XVII. DÜRER VERSENY

E KATEGÓRIA

KIFEJTŐS FELADATSOR

DÖNTŐ – 2024. 02. 09–11.

1. Hét gyerek (A, B, C, D, E, F, G) bomba-pajzs játékot játszik. A játék egy fordulójának elején sípszóra mindenki választ magának a hat másik gyerek közül két különbözőt, egyiküket bombájának, másikukat pajzsának. Innentől 1 percük van arra, hogy elhelyezkedjenek a sík terepen, ezután mindenki egy helyben marad. Egy adott forduló végén azok a gyerekek kapnak pontot, akik az idő leteltével egy egyenesen állnak a választott bombájukkal és pajzsukkal úgy, hogy hármójuk közül a pajzs van középen.

a) Az egyik játékban a gyerekek a táblázatban látható módon választottak maguknak bombát és pajzsot. Mutassatok egy olyan felállást, ami esetén mind a hét gyerek szerez pontot a fordulóban.

gyerek	A	B	C	D	E	F	G
pajzs	D	A	A	G	G	C	C
bomba	F	E	G	E	B	B	D

b) Lehetséges-e, hogy a gyerekek úgy választanak maguknak bombát és pajzsot, hogy sehogy se tudnak beállni úgy, hogy mindenki szerezzen pontot a fordulóban?

c) Igaz-e, hogy ha egy fordulóban a gyerekek el tudnak helyezkedni úgy, hogy mindenki szerez pontot, akkor el tudnak helyezkedni úgy is, hogy mindenki szerezzen pontot és mindannyian egy egyenesen legyenek?

2. Az ABC háromszög beírt körének középpontja legyen I, az AB oldallal vett érintési pontja D, az AB oldal felezőpontja F. Bizonyítsátok be, hogyha $\frac{AD}{AF} = \frac{2}{3}$ és $FIB\sphericalangle = ACI\sphericalangle$, akkor a háromszög egyenlő szárú.

3. A $\{0, 1, \ldots, 9\}$ halmaz egy H részhalmazát nevezzük *elégségesnek*, ha tetszőleges 10-nél nagyobb egész szám előáll pontosan két olyan nemnegatív egész szám összegeként, melyeknek a számjegyei csak H-ból kerülnek ki. Legkevesebb hány eleme lehet egy elégséges halmaznak?

4. Dürerlandia szigetének legnépszerűbb vetélkedőjének, *A sziget árusának* döntőjébe a két világhírű lazacárus, Pali és Paca jutott be. Ahhoz, hogy később el tudják dönteni, hogy ki a jobb árus, először egy $2n$ tömegű lazacot szeretnének felosztani egymás között egyenlően (ahol n egy pozitív egész számot jelöl). Viszont erre a feladatra csak egy olyan gép áll rendelkezésre, amibe ha betesznek egy k tömegű lazacdarabot, akkor felvágja azt két, pozitív egész tömegű kisebb lazacdarabra, de előre nem lehet tudni, hogy mekkorákra (ahol k egy 1-nél nagyobb egész számot jelöl). Legalább hányszor kell használniuk a gépet ahhoz, hogy a vágások után keletkezett lazacdarabokat biztosan szét tudják osztani kettőjük között úgy, hogy mindketten összesen n tömegű lazachúst kapjanak?
A gép az azonos tömegű lazacdarabokat sem feltétlenül mindig ugyanúgy vágja fel. A vetélkedőn rendelkezésre áll egy mérleg, amivel minden vágás után lemérik a lazacdarabok tömegét.

5. Tetszőleges a egész szám és k pozitív egész szám esetén jelöljük $(a \bmod k)$-val az a szám k-val vett osztási maradékát, amire tehát $0 \leq (a \bmod k) \leq k-1$ és $a-(a \bmod k)$ osztható k-val. Nevezzük az egész számokból álló $a_1, a_2, \ldots$ végtelen sorozatot *nagyon periodikusnak*, ha minden k pozitív egész szám esetén az $(a_1 \bmod k)$, $(a_2 \bmod k), \ldots$ sorozat periodikus. Van-e olyan nagyon periodikus sorozat, amelynek végtelen sok tagja nulla, de a nullhelyei mégsem periodikusak?
Egy $c_1, c_2, \ldots$ sorozatot periodikusnak nevezünk, ha létezik olyan d pozitív egész szám, melyre $c_{i+d} = c_i$ minden i pozitív egész szám esetén. Azt mondjuk, hogy egy sorozat nullhelyei periodikusak, ha a sorozatban minden nemnulla számot 1-re cserélve egy periodikus sorozatot kapunk.

6. Játék: Két játékos felváltva tölt ki hatoslottó szelvényeket. Egy kitöltés akkor szabályos, ha a szelvény egyik száma sem volt még korábban kiválasztva, továbbá a szelvényen a számok legnagyobb közös osztója 1-nél nagyobb. A játéknak akkor van vége, ha valaki nem tud szabályosan új szelvényt kitölteni, aki ezzel veszít.
A hatoslottó szelvényein hat különböző számot kell kiválasztani a 45-nél nem nagyobb pozitív egész számok közül. Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat sorszáma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 2 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.
A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:

a XVII. Dürer Verseny szervezői

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45			