1. Határozzátok meg azokat az (a, b, c, d) valós számnégyeseket, melyekre az $a+b, b+c, c+d, d+a$ számok közül egyik sem nulla, továbbá

$$\frac{a+2b+3c}{c+d} = \frac{b+2c+3d}{d+a} = \frac{c+2d+3a}{a+b} = \frac{d+2a+3b}{b+c}.$$

2. A síknak egy P részhalmazára jelölje $S(P)$ azon egyeneseknek és köröknek a halmazát, melyek átmennek legalább három P-beli ponton. Határozzátok meg az összes olyan 2024 pontból álló P halmazt, melyre $S(P)$ bármely két különböző elemének a metszéspontjai is mind P-beli pontok.

3. Dürerlandia szigetének legnépszerűbb vetélkedőjének, *A sziget árusának* döntőjébe a két világhírű lazacárus, Pali és Paca jutott be. Ahhoz, hogy később el tudják dönteni, hogy ki a jobb árus, először egy $2n$ tömegű lazacot szeretnének felosztani egymás között egyenlően (ahol n egy pozitív egész számot jelöl). Viszont erre a feladatra csak egy olyan gép áll rendelkezésre, amibe ha betesznek egy k tömegű lazacdarabot, akkor felvágja azt két, pozitív egész tömegű kisebb lazacdarabra, de előre nem lehet tudni, hogy mekkorákra (ahol k egy 1-nél nagyobb egész számot jelöl). Legalább hányszor kell használniuk a gépet ahhoz, hogy a vágások után keletkezett lazacdarabokat biztosan szét tudják osztani kettőjük között úgy, hogy mindketten összesen n tömegű lazachúst kapjanak?
A gép az azonos tömegű lazacdarabokat sem feltétlenül mindig ugyanúgy vágja fel. A vetélkedőn rendelkezésre áll egy mérleg, amivel minden vágás után lemérik a lazacdarabok tömegét.

4. Jelölje $\mathcal{H}$ a sík egyeneseinek halmazát. A sík pontjain értelmezett $f : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{H}$ függvényt *polarizálónak* nevezzük, ha bármely $P, Q \in \mathbb{R}^2$ pontok esetén, ha $P \in f(Q)$, akkor $Q \in f(P)$.
a) Bizonyítsátok be, hogy nem létezik szürjektív polarizáló függvény.
b) Mutassatok példát injektív polarizáló függvényre.
c) Igazoljátok, hogy minden injektív polarizáló függvény esetén van olyan P pont a síkon, amelyre $P \in f(P)$.
Egy $f : A \to B$ függvény akkor szürjektív, ha minden $b \in B$ esetén létezik olyan $a \in A$, amelyre $f(a) = b$. Valamint f akkor injektív, ha bármely különböző $a_1, a_2 \in A$ esetén $f(a_1) \neq f(a_2)$.

5. Legyen p egy rögzített prímszám.
a) Hány olyan (a_1, a_2, a_3) rendezett számhármas van, amelynek tagjai p-nél kisebb nemnegatív egész számok, továbbá $p \mid a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$?
b) Legyen k egy rögzített páratlan pozitív egész szám. Hány olyan $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ rendezett szám-k-as van, amelynek tagjai p-nél kisebb nemnegatív egész számok, továbbá $p \mid a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2$?

6. Játék: Egy pozitív egész n esetén adott egy $1 \times n$-es tábla, ahol a szomszédos mezőket $n-1$ *elválasztó él* határolja el egymástól, melyeken kezdetben nincs gyufa. Egy $0 < k < n$ méretű lépés során egy játékos kiválaszt egy $1 \times k$-as résztáblát, mely a belsejében nem tartalmaz gyufát, és a résztáblát határoló gyufa nélküli elválasztó élekre rárak egyet-egyet. A lépés akkor szabályos, ha a határoló elválasztó élek közül legalább az egyiken még nem volt gyufa, továbbá vagy $k = 1$, vagy k osztható 4-gyel. Két játékos felváltva lép, a soron következő játékosnak a legnagyobb $0 < k < n$ méretű szabályos lépései közül kell meglépnie az egyiket. A játéknak akkor van vége, ha valaki nem tud szabályosan lépni, aki ezzel veszít.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! A szervezők először meghatározzák n értékét, ezután Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat sorszáma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 2 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.
A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:

a XVII. Dürer Verseny szervezői

23	22	21	20	19	18	17	16	15
24								14
25		39	38	37	36	35		13
26						34		12
27	28	29	30	31	32	33		11
								10
1	2	3	4	5	6	7	8	9