E1. Hét gyerek (A, B, C, D, E, F, G) bomba-pajzs játékot játszik. A játék egy fordulójának elején sípszóra mindenki választ magának a hat másik gyerek közül két különbözőt, egyiküket bombájának, másikukat pajzsának. Innentől 1 percük van arra, hogy elhelyezkedjenek a sík terepen, ezután mindenki egy helyben marad. Egy adott forduló végén azok a gyerekek kapnak pontot, akik az idő leteltével egy egyenesen állnak a választott bombájukkal és pajzsukkal úgy, hogy hármójuk közül a pajzs van középen.

a) Az egyik játékban a gyerekek a táblázatban látható módon választottak maguknak bombát és pajzsot. Mutassatok egy olyan felállást, ami esetén mind a hét gyerek szerez pontot a fordulóban.

gyerek	A	B	C	D	E	F	G
pajzs	D	A	A	G	G	C	C
bomba	F	E	G	E	B	B	D

b) Lehetséges-e, hogy a gyerekek úgy választanak maguknak bombát és pajzsot, hogy sehogy se tudnak beállni úgy, hogy mindenki szerezzen pontot a fordulóban?

c) Igaz-e, hogy ha egy fordulóban a gyerekek el tudnak helyezkedni úgy, hogy mindenki szerez pontot, akkor el tudnak helyezkedni úgy is, hogy mindenki szerezzen pontot és mindannyian egy egyenesen legyenek?

Nagy Kartal feladata

Megoldás: **a)** Álljanak fel a gyerekek egy egyenesre ilyen sorrendben: FDCBAGE. Ez a példa ellenőrizhető, hogy tényleg megfelelő. Erre rájönni úgy lehet, hogy lépésenként vizsgálunk egyre több oszlopot. A negyedik oszlop miatt DGE sorrendje adott. Ezután a hetedik oszlop miatt a DCGE sorrend is fix. A harmadik oszlop miatt a DCAGE sorrend fix. Az első oszlopból az FDCAGE sorrend adódik, és végül B-nek a többiekhez képest a helye a kimaradt két oszlop miatt egyértelmű.

b) A hét gyerek közül vizsgáljuk meg csak A és C választását. Ha A-nak B a pajzsa és C a bombája, akkor biztosan úgy kell elhelyezkednie ennek a három gyereknek egy egyenesen, hogy B van középen. Viszont ha emellett C-nek A a pajzsa és B a bombája, akkor a három gyereknek úgy kell egy egyenesen állnia, hogy közülük A van középen. Így a gyerekek nem tudnak úgy felállni, hogy A és C is kapjon pontot.

c) Tekintsük a gyerekek egy olyan felállását a koordinátasíkon, ahol mindenki szerez pontot. Feltehetjük, hogy bármely két gyerek által meghatározott egyenes olyan egyenes, ami nem párhuzamos az y-tengellyel: a gyerekek (mivel véges sokan vannak) tudnak úgy forogni, hogy ez a feltétel valóban teljesüljön, és a felállás is jó maradjon. Ekkor minden gyerek megfelel a koordinátarendszer egy pontjának, és semelyik két gyerek pontjának x-koordinátája sem egyenlő.

Sétáljon át most minden gyerek az x-tengelyre a következőképpen: ha eddig az (x, y) pontban állt, menjen át az $(x, 0)$ pontra. Ez továbbra is egy olyan felállás lesz, ahol mindenki kap pontot, hiszen ha az eredeti felállásban három gyerek egy egyenesen állt, akkor az egyenesen felvett balról jobbra sorrendjük megegyezett az x-koordinátájuk növekvő sorrendjével, és ez az új felállásban is megmarad, ezzel kész vagyunk.

Megjegyzés: Ez a geometriai transzformáció az egyenesre vett merőleges vetítés. Azt használjuk ki, hogy van olyan egyenes a síkon a véges sok gyerekre, ami nem párhuzamos a páronkénti egyeneseik közül egyikkel sem. Ilyen pedig azért van, mert csak véges sok egyenest zárnak ki. Vetítés helyett más geometriai transzformációk is megfelelőek. Például úgy is meg lehet adni a gyerekek egy sorrendjét, hogy megforgatunk egy pont körül egy egyenest, ezzel "végigsöpörve" a síkot azt vizsgálva, hogy melyik gyerek hányadikként lépi át az egyenest. Itt arra kell figyelni, hogy a forgás középpontja ne legyen rajta semelyik egyenesen, amelyiket két gyerek meghatároz. Ha az így kapott sorrend szerint állnak fel egy egyenesre, akkor is megfelelő megoldást kapunk.

E2. Az ABC háromszög beírt körének középpontja legyen I, az AB oldallal vett érintési pontja D, az AB oldal felezőpontja F. Bizonyítsátok be, hogyha $\frac{AD}{AF} = \frac{2}{3}$ és $FIB\sphericalangle = ACI\sphericalangle$, akkor a háromszög egyenlő szárú.
Osztényi József feladata

Megoldás: Legyen a DF szakasz hossza az 1 egység, ami alapján $AD = 2$, míg $FB = 3$.

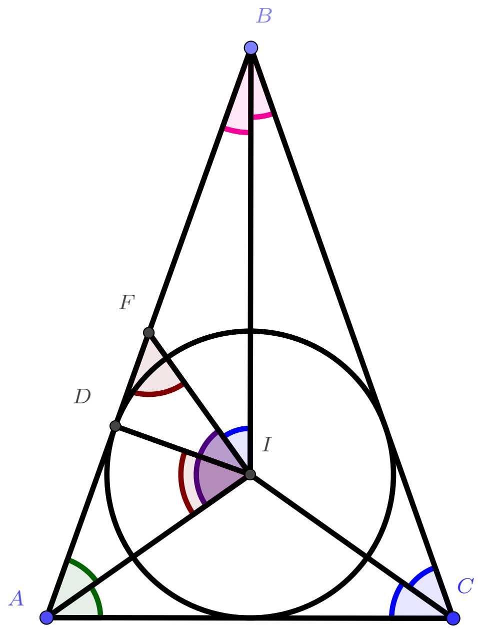
Legyenek a háromszög szögei a megszokott módon α, β és γ, ami alapján tudjuk, hogy $BAI\sphericalangle = IAC\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$, $ABI\sphericalangle = IBC\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$ és $BCI\sphericalangle = ICA\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}$.

Számoljuk ki $AIB\sphericalangle$-t az alapján, hogy az AIB háromszög többi szögét ismerjük, vagyis $AIB\sphericalangle = 180° - IAB\sphericalangle - ABI\sphericalangle = 180° - \frac{\alpha+\beta}{2} = 90° + \frac{\gamma}{2}$. Ekkor viszont mivel $FIB\sphericalangle = ACI\sphericalangle$, úgy $AIF\sphericalangle = AIB\sphericalangle - FIB\sphericalangle = AIB\sphericalangle - ACI\sphericalangle = 90°$, vagyis $AIF\sphericalangle$ éppen derékszög.

Ekkor az AIF derékszögű háromszögnek IF egy magassága, emiatt az AID, IFD és AFI háromszögek hasonlóak. A hasonlóság miatt $\frac{AD}{ID} = \frac{ID}{FD}$, amit átrendezve megkapjuk ID hosszát: $ID = \sqrt{AD \cdot FD} = \sqrt{2}$.

Ekkor az ID szakasz ismeretében megadható az IF és IB szakaszok hossza egy-egy Pitagorasz tétel segítségével: $FI = \sqrt{FD^2 + DI^2} = \sqrt{3}$, míg $BI = \sqrt{BD^2 + DI^2} = 3\sqrt{2}$.

A feladat befejezéséhez elegendő egy hasonlóság. Az FBI és az IBC háromszögek hasonlóak, mivel $ICB\sphericalangle = FIB\sphericalangle$ és $CBI\sphericalangle = IBF\sphericalangle$. A hasonlóság miatt $\frac{BI}{BF} = \frac{BC}{BI}$, amit BC-re rendezve azt kapjuk, hogy $BC = \frac{BI^2}{BF} = 6$. Ezek alapján azt kapjuk, hogy $AB = BC$, vagyis a háromszögünk ezen feltételek mellett valóban egyenlőszárú.



E3. A $\{0, 1, \ldots, 9\}$ halmaz egy H részhalmazát nevezzük *elégségesnek*, ha tetszőleges 10-nél nagyobb egész szám előáll pontosan két olyan nemnegatív egész szám összegeként, melyeknek a számjegyei csak H-ból kerülnek ki. Legkevesebb hány eleme lehet egy elégséges halmaznak?
A 2023-as Alkotótáborban kitalált feladat

Megoldás: Két szám összegének utolsó jegye megegyezik az utolsó jegyeik összegének utolsó jegyével. Ebből kifolyólag ahhoz, hogy egy H halmaz elégséges legyen, mind a 10 jegy elő kell, hogy álljon úgy, mint két, H-beli elem összegének utolsó jegye (mivel a 10-nél nagyobb szám utolsó jegye csak így állítható elő).

Tegyük fel, hogy van egy négyelemű elégséges halmaz. Legyen ez $\{a; b; c; d\}$. Az ezekből képzelhető összegek: $a+a$, $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+b$, $b+c$, $b+d$, $c+c$, $c+d$ és $d+d$. Ezek közül $a+a, b+b, c+c$ és $d+d$ biztosan páros. Tehát, hogy minden jegy elő tudjon állni két H-beli elem összegének utolsó jegyeként, ahhoz $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$, $c+d$ között 5 páratlan számnak kell lennie. Ha ebben a halmazban van valamilyen paritású elemből legalább 3, akkor ennek a 3 elemnek a páronkénti összegei mind párosak (mivel két azonos paritású szám összege páros), tehát legfeljebb 3 páratlan szám szerepelhetne az összegek között. Ha a halmazban semelyik paritású elemből nincs 3, akkor az azt jelenti, hogy 2 páros és 2 páratlan elemből áll, ekkor a két páros elem összege páros és a két páratlané is, azaz legfeljebb $6-2=4$ páratlan szám lehetne az $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$, $c+d$ összegek között. Tehát sehogyan nem állhat elő mind az 5 páratlan számjegy, mint két, elégéges halmazbeli elem összegének utolsó jegye, azaz nincs négyelemű elégséges halmaz.

Ötelemű elégséges halmaz viszont már van. Például a $\{0; 1; 3; 4; 5\}$. Először is vegyük észre, hogy minden számjegy előáll két halmazbeli elem összegeként:

$$\begin{gathered}0=0+0\\1=1+0\\2=1+1\\3=3+0\\4=4+0\\5=5+0\\6=5+1\\7=4+3\\8=5+3\\9=5+4\end{gathered}$$

Ekkor egy tetszőleges 10-nél nagyobb egész számot fel tudunk írni pontosan két olyan nemnegatív egész szám összegeként, melyeknek a számjegyei csak H-ból kerülnek ki az alábbi módon:
A szám minden számjegyét felírjuk két, H-beli elem összegeként a fent mutatott módon, ez a két jegy lesz a megfelelő helyiértékű jegye a két összeadandónak. Például ha az összegben a százas helyiértéken 6-os áll, akkor az első összeadandóban legyen 5-ös a százas helyiértéken, a másodikban pedig 1-es. Ha a két szám valamelyike valahány 0-val kezdődne, akkor azokat töröljük. Például a 106579 esetén ez a felírás így néz ki: $106579 = 105545 + 001034$, a számok elejéről a nullákat törölve: $106594 = 105545 + 1034$. Mivel soha nem lesz két jegy összege 10-nél nagyobb (azaz nem keletkezik maradék az összeadás során), tudunk jegyenként összeadni, tehát ez a módszer tényleg működik.
Összefoglalva: Egy elégséges halmaznak legalább **5** eleme van.

E4. Dürerlandia szigetének legnépszerűbb vetélkedőjének, *A sziget árusának* döntőjébe a két világhírű lazacárus, Pali és Paca jutott be. Ahhoz, hogy később el tudják dönteni, hogy ki a jobb árus, először egy $2n$ tömegű lazacot szeretnének felosztani egymás között egyenlően (ahol n egy pozitív egész számot jelöl). Viszont erre a feladatra csak egy olyan gép áll rendelkezésre, amibe ha betesznek egy k tömegű lazacdarabot, akkor felvágja azt két, pozitív egész tömegű kisebb lazacdarabra, de előre nem lehet tudni, hogy mekkorákra (ahol k egy 1-nél nagyobb egész számot jelöl). Legalább hányszor kell használniuk a gépet ahhoz, hogy a vágások után keletkezett lazacdarabokat biztosan szét tudják osztani kettőjük között úgy, hogy mindketten összesen n tömegű lazachúst kapjanak?
A gép az azonos tömegű lazacdarabokat sem feltétlenül mindig ugyanúgy vágja fel. A vetélkedőn rendelkezésre áll egy mérleg, amivel minden vágás után lemérik a lazacdarabok tömegét.
Beke Csongor feladata

Megoldás: Azt állítjuk, hogy legalább n-szer kell használniuk a gépet, hogy biztosan ketté tudják osztani a lazacot. Először mutassuk meg, hogy van olyan eset amikor n lépés (géphasználat) szükséges. Ha a gép mindig 1 tömegű lazacot vág le a berakott darabból, akkor nincs döntésünk, hisz csak 1-es darabjaink és egy nagy darabunk van minden lépés után (és persze az 1-es darabokat nem tehetjük a gépbe), tehát n lépés szükséges, mert ekkor éri el a nagy darab mérete először n-et.

Most lássuk be, hogy n lépés mindig elég. Ehhez lépjük a következőket. Ameddig a legnagyobb darab tömege nagyobb, mint n, rakjunk a gépbe egy darabot, ami nem a legnagyobb, ha van ilyen (nem 1 tömegű), amennyiben már nincs ilyen, akkor rakjuk be a legnagyobbat. Akkor hagyjuk abba, ha az egyik lépésben a legnagyobbat vágjuk ketté, és két olyan darabra vágja a gép, aminek mindkettőnek legfeljebb n a tömege.

Ekkor végül egy darab k-s, egy darab l-es és még $2n-(k+l)$ darab 1-es darabunk lesz, ahol $k \leq n$, $l \leq n$ és $k+l>n$. Mivel minden lépésben pontosan 1-gyel nő a darabok száma, és eredetileg 1 volt, ezért $(2n-(k+l)+2-1)$-et léptünk, azaz legfeljebb n-et. Továbbá tényleg ketté tudják osztani megfelelően a lazacot, mivel egyikük el tudja vinni a k-s darabot, másikuk az l-eset, és mindketten kapnak még annyi 1-eset, hogy pont n tömegű lazac jusson nekik.

Második megoldás: Csak arra mutatunk példát, hogy n vágás elég. Képzeljük el a lazacot torta alakúnak, amin van $2n$ darab vonal a középpontjától a kerületére, amik mentén $2n$ egyenlő részre lehet vágni. Ekkor gondolhatunk úgy a feladatra, hogy a gép a következőt teszi. Az első vágásnál szétvágja a tortát két vonal mentén. Ezután ha berakunk egy nagyobb szelet tortát, akkor az egyik vonal mentén kettévágja. Ha n-szer használtuk a gépet, akkor $n+1$ vágás be lesz húzva. Ezek közül van 2, amik egymással szemköztiek, azaz csak ezt a 2 vágást figyelembe véve 2 darab n tömegű részre bontottuk fel a lazacot.

Harmadik megoldás: Megint csak a nehezebb irányra mutatunk új indoklást. Akárhogyan is vágunk n-et, a végén mindenképpen $n+1$ darabban lesz a lazac. Legyen a darabok mérete $a_1, a_2, \dots a_{n+1}$, és tekintsük az $a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \dots, a_1+a_2+\dots+a_n$ számokat. Ez n szám, ha valamelyik osztható n-nel, akkor készen vagyunk, mert mindegyik szigorúan 0 és $2n$ közé esik. Ha nincs n-el osztható, akkor kell kettőnek lenni, legyenek ezek $a_1+a_2+\dots+a_s$ és $a_1+a_2+\dots+a_t$ $(s>t)$, amiknek ugyanannyi az n-el vett osztási maradéka. Ezeknek a különbsége, $a_{s+1}+a_{s+2}+\dots+a_t$ osztható n-el, és szigorúan 0 és $2n$ közé esik, így ebben az esetben is szét tudjuk osztani a lazacot két egyenlő részre.

E5. Tetszőleges a egész szám és k pozitív egész szám esetén jelöljük $(a \bmod k)$-val az a szám k-val vett osztási maradékát, amire tehát $0 \leq (a \bmod k) \leq k-1$ és $a-(a \bmod k)$ osztható k-val. Nevezzük az egész számokból álló $a_1, a_2, \ldots$ végtelen sorozatot *nagyon periodikusnak*, ha minden k pozitív egész szám esetén az $(a_1 \bmod k)$, $(a_2 \bmod k)$, $\ldots$ sorozat periodikus. Van-e olyan nagyon periodikus sorozat, amelynek végtelen sok tagja nulla, de a nullhelyei mégsem periodikusak?
Egy $c_1, c_2, \ldots$ sorozatot periodikusnak nevezünk, ha létezik olyan d pozitív egész szám, melyre $c_{i+d} = c_i$ minden i pozitív egész szám esetén. Azt mondjuk, hogy egy sorozat nullhelyei periodikusak, ha a sorozatban minden nemnulla számot 1-re cserélve egy periodikus sorozatot kapunk.
Szűcs Gábor feladata

Megoldás: Egy olyan sorozatot konstruálunk, amelyre az $(a_1 \bmod n), (a_2 \bmod n), \ldots$ sorozat 10^{n+1} szerint periodikus, minden n-re.

A sorozat n. elemét (a_n) n tízes számrendszerbeli alakja alapján határozzuk meg: ha n egy 10-hatvány, akkor legyen $a_n = 0$, különben legyen $k_1! + k_2! + \cdots + k_l!$, ahol $k_1, k_2, \ldots, k_l$ azon helyiértékek sorszáma, ahol az n számban nem 0-s számjegy áll. Például $n = 1065$ esetén $a_n = 4! + 2! + 1! = 27$, míg $n = 25000$ esetén $a_n = 5! + 4! = 144$.

Ennek a sorozatnak a nullhelyei a 10-hatványok, amelyek egy nem periodikus sorozatot alkotnak, viszont tényleg bármely k-ra az $(a_i \bmod k)$ sorozat 10^{k+1} szerint periodikus: Ehhez elég látni, hogy ha $i - j = 10^k$, akkor a_i és a_j k-val vett osztási maradéka megegyezik. Ez azért teljesül, mert i és j utolsó k számjegye megegyezik, így $a_i - a_j$ csak olyan számok faktoriálisainak összege, melyek mind legalább k-k, ezért $k | a_i - a_j$.

2. megoldás:

Van ilyen sorozat, mutatunk egy konstrukciót.

A konstrukció a kínai maradéktételt használja, ami a következőképpen szól:

Ha $m_1, m_2, \ldots, m_k$ páronként relatív prímek, $c_1, c_2, \ldots, c_k$ pedig tetszőleges egész számok, akkor létezik pontosan egy olyan x egész szám, melyre $0 \leq x < m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_k$, és

$$
\begin{aligned}
x &\equiv c_1 \mod m_1 \\
x &\equiv c_2 \mod m_2 \\
&\cdots \\
x &\equiv c_k \mod m_k.
\end{aligned}
$$

Figyeljük meg, hogy elég minden prímhatvány esetén nézve a maradékot periodikus sorozatot kapni, mivel ebből már kínai maradéktétellel következik, hogy tetszőleges pozitív egész szám esetén is periodikus lesz a sorozat. Legyen a $p_1, p_2, \ldots$ a prímhatványok egy felsorolása úgy, hogy ha q egy prím és $l < k$ pozitív egész számok, akkor q^l korábban van a felsorolásban, mint q^k. Úgy fogjuk megkonstruálni az $a_0, a_1, \ldots$ sorozatot, hogy $a_0 = a_1 = 0$, a sorozat nullhelyei (a_0-n kívül) éppen a kettőhatványok (amiknek a sorozata nem periodikus), és a sorozat 2^{k-1} periódussal periodikus lesz mod p_k. Speciálisan a sorozat 1 periódussal lesz periodikus mod p_1, azaz p_1-gyel minden tag osztható lesz.

Indukcióval gyártjuk le a sorozatot, a k. lépésben megadjuk a_i értékét minden $i \leq 2^{k-1}$ esetén. Az előző bekezdésben már megcsináltuk a $k = 1$ kezdőlépést, most tegyük fel, hogy már valamilyen $k \geq 1$-re készen vagyunk, és csináljuk meg $k+1$-re.

Adjuk meg tetszőlegesen az $a_{2^{k-1}+1}, a_{2^{k-1}+2}, \ldots, a_{2^k}$ számokat úgy, hogy ne romoljanak el az elvárt feltételek. Most meggondoljuk, hogy ezt mindig meg tudjuk tenni. A kívánt feltételek azok, hogy minden $1 \leq l \leq k$ esetén az (a_i) sorozat modulo p_l tekintve periodikus legyen 2^{l-1} periódussal. Tehát tetszőleges $2^{k-1} < m \leq 2^k$ esetén az $a_m - a_{m-2^{l-1}}$-nek oszthatónak kell lennie p_l-el minden $1 \leq l \leq k$ számra. Ez pedig megtehető, mivel ha p_i és p_j ugyanazon prímnek a hatványai $(1 \leq i < j \leq k)$, akkor $p_i \mid p_j$ és a periódusukra is, $2^{i-1} \mid 2^{j-1}$, így ha $a_m \equiv a_{m-2^{j-1}} \pmod{p_j}$ kongruencia teljesül, akkor világos, hogy az i-re vonatkozó is teljesülni fog. Emiatt elég minden prím esetén a legnagyobb kitevőjű tagra vonatkozó kongruenciát figyelembe venni, mivel akkor automatikusan a többi is teljesül. Így tényleg tudunk megfelelő a_m-et választani a kínai maradéktétel szerint. Továbbá ha $m \neq 2^k$, akkor legyen

$a_m \neq 0$, míg $a_{2^k} = 0$ szabályos választás, mivel minden eddig megválasztott periódus osztja 2^k-t, és $a_0 = 0$.

Ezzel a konstrukciót befejeztük.

E6. **Játék:** Két játékos felváltva tölt ki hatoslottó szelvényeket. Egy kitöltés akkor szabályos, ha a szelvény egyik száma sem volt még korábban kiválasztva, továbbá a szelvényen a számok legnagyobb közös osztója 1-nél nagyobb. A játéknak akkor van vége, ha valaki nem tud szabályosan új szelvényt kitölteni, aki ezzel veszít.
A hatoslottó szelvényein hat különböző számot kell kiválasztani a 45-nél nem nagyobb pozitív egész számok közül.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.
Nagy Kartal feladata

Megoldás:

A kezdőjátékosnak van nyerő stratégiája.

Az 1 nem szerepelhet egyik szelvényen sem és a 7-nél nagyobb prímszámok sem, hiszen 45-ig nincsen 6 szám, ami mind osztható egy ilyen nagy prímmel ($6 \cdot 7 < 45 < 6 \cdot 8$). Tehát kiesik: $1, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43$, azaz 11 darab szám. A maradék $45-11 = 34$ számból így legfeljebb 5 szelvényt lehet kitölteni. Azt állítjuk, hogy a kezdő el is tudja érni, hogy 5 darab szelvényt töltsenek ki, amivel ő tölti ki az utolsót és nyer.

Legyen az első szelvény $5, 15, 20, 30, 35, 45$, ekkor marad 6 darab 6-tal oszható, 14 darab 2-vel osztható, de 3-mal nem osztható és 6 darab 3-mal osztható, de 2-vel nem osztható szám. 5-tel osztható számból csak 3 darab marad és 7-tel osztható számból csak 5 darab marad.

Ezek után tehát, a második csak olyan szelvényt tud kitölteni, amelyen minden szám osztható vagy 2-vel, vagy 3-mal, vagyis a legnagyobb közös osztó a szelvényen csak 2, 3, 4 vagy 6 lehet.

Ha olyat tölt ki, ahol a számok legnagyobb közös osztója nem osztható 3-mal, akkor megmarad a 6 darab 3-mal osztható, de 2-vel nem osztható szám. Ha a kezdőjátékos ezeket választja, akkor még mindig marad $14 + 6 - 6 = 14$ páros szám (volt 14 db csak 2-vel osztható, 6 db 6-tal osztható, de a második kitöltött közben egy szelvényt). Így még két teljesen páros szelvényt biztosan ki tudnak tölteni.

Ha a második olyan szelvényt tölt ki elsőre, ahol a számok legnagyobb közös osztója 3-mal osztható, akkor is marad még $6 + 6 - 6 = 6$ darab 3-mal osztható (volt 6 darab csak 3-mal osztható, 6 darab 6-tal osztható, de a második kitölt egy szelvényt). Tehát kezdő kitölthet egy szelvényt ezzel a 6 darab 3-mal osztható számmal. Így marad 14 darab páros szám (amik csak 2-vel oszthatóak) és így még két teljesen páros szelvényt ki tudnak tölteni.