerekek egy egyenesre ilyen sorrendben: FDCBAGE. Ez a példa ellenőrizhető, hogy tényleg megfelelő. Erre rájönni úgy lehet, hogy lépésenként vizsgálunk egyre több oszlopot. A negyedik oszlop miatt DGE sorrendje adott. Ezután a hetedik oszlop miatt a DCGE sorrend is fix. A harmadik oszlop miatt a DCAGE sorrend fix. Az első oszlopból az FDCAGE sorrend adódik, és végül B-nek a többiekhez képest a helye a kimaradt két oszlop miatt egyértelmű.

b) A hét gyerek közül vizsgáljuk meg csak A és C választását. Ha A-nak B a pajzsa és C a bombája, akkor biztosan úgy kell elhelyezkednie ennek a három gyereknek egy egyenesen, hogy B van középen. Viszont ha emellett C-nek A a pajzsa és B a bombája, akkor a három gyereknek úgy kell egy egyenesen állnia, hogy közülük A van középen. Így a gyerekek nem tudnak úgy felállni, hogy A és C is kapjon pontot.

c) Tekintsük a gyerekek egy olyan felállását a koordinátasíkon, ahol mindenki szerez pontot. Feltehetjük, hogy bármely két gyerek által meghatározott egyenes olyan egyenes, ami nem párhuzamos az y-tengellyel: a gyerekek (mivel véges sokan vannak) tudnak úgy forogni, hogy ez a feltétel valóban teljesüljön, és a felállás is jó maradjon. Ekkor minden gyerek megfelel a koordinátarendszer egy pontjának, és semelyik két gyerek pontjának x-koordinátája sem egyenlő.

Sétáljon át most minden gyerek az x-tengelyre a következőképpen: ha eddig az (x, y) pontban állt, menjen át az $(x, 0)$ pontra. Ez továbbra is egy olyan felállás lesz, ahol mindenki kap pontot, hiszen ha az eredeti felállásban három gyerek egy egyenesen állt, akkor az egyenesen felvett balról jobbra sorrendjük megegyezett az x-koordinátájuk növekvő sorrendjével, és ez az új felállásban is megmarad, ezzel kész vagyunk.

Megjegyzés: Ez a geometriai transzformáció az egyenesre vett merőleges vetítés. Azt használjuk ki, hogy van olyan egyenes a síkon a véges sok gyerekre, ami nem párhuzamos a páronkénti egyeneseik közül egyikkel sem. Ilyen pedig azért van, mert csak véges sok egyenest zárnak ki. Vetítés helyett más geometriai transzformációk is megfelelőek. Például úgy is meg lehet adni a gyerekek egy sorrendjét, hogy megforgatunk egy pont körül egy egyenest, ezzel "végigsöpörve" a síkot azt vizsgálva, hogy melyik gyerek hányadikként lépi át az egyenest. Itt arra kell figyelni, hogy a forgás középpontja ne legyen rajta semelyik egyenesen, amelyiket két gyerek meghatároz. Ha az így kapott sorrend szerint állnak fel egy egyenesre, akkor is megfelelő megoldást kapunk.

D4. Az ABC háromszög beírt körének középpontja legyen I, az AB oldallal vett érintési pontja D, az AB oldal felezőpontja F. Bizonyítsátok be, hogyha $\frac{AD}{AF} = \frac{2}{3}$ és $FIB\sphericalangle = ACI\sphericalangle$, akkor a háromszög egyenlő szárú.
Osztényi József feladata

Megoldás: Legyen a DF szakasz hossza az 1 egység, ami alapján $AD = 2$, míg $FB = 3$.

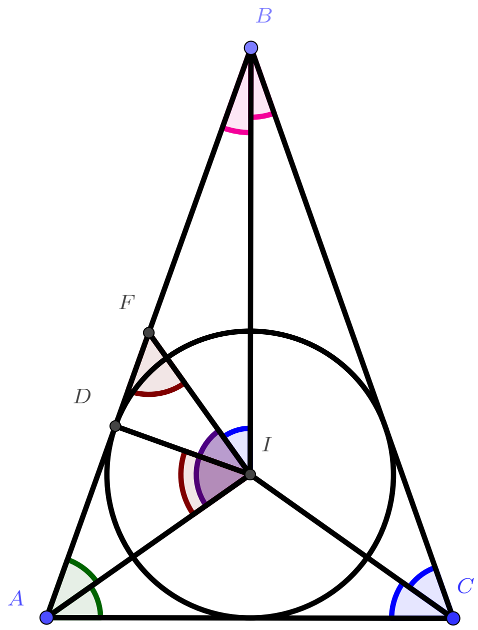
Legyenek a háromszög szögei a megszokott módon α, β és γ, ami alapján tudjuk, hogy $BAI\sphericalangle = IAC\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$, $ABI\sphericalangle = IBC\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$ és $BCI\sphericalangle = ICA\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}$.

Számoljuk ki $AIB\sphericalangle$-t az alapján, hogy az AIB háromszög többi szögét ismerjük, vagyis $AIB\sphericalangle = 180° - IAB\sphericalangle - ABI\sphericalangle = 180° - \frac{\alpha+\beta}{2} = 90° + \frac{\gamma}{2}$. Ekkor viszont mivel $FIB\sphericalangle = ACI\sphericalangle$, úgy $AIF\sphericalangle = AIB\sphericalangle - FIB\sphericalangle = AIB\sphericalangle - ACI\sphericalangle = 90°$, vagyis $AIF\sphericalangle$ éppen derékszög.

Ekkor az AIF derékszögű háromszögnek IF egy magassága, emiatt az AID, IFD és AFI háromszögek hasonlóak. A hasonlóság miatt $\frac{AD}{ID} = \frac{ID}{FD}$, amit átrendezve megkapjuk ID hosszát: $ID = \sqrt{AD \cdot FD} = \sqrt{2}$.

Ekkor az ID szakasz ismeretében megadható az IF és IB szakaszok hossza egy-egy Pitagorasz tétel segítségével: $FI = \sqrt{FD^2 + DI^2} = \sqrt{3}$, míg $BI = \sqrt{BD^2 + DI^2} = 3\sqrt{2}$.

A feladat befejezéséhez elegendő egy hasonlóság. Az FBI és az IBC háromszögek hasonlóak, mivel $ICB\sphericalangle = FIB\sphericalangle$ és $CBI\sphericalangle = IBF\sphericalangle$. A hasonlóság miatt $\frac{BI}{BF} = \frac{BC}{BI}$, amit BC-re rendezve azt kapjuk, hogy $BC = \frac{BI^2}{BF} = 6$. Ezek alapján azt kapjuk, hogy $AB = BC$, vagyis a háromszögünk ezen feltételek mellett valóban egyenlőszárú.



D5. A $\{0, 1, \ldots, 9\}$ halmaz egy H részhalmazát nevezzük *elégségesnek*, ha tetszőleges 10-nél nagyobb egész szám előáll pontosan két olyan nemnegatív egész szám összegeként, melyeknek a számjegyei csak H-ból kerülnek ki.
a) Bizonyítsátok be, hogy az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ halmaz elégséges.
b) Bizonyítsátok be, hogy nem létezik négyelemű elégséges halmaz.
c) Mutassatok minél kisebb elemszámú elégséges halmazt és bizonyítsátok annak elégségességét.
A 2023-as Alkotótáborban kitalált feladat

Megoldás: a) Vegyünk egy tetszőleges 10-nél nagyobb n számot. A megoldás ötlete az írásbeli összeadás, hátulról, az egyes helyiértékről építünk fel két olyan számot, a-t és b-t, melyek összege n, és egyik sem tartalmaz 0-s jegyet. Első lépésként válasszuk meg a és b egyes helyiértéken álló jegyét úgy, hogy stimmeljen az egyes helyiértéken álló összeadás (és ne használjunk 0-s jegyet). Világos, hogy ezt meg tudjuk tenni. Ezek után minden lépésben, ha már az utolsó néhány jegyét meghatároztuk a-nak és b-nek, akkor a következő jegynél tudjuk, hogy, mennyi a maradék az előző összeadásból, és tudunk hozzá olyan jegyeket választani a-nak és b-nek, hogy a következő jegy is megfelelő legyen. Figyeljük meg, hogy a maradék soha nem lehet 1-nél nagyobb. Amikor elérünk n első jegyéig, legyen ez k, ott ha van egy maradék, akkor legyen a első jegye $k-1$ (ha ez 0, akkor ezt elhagyjuk, és eggyel kevesebb jegyű lesz a, mint n), míg ha nincs maradék, akkor legyen k az első jegye. A b szám mindenképpen legyen eggyel kevesebb jegyű, mint n. Ezzel az eljárással megfelelő a és b számokat találtunk.

Az érthetőség kedvéért bemutatjuk a módszert egy példán keresztül. Legyen $n = 2564$. Legyen a és b utolsó jegye mondjuk 6 és 8, mert $6+8 = 14$, ami 4-re végződik. Marad az 1, így a tízes helyiértéken az a-ban és b-ben lévő jegy összegének tízes maradékának $6-1 = 5$-nek kell lennie. Legyen 2 és 3, azaz a vége 26, b vége 38. Ekkor nem marad egy, így a százas helyiértéken 5 az összeg tízes maradéka, ami például $6+9$ formájában előall, így a vége 626, b vége 938. Végül itt marad az egy, így a első jegye 1. Ezzel megkaptuk a $2564 = 1626 + 938$ felírást.

b) Két szám összegének utolsó jegye megegyezik az utolsó jegyeik összegének utolsó jegyével. Ebből kifolyólag ahhoz, hogy egy H halmaz elégséges legyen, mind a tíz számjegy elő kell, hogy álljon úgy, mint két, H-beli elem összegének utolsó jegye (mivel a 10-nél nagyobb szám utolsó jegye csak így állítható elő).

Tegyük fel, hogy van egy négyelemű elégséges halmaz, legyen ez $\{a, b, c, d\}$. Az ezekből képezhető összegek: $a+a$, $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+b$, $b+c$, $b+d$, $c+c$, $c+d$ és $d+d$. Ezek közül $a+a, b+b, c+c$ és $d+d$ biztosan páros. Tehát ahhoz, hogy minden jegy elő tudjon állni két H-beli elem összegének utolsó jegyeként, ahhoz az $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$, $c+d$ számok között 5 páratlan számnak kell lennie. Ha ebben a halmazban van valamilyen paritású elemből legalább 3, akkor ennek a 3 elemnek a páronkénti összegei mind párosak, hiszen két azonos paritású szám összege páros. Ekkor viszont legfeljebb 3 páratlan szám szerepelhetne az összegek között. Ha a halmazban semelyik paritású elemből nincs három, akkor az azt jelenti, hogy két páros és két páratlan elemből áll. Ekkor a két páros elem összege páros és a két páratlané is, azaz legfeljebb $6-2 = 4$ páratlan szám lehetne az $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$, $c+d$ összegek között. Tehát sehogyan nem állhat elő mind az 5 páratlan számjegy két elégéges halmazbeli elem összegének utolsó jegyeként, azaz nincs négyelemű elégséges halmaz.

c) A b) feladatrészben bebizonyítottuk, hogy négyelemű elégséges halmaz nem létezhet. Ötelemű viszont már van, például a $\{0; 1; 3; 4; 5\}$. Először is vegyük észre, hogy minden számjegy előáll két halmazbeli elem összegeként:

$$\begin{aligned}0&=0+0\\1&=1+0\\2&=1+1\\3&=3+0\\4&=4+0\\5&=5+0\\6&=5+1\\7&=4+3\\8&=5+3\\9&=5+4\end{aligned}$$

Ekkor egy tetszőleges 10-nél nagyobb egész számot fel tudunk írni pontosan két olyan nemnegatív egész szám összegeként, melyeknek a számjegyei csak H-ból kerülnek ki, az alábbi módon.
A szám minden számjegyét felírjuk két, H-beli elem összegeként a fent mutatott módon, ez a két jegy lesz a megfelelő helyiértékű jegye a két összeadandónak. Például ha az összegben a százas helyiértéken 6-os áll, akkor az első összeadandóban legyen 5-ös a százas helyiértéken, a másodikban pedig 1-es. Ha a két szám valamelyike valahány 0-val kezdődne, akkor azokat töröljük. Például a 106579 esetén ez a felírás így néz ki: $106579 = 105545 + 001034$, a számok elejéről a nullákat törölve: $106594 = 105545 + 1034$. Mivel soha nem lesz két jegy összege 10-nél nagyobb (azaz nincs 10-es átlépés és így nem keletkezik maradék az összeadás során), így tudunk jegyenként összeadni, tehát ez a módszer tényleg működik.

D6. Játék: Kutatók a Dürerencicás-tóban felfedezték a kihalófélben lévő egyenesenmozgó macskacápa faj egy nőstény példányát. Az állat a víz mélyén mozog, így befogásához négy tengeralattjárót használnak. A kutatók kommunikálnak egymással és látják a cápát, továbbá a cápa is látja a kutatókat. A tó négyzet alakú és fel van osztva 5×5 darab négyzet alakú szektorra. Minden nap délben az egyik tengeralattjáró átúszik egy oldalszomszédos szektorba. A cápa 15 nap múlva nyugodt körülmények között tenné le a tojását, így addig menekülni próbál, ehhez minden éjszaka legfeljebb kétszer átúszik egy oldalszomszédos szektorba. A kutatók az első nap az alábbi kezdőhelyzetből mozognak először. A kutatók akkor nyernek, ha a 15. napig valamikor egy tengeralattjáró egy szektorba kerül a cápával, míg a cápa akkor nyer, ha még a 15. nap végén is szabad.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy a kutatók vagy a cápa bőrébe szeretnétek bújni.

Páhán Anita feladata

			K	K
			K	K
C				

Megoldás: A kutatók megfelelő stratégiával meg tudják találni a cápát.

Ehhez egy kulcsészrevétel, hogy ha két tengeralattjáró az alábbi módon helyezkedik el, akkor köztük éjszaka nem tud átmenni a cápa úgy, hogy másnap ne tudják elkapni:

	K	
C		
		K

Emiatt a cápa mozgásától függetlenül az első 8 lépésben a kutatók álljanak be az alábbi módon:

			K	K
			K	K
C				

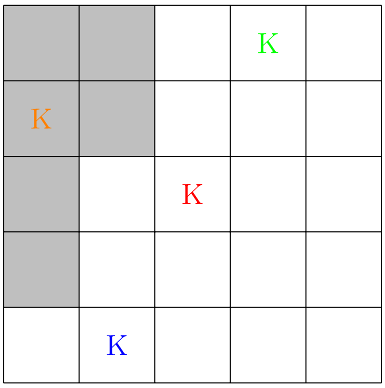
$\longrightarrow$

			K	K
		K		
	K			

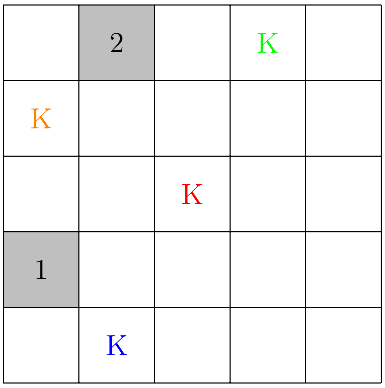
A nyolcadik éjszaka után, ha eddig nem találkoztak, a cápa megáll az egyik mezőn, amennyiben nem egy fenti ábrán szürkével jelölt mezőn áll meg, akkor a következő napon a tengeralattjárók elkaphatják, ezért feltehető, hogy a szürke területen tartózkodik.

Innentől két esetre bontjuk a stratégiát aszerint, hogy hol áll a cápa.

Ha a bal felső szektorban tartózkodik a cápa:
Ekkor a narancssárga tengeralattjáró 5 nap alatt elmegy az alábbi ábrán látható pozícióba. Ha ebben az időintervallumban bármikor elhagyja a cápa ezt a szürke területet, akkor másnap délben a zöld, piros, vagy kék tengeralattjáró el tudja kapni.

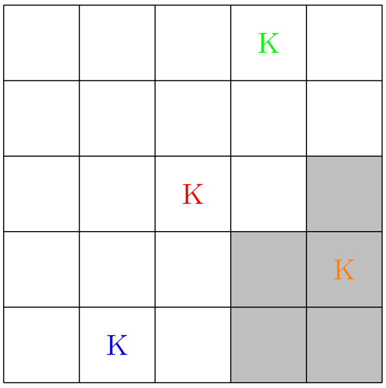


Így ha a 13. nap délig nem kapta el egyik tengeralattjáró sem a cápát, és a 13. éjjeli mozgása után sem tudják elkapni, akkor csak az alábbi két mezőn lehet:

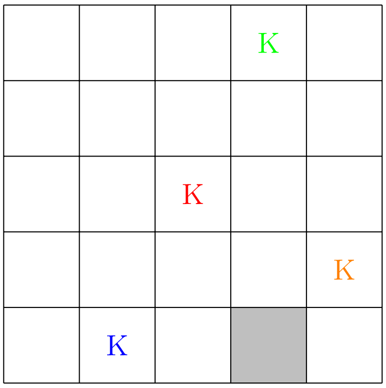


Ha az 1-es számú mezőn van, akkor a 14. napon a narancssárga tengeralattjáró lépjen egyet lefele, ekkor bárhogy is mozog a cápa, biztosan egy tengeralattjáróval közös, vagy szomszédos mezőn lesz a 15. napon, így egy kutató odamozoghat a mezejébe.
Hasonlóan ha a 2-es számú mezőn van, a zöld tengeralattjáró egyet mozogjon egyet balra, így a 15. napon elkapják a cápát.

Ha a jobb alsó szektorban tartózkodik a cápa:
Ekkor a narancssárga hajó 3 nap alatt elmegy az alábbi ábrán látható pozícióba. Ha ebben az időintervallumban bármikor elhagyja a cápa ezt a szürke területet, akkor másnap délben a zöld, piros, vagy kék tengeralattjáró el tudja kapni.



Így ha a 11. nap délig nem kapta el egyik tengeralattjáró sem a cápát, és a 11. esti mozgása után sem tudják elkapni, akkor az alábbi mezőn lehet:



Ekkor a 12. napon a kék tengeralattjáró lépjen egyet jobbra, így aznap este a cápa a szürke mezőről csak egy tengeralattjáróéval megegyező, vagy szomszédos mezőre léphet, ezért a 13. napon az egyik kutató el tudja kapni.