XVII. DÜRER VERSENY

E+ KATEGÓRIA

KIFEJTŐS MEGOLDÁSOK

DÖNTŐ – 2024. 02. 09–11.

E+1. Határozzátok meg azokat az (a, b, c, d) valós számnégyeseket, melyekre az $a+b, b+c, c+d, d+a$ számok közül egyik sem nulla, továbbá
$$\frac{a+2b+3c}{c+d} = \frac{b+2c+3d}{d+a} = \frac{c+2d+3a}{a+b} = \frac{d+2a+3b}{b+c}.$$

Imolay András feladata

1. Megoldás: Jelölje a feladatban szereplő törtek közös értékét s. Használjuk fel a következő, igencsak hasznos segédállítást:

Segédállítás: Ha $s = \frac{x}{y} = \frac{z}{w}$, akkor $s = \frac{x+z}{y+w}$ amennyiben $y+w \neq 0$, különben pedig $x+z = y+w = 0$.

Bizonyítás: Ha $y+w \neq 0$, akkor $\frac{x}{y} = \frac{x+z}{y+w} \iff x(y+w) = y(x+z) \iff xw = yz$, ami pedig következik az $\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$ feltételből. Ha pedig $y+w = 0$, akkor $y = -w$, így $\frac{x}{y} = \frac{z}{w} \implies x = -z$, tehát $x+z = 0$. $\square$

Használjuk a segédállítást: ha $a+b+c+d \neq 0$, akkor egyrészt
$$s = \frac{a+2b+3c}{c+d} = \frac{c+2d+3a}{a+b} = \frac{(a+2b+3c)+(c+2d+3a)}{(c+d)+(a+b)} = \frac{4(a+c)+2(b+d)}{a+b+c+d},$$
másrészt
$$s = \frac{b+2c+3d}{d+a} = \frac{d+2a+3b}{b+c} = \frac{(b+2c+3d)+(d+2a+3b)}{(d+a)+(b+c)} = \frac{2(a+c)+4(b+d)}{a+b+c+d}.$$

Ez csak úgy teljesülhet, ha a két számláló egyenlő, avagy $a+c = b+d$. Ezt felhasználva
$$s = \frac{4(a+c)+2(b+d)}{a+b+c+d} = \frac{6(a+c)}{2(a+c)} = 3.$$

Most a feladatbeli törtek átírhatóak egyenletekké: például $\frac{a+2b+3c}{c+d} = 3 \iff a+2b+3c = 3c+3d \iff a+2b = 3d$, és hasonlóan felírhatjuk ezt a többi törtre is (a betűket ciklikusan cserélgetve). Belátjuk, hogy a négy szám mind egyenlő lesz. Ugyanis ha d a négy szám között a legnagyobb, akkor $3d = a+2b \leq d+2d = 3d$, de az egyenlőség csak akkor teljesül, ha $a = b = d$. Végül emiatt $3c = d+2a = 3d$, azaz $c = d$.

Mi a helyzet, ha $a+b+c+d = 0$? A segédállítás szerint ekkor is teljesül, hogy a két tört számlálója egyenlő (pontosabban mindkettő 0), tehát $a+c = b+d$, és mivel az összegük 0, a közös érték is annyi. Visszahelyettesítve $c = -a$-t és $d = -b$-t a feladatbeli egyenletbe kapjuk, hogy $\frac{2(b-a)}{-(a+b)} = \frac{-2(a+b)}{a-b}$, amiből az következne, hogy $\left(\frac{b-a}{-(a+b)}\right)^2 = -1$, ellentmondás.

Összefoglalva, $a = b = c = d = \lambda$-nak teljesülnie kell, de $\lambda \neq 0$ (különben a nevezők is 0-k lennének). Ha viszont $a = b = c = d = \lambda \neq 0$, akkor valóban minden tört értéke 3.

2. Megoldás: Mutatunk egy alternatív bizonyítást arra, hogy $s = 3$. Írjuk át a törteket egyenletekké (ahogy azt az előző megoldás végén is tettük), csak most még nem tudjuk a közös értéket. Például $s = \frac{a+2b+3c}{c+d} \iff a+2b+3c = sc+sd \iff a+2b+(3-s)c-sd = 0$, így kapunk egy négy ismeretlenes négy egyenletből álló homogén lineáris egyenletrendszert (s-re).
$$\begin{array}{rcrcrcr}
a & + & 2b & + & (3-s)c & - & sd = 0 \\
-sa & + & b & + & 2c & + & (3-s)d = 0 \\
(3-s)a & - & sb & + & c & + & 2d = 0 \\
2a & + & (3-s)b & - & sc & + & d = 0
\end{array}$$

Ha ennek van a triviális $(0,0,0,0)$-n kívül megoldása, akkor az egyenletek (mint vektorok) lineárisan összefüggőek, így az asszociált $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-s & -s \\ 2 & 3-s & -s & 1 \\ 3-s & -s & 1 & 2 \\ -s & 1 & 2 & 3-s \end{pmatrix}$ mátrix determinánsának nullának kell lennie. Számoljuk ki a determinánst:

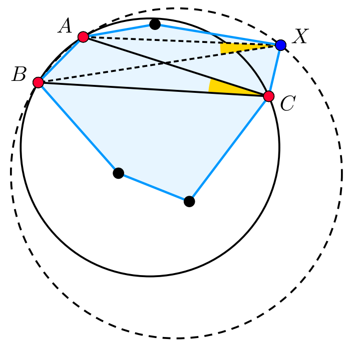
$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3-s & -s \\ 2 & 3-s & -s & 1 \\ 3-s & -s & 1 & 2 \\ -s & 1 & 2 & 3-s \end{vmatrix} &= 1\cdot \begin{vmatrix} 3-s & -s & 1 \\ -s & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3-s \end{vmatrix} - 2\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3-s & -s \\ -s & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3-s \end{vmatrix} \\
&+ (3-s)\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3-s & -s \\ 3-s & -s & 1 \\ 1 & 2 & 3-s \end{vmatrix} + s\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3-s & -s \\ 3-s & -s & 1 \\ -s & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \Big((3-s)^2 - 2s - 2s - 1 - s^2(3-s) - 4(3-s)\Big) \\
&- 2\Big(2(3-s) + 2(3-s) + 2s^2 + s + s(3-s)^2 - 8\Big) \\
&+ (3-s)\Big(-2s(3-s) + (3-s) - 2s(3-s) - s^2 - (3-s)^3 - 4\Big) \\
&+ s\Big(-4s - s(3-s) - s(3-s) + s^3 - 2(3-s)^2 - 2\Big) \\
&= 8s^3 - 24s^2 + 32s - 96 = 8(s-3)(s^2+4)
\end{aligned}$$

Ez a polinom pedig csak akkor veheti fel a 0-t, ha $s = 3$ (hiszen $s^2 + 4 > 0$).

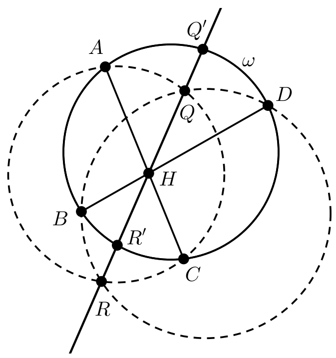
E+2. A síknak egy P részhalmazára jelölje $S(P)$ azon egyeneseknek és köröknek a halmazát, melyek átmennek legalább három P-beli ponton. Határozzátok meg az összes olyan 2024 pontból álló P halmazt, melyre $S(P)$ bármely két különböző elemének a metszéspontjai is mind P-beli pontok.

Beke Csongor feladata

Megoldás: Belátjuk, hogy csak azok a P ponthalmazok elégítik ki a feladat feltételeit, amelyek pontjai vagy egy körön vagy egy egyenesen vannak. Világos, hogy ezek valóban megfelelőek. Most tegyük fel, hogy egy jó P ponthalmaz ezektől különbözik. Ekkor a pontoknak létezik egy legalább három oldalú konvex burka.



Tekintsük a konvex burok csúcsai által meghatározott ($S(P)$-beli) köröket, és ezek között az (egyik) legnagyobb legyen ω. Vegyük észre, hogy minden P-beli pontot tartalmaz ω vagy a határán vagy a belsejében. Ugyanis tegyük fel indirekten, hogy az X pont ω-n kívül helyezkedik el. Legyen A, B, C három pont ω-n. Ekkor az A, B, C, X pontok a konvex burok csúcsai, így feltehetjük, hogy az $ABCX$ egy konvex négyszög. Az ABC háromszög A-nál vagy C-nél lévő belső szöge hegyesszög, tegyük fel, hogy $ACB\sphericalangle$ ilyen. Mivel C és X az AB egyenes ugyanazon oldalán van, az $AXB\sphericalangle$ irányított szög kisebb az $ACB\sphericalangle$ irányított szögnél, így az (AXB) kör sugara nagyobb, mint az (ACB) kör sugara (hiszen ugyanazon húrhoz tartozó kerületi szög szinusza kisebb), ellentmondás.



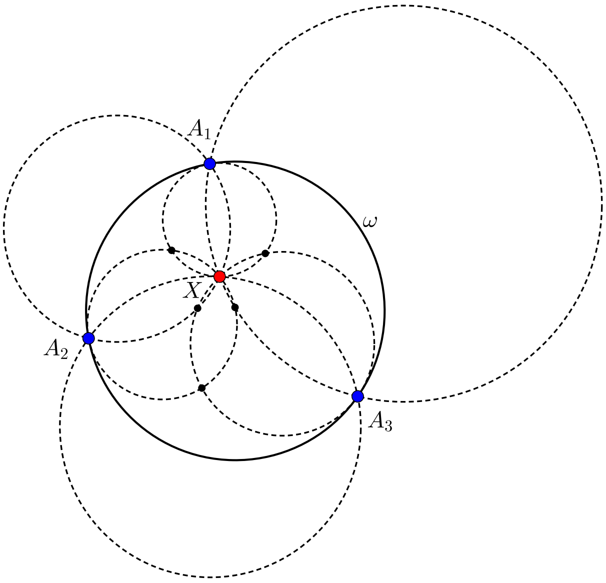
Most belátjuk, hogy ω-n nem lehet háromnál több P-beli pont. Tegyük fel indirekten, hogy $A, B, C, D \in \omega$ ebben a sorrendben (tehát $ABCD$ egy konvex négyszög). A feltevésünk szerint nem az összes pont ω-n van. Legyen Q egy pont a kör belsejében. Belátjuk, hogy feltehető, hogy $Q \neq AC \cap BD$. Ugyanis ez csak akkor nem feltételezhető, ha Q az egyetlen pont ω-ban és $Q = AC \cap BD$. Viszont ekkor a maradék 2023 pont mind a körön van, azaz bármelyik pontot a négy közül kicserélve egy ötödik pontra a körön biztosan nem teljesülhet, hogy Q az új négyszög átlóinak metszéspontja. Így létezik olyan Q pont ω-ban, ami nem az AC, BD egyenesek metszéspontja. Ekkor az $(ACQ), (BDQ)$ körök léteznek és van egy második $R \neq Q$ metszéspontjuk, hiszen nem érinthetik egymást, mert van közös belső pontjuk (például $AC \cap BD$).

ω definíciója miatt R is ω belsejében van. Az ω,(ACQ),(BDQ) köröknek a páronként vett hatványvonalai AC, BD, QR, így ezek konkurrensek a H hatványpontban. Viszont ha a QR egyenes ω-t a Q', R' pontokban metszi, akkor

$$HQ' \cdot HR' = HA \cdot HC = HQ \cdot HR < HQ' \cdot HR',$$

ami nem lehetséges. Ellentmondásra jutottunk.

Tehát ω-n pontosan három P-beli pont van, ezek legyenek A_1, A_2 és A_3. Legyen X egy (fix) belső pont és Y egy tetszőleges X-től különböző belső pont. Ekkor az (XYA_i) kör nem metszheti egy negyedik pontban ω-t (hiszen pontosan három pont van a körön). Erre két lehetőség létezik: vagy érinti az (XYA_i) kör ω-t vagy átmegy egy másik A_j ponton. Tekintsük az (A_iA_jX) köröket ($1 \leq i, j \leq 3$), ahol (A_iA_iX) az a kör, ami átmegy az A_i, X pontokon és érinti ω-t. Ezen hat körnek kevesebb, legfeljebb $\binom{6}{2}$ X-től különböző metszéspontja van ω belsejében (igazából csak öt lehet maximum), de minden belső Y pontnak egy ilyen metszéspontnak kell lennie. Ám 2020 darab Y pont van ω-ban, azaz ismét ellentmondásra jutottunk.



E+3. Dürerlandia szigetének legnépszerűbb vetélkedőjének, *A sziget árusának* döntőjébe a két világhírű lazacárus, Pali és Paca jutott be. Ahhoz, hogy később el tudják dönteni, hogy ki a jobb árus, először egy $2n$ tömegű lazacot szeretnének felosztani egymás között egyenlően (ahol n egy pozitív egész számot jelöl). Viszont erre a feladatra csak egy olyan gép áll rendelkezésre, amibe ha betesznek egy k tömegű lazacdarabot, akkor felvágja azt két, pozitív egész tömegű kisebb lazacdarabra, de előre nem lehet tudni, hogy mekkorákra (ahol k egy 1-nél nagyobb egész számot jelöl). Legalább hányszor kell használniuk a gépet ahhoz, hogy a vágások után keletkezett lazacdarabokat biztosan szét tudják osztani kettőjük között úgy, hogy mindketten összesen n tömegű lazachúst kapjanak?
A gép az azonos tömegű lazacdarabokat sem feltétlenül mindig ugyanúgy vágja fel. A vetélkedőn rendelkezésre áll egy mérleg, amivel minden vágás után lemérik a lazacdarabok tömegét.
Beke Csongor feladata

Megoldás: Azt állítjuk, hogy legalább n-szer kell használniuk a gépet, hogy biztosan ketté tudják osztani a lazacot. Először mutassuk meg, hogy van olyan eset amikor n lépés (géphasználat) szükséges. Ha a gép mindig 1 tömegű lazacot vág le a berakott darabból, akkor nincs döntésünk, hisz csak 1-es darabjaink és egy nagy darabunk van minden lépés után (és persze az 1-es darabokat nem tehetjük a gépbe), tehát n lépés szükséges, mert ekkor éri el a nagy darab mérete először n-et.

Most lássuk be, hogy n lépés mindig elég. Ehhez lépjük a következőket. Ameddig a legnagyobb darab tömege nagyobb, mint n, rakjunk a gépbe egy darabot, ami nem a legnagyobb, ha van ilyen (nem 1 tömegű), amennyiben már nincs ilyen, akkor rakjuk be a legnagyobbat. Akkor hagyjuk abba, ha az egyik lépésben a legnagyobbat vágjuk ketté, és két olyan darabra vágja a gép, aminek mindkettőnek legfeljebb n a tömege.

Ekkor végül egy darab k-s, egy darab l-es és még $2n-(k+l)$ darab 1-es darabunk lesz, ahol $k \leq n$, $l \leq n$ és $k+l > n$. Mivel minden lépésben pontosan 1-gyel nő a darabok száma, és eredetileg 1 volt, ezért $(2n-(k+l)+2-1)$-et léptünk, azaz legfeljebb n-et. Továbbá tényleg ketté tudják osztani megfelelően a lazacot, mivel egyikük el tudja vinni a k-s darabot, másikuk az l-eset, és mindketten kapnak még annyi 1-eset, hogy pont n tömegű lazac jusson nekik.

Második megoldás: Csak arra mutatunk példát, hogy n vágás elég. Képzeljük el a lazacot torta alakúnak, amin van $2n$ darab vonal a középpontjától a kerületére, amik mentén $2n$ egyenlő részre lehet vágni. Ekkor gondolhatunk úgy a feladatra, hogy a gép a következőt teszi. Az első vágásnál szétvágja a tortát két vonal mentén. Ezután ha berakunk egy nagyobb szelet tortát, akkor az egyik vonal mentén kettévágja. Ha n-szer használtuk a gépet, akkor $n+1$ vágás be lesz húzva. Ezek közül van 2, amik egymással szemköztiek, azaz csak ezt a 2 vágást figyelembe véve 2 darab n tömegű részre bontottuk fel a lazacot.

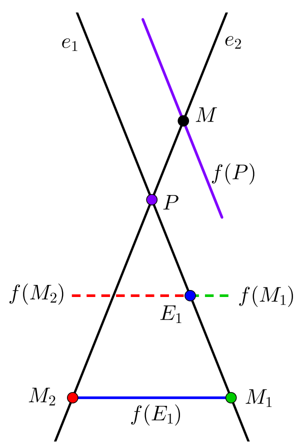
Harmadik megoldás: Megint csak a nehezebb irányra mutatunk új indoklást. Akárhogyan is vágunk n-et, a végén mindenképpen $n+1$ darabban lesz a lazac. Legyen a darabok mérete $a_1, a_2, \ldots a_{n+1}$, és tekintsük az $a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \ldots, a_1+a_2+\ldots+a_n$ számokat. Ez n szám, ha valamelyik osztható n-nel, akkor készen vagyunk, mert mindegyik szigorúan 0 és $2n$ közé esik. Ha nincs n-el osztható, akkor kell kettőnek lenni, legyenek ezek $a_1+a_2+\ldots+a_s$ és $a_1+a_2+\ldots+a_t$ $(s>t)$, amiknek ugyanannyi az n-el vett osztási maradéka. Ezeknek a különbsége, $a_{s+1}+a_{s+2}+\ldots+a_t$ osztható n-el, és szigorúan 0 és $2n$ közé esik, így ebben az esetben is szét tudjuk osztani a lazacot két egyenlő részre.

E+4. Jelölje $\mathcal{H}$ a sík egyeneseinek halmazát. A sík pontjain értelmezett $f : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{H}$ függvényt *polarizálónak* nevezzük, ha bármely $P, Q \in \mathbb{R}^2$ pontok esetén, ha $P \in f(Q)$, akkor $Q \in f(P)$.
a) Bizonyítsátok be, hogy nem létezik szürjektív polarizáló függvény.
b) Mutassatok példát injektív polarizáló függvényre.
c) Igazoljátok, hogy minden injektív polarizáló függvény esetén van olyan P pont a síkon, amelyre $P \in f(P)$.
Egy $f : A \to B$ függvény akkor szürjektív, ha minden $b \in B$ esetén létezik olyan $a \in A$, amelyre $f(a) = b$. Valamint f akkor injektív, ha bármely különböző $a_1, a_2 \in A$ esetén $f(a_1) \neq f(a_2)$.
Bán-Szabó Áron feladata

Megoldás: a) Indirekten tegyük fel, hogy f szürjektív polarizáló függvény. Vegyünk két párhuzamos egyenest, ezek legyenek l_1 és l_2. Ekkor vannak olyan (különböző) L_1, L_2 pontok, melyre $f(L_1) = l_1$ és $f(L_2) = l_2$. Ekkor viszont az L_1L_2 egyenesnek is van ősképe, legyen K ilyen pont (azaz $f(K) = L_1L_2$). A feltétel szerint mivel $L_1, L_2 \in f(K)$, $K \in f(L_1), f(L_2)$. Ám $f(L_1) \cap f(L_2) = l_1 \cap l_2 = \emptyset$, ami ellentmondás.

b) Legyen f az a függvény, ami az (a, b) ponthoz az $x = by - a$ egyenletű egyenest rendeli. Világos, hogy ez injektív, mutassuk meg, hogy polarizáló. Tegyük fel, hogy a (c, d) pont rajta van az $f((a, b))$ egyenesen, azaz $c = bd - a$. Ám ezt átrendezve $a = db - c$, ami éppen azt jelenti, hogy (a, b) rajta van a (c, d) ponthoz rendelt $x = dy - c$ egyenesen, ahogy akartuk.

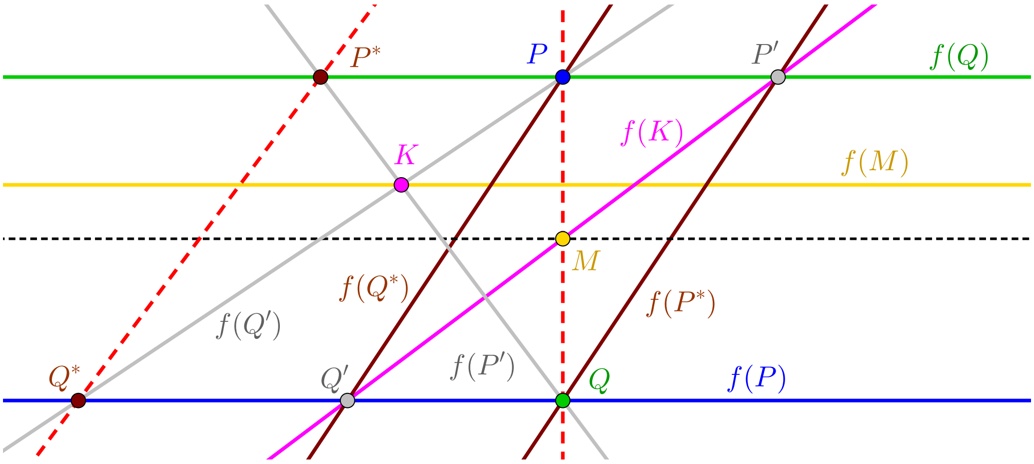
c) Indirekten tegyük fel, hogy nincs ilyen pont. A kulcs az lesz, hogy a szürjektivitással fogunk foglalkozni ugyanis, ahogy az ki fog derülni, f nem állhat messze tőle. Hívjunk egy egyenest *magányos-nak,* ha az egyenesnek nincs ősképe, azaz semelyik pontnak sem a képe. Ekkor bármely magányos e egyenes esetén ha $E_1, E_2 \in e$, akkor az $f(E_1), f(E_2)$ egyenesek nem metszhetik egymást. Ugyanis ha $M = f(E_1) \cap f(E_2)$ létezne, akkor a feltétel miatt $E_1, E_2 \in f(M)$, azaz $f(M) = e$. Tehát egy magányos egyenes pontjainak képei különböző (az injektivitás miatt), egymással párhuzamos egyenesek.



Most tekintsünk egy P pontot és a hozzá tartozó $\mathcal{S}$ sugársort (ami a P-n átmenő egyenesek halmaza). Belátjuk, hogy legfeljebb egy $\mathcal{S}$-beli magányos egyenes létezik. Indirekten tegyük fel, hogy az e_1, e_2 egyenesek ilyenek. Ekkor minden e_1-beli pont képe egy $\mathbf{u}_1$ irányú egyenes, míg minden e_2-beli pont képe egy $\mathbf{u}_2$ irányú egyenes. Ám $P \in e_1, e_2$, azaz $\mathbf{u}_1 \parallel \mathbf{u}_2 \parallel f(P)$. Tegyük fel, hogy $e_1 \parallel f(P)$. Ekkor persze $e_2 \nparallel f(P)$, így létezik az $M = e_2 \cap f(P)$ metszéspont. Mivel $M \in f(P)$, $P \in f(M)$. Ám $M \in e_2$ miatt $f(M) \parallel f(P)$, azaz $f(M) = e_1$. Ez viszont ellentmond annak, hogy e_1 magányos. Tehát e_1 sem és e_2 sem párhuzamos $f(P)$-vel. Legyen $E_1 \in e_1$ olyan pont, melyre $P \notin f(E_1)$ (ilyen van az injektivitás és a párhuzamosság miatt). Ekkor az $M_1 = f(E_1) \cap e_1$, $M_2 = f(E_1) \cap e_2$ pontok léteznek, és különbözőek. Viszont ez a két metszéspont rajta van $f(E_1)$-en, azaz a feltétel miatt $E_1 \in f(M_1), f(M_2)$. Ám ez a két egyenes mind párhuzamos $f(P)$-vel, de csak egy E_1-en átmenő $f(P)$-vel párhuzamos egyenes létezik, azaz $f(M_1) = f(M_2)$, de ez ellentmond az injektivitásnak.

Így valóban nagyon közel lesz f a szürjektivitáshoz: minden P ponthoz tartozó sugársorban legfeljebb egy magányos egyenes van. Most belátjuk, hogy minden pont sugársorában van magányos egyenes. Ugyanis ha a P pont nem ilyen lenne, akkor a P-n átmenő $f(P)$-vel párhuzamos ($f(P)$-től különböző) egyenesnek is lenne Q ősképe. De ekkor a feltétel szerint Q rajta lenne $f(P)$-n, és ekkor a PQ egyenes sem lenne magányos, hiszen átmegy P-n, viszont az ősképének rajta kéne lennie egyszerre $f(P)$-n és $f(Q)$-n, ám ezek párhuzamosak.

Tehát minden sugársorban pontosan egy magányos egyenes van. Vegyük észre még, hogy ekkor a magányos egyenesek egymással párhuzamosak, hiszen ha kettő metszené egymást, akkor a metszéspontthoz tartozó sugársor két magányos egyenest is tartalmazna. Vegyünk egy tetszőleges P pontot és tekintsük a P-n átmenő, $f(P)$-vel párhuzamos egyenest (ami az indirekt feltevés miatt $f(P)$-től különbözik). Ez az egyenes nem lehet magányos, hiszen különben egy tetszőleges $Q \in f(P)$ pontra a Q-hoz tartozó magányos egyenes $f(P)$-vel párhuzamos lenne, azaz megegyezne az $f(P)$ egyenessel, így az mégsem magányos. Tehát van olyan Q pont, amelyre $f(Q)$ a P-n átmenő $f(P)$-vel párhuzamos egyenes. És ahogy az előbb láttuk, a PQ egyenes magányos kell, hogy legyen.



Így a magányos egyenesek párhuzamosak PQ-val. Belátjuk, hogy a PQ szakasz M felezőpontján átmegy $f(M)$. Persze $f(M) \parallel f(P), f(Q)$, hiszen a $P - M - Q$ egyenes magányos. Vegyünk az $f(M)$ egyenesen egy olyan K pontot, ami nincs rajta a PQ egyenesen. Ekkor az $f(K)$ egyenes átmegy M-en, és elmetszi az $f(P), f(Q)$ egyeneseket rendre a Q', P' pontokban, hiszen az M-en átmenő $f(P), f(Q)$ egyenesekkel párhuzamos egyenesnek már van - K-tól különböző - ősképe, ez pedig $f(M) \cap PQ$ (emlékezve arra, hogy a PQ magányos egyenes pontjainak képei $f(P), f(Q)$-val párhuzamos egyenesek). M felezőpont, így a $PP'QQ'$ négyszög paralelogramma. Legyen $Q^* = PK \cap f(P)$ és $P^* = QK \cap f(Q)$. Vegyük észre, hogy az $f(P')$ éppen a Q, K pontokon átmenő egyenes lesz a feltétel miatt, így $f(P^*)$ a P', Q pontokon átmenő egyenes lesz. Hasonlóan belátható, hogy $f(Q^*)$ a P, Q' pontokon átmenő egyenes. Viszont $P'Q \parallel PQ'$, így a P^*Q^* egyenesnek magányosnak kell lennie, hiszen ellenkező esetben az ősképe rajta lenne mindkét egyenesen (ami nem lehet, mert párhuzamosak). Tehát $P^*Q^* \parallel PQ$, azaz K, az átlók metszéspontja, rajta lesz az M-en átmenő $f(P), f(Q), f(M)$ irányokkal párhuzamos egyenesen (középvonalon). Tehát $M \in f(M)$. Ellentmondás.

E+5. Legyen p egy rögzített prímszám.
a) Hány olyan (a_1, a_2, a_3) rendezett számhármas van, amelynek tagjai p-nél kisebb nemnegatív egész számok, továbbá $p \mid a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$?
b) Legyen k egy rögzített páratlan pozitív egész szám. Hány olyan $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ rendezett szám-k-as van, amelynek tagjai p-nél kisebb nemnegatív egész számok, továbbá $p \mid a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2$?
Beke Csongor feladata

Megoldás: Az **a)** részre adható olyan megoldás is, ami nem működik a **b)** részre, de mi most csak olyan megoldást mutatunk, ami mindkettőt megoldja. Az egyenleteket végig modulo p fogjuk írni. Azt fogjuk belátni, hogy p^{k-1} ilyen rendezett szám-k-as létezik. Ez kis esetek vizsgálatával egyszerűen megsejthető.

A $p = 2$ eset egyszerű, ekkor az első $k-1$ tagot tetszőlegesen megválaszthatjuk, és minden esetben a_k-t egyféleképpen tudjuk úgy választani, hogy $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ megoldás legyen, azaz tényleg 2^{k-1} megoldás lesz. Mostantól feltesszük, hogy p egy páratlan prím.

Az ötlet az, hogy tekintjük az összes $(a_1, a_2, ..., a_{k-1})$ sorozatot, és ezekhez vizsgáljuk, hogy mennyi megfelelő a_k van.

Észrevételek:

- Ismert, hogy ha q nemnulla kvadratikus maradékosztály mod p, akkor pontosan két olyan szám van, c és $-c$, amikre $c^2 = (-c)^2 = q$. Azaz, ha $(a_1, ..., a_{k-1})$-re létezik nemnulla a_k, ami kielégíti az egyenletet, akkor pontosan két ilyen a_k létezik, melyek egymás -1-szeresei mod p. Ez éppen akkor van, ha $p - \sum_{i=1}^{k-1} a_i^2$ nemnulla kvadratikus maradék. Ha $p - \sum_{i=1}^{k-1} a_i^2$ kvadratikus nemmaradék, akkor nincs megfelelő a_k, és ha $p - \sum_{i=1}^{k-1} a_i^2 = 0$ mod p, akkor pedig pontosan egy, az $a_k = 0$ a megoldás.
- Az is ismert, hogy ha l egy kvadratikus nemmaradék mod p, akkor tetszőleges $p \nmid k$ esetén k és $l \cdot k$ közül pontosan egy kvadratikus maradék van.

Keressünk egy ϕ bijekciót, aminek alaphalmaza és képhalmaza is

$$S = \{(a_1, a_2, ..., a_{k-1}) \mid \forall i \ : \ a_i \in \{0, 1, ..., p-1\}\}$$

melyre az teljesül, hogy minden $\mathbf{x} \in S$ esetén $\mathbf{x}$ és $\phi(\mathbf{x})$ közül vagy mindkettőre az elemek négyzetösszege 0, azaz mindkettőre pontosan 1 megfelelő a_k van, vagy pontosan az egyikre létetik megfelelő a_k, ami kielégíti az egyenletet, de arra 2. Ekkor a létező p^{k-1} darab $(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}))$ pár mindegyikéből összesen 2 megoldás adódik. Így minden megoldást kétszer számoltunk, azaz összesen p^{k-1} megoldást kapunk.

Világos, hogy létezik olyan l kvadratikus nemmaradékosztály, amire $l-1$ kvadratikus maradékosztály. Legyen n egy olyan szám, melyre $n^2 = l-1$. Az $l = 1$ nem megfelelő, így $n \neq 0$.

Most megadjuk a bijekciót.

$$\phi : S \to S$$

$$\phi\left((a_1, a_2, ..., a_{k-1})\right) = (na_1 + a_2, a_1 - na_2, na_3 + a_4, a_3 - na_4, ..., na_{k-2} + a_{k-1}, a_{k-2} - na_{k-1})$$

azaz ha $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_{k-1})$ és $\phi(\mathbf{a}) = \mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_{k-1})$ akkor $b_{2i+1} = na_{2i+1} + a_{2i+2}$ és $b_{2i+2} = a_{2i+1} - na_{2i+2}$.

Először mutassuk meg, hogy ez tényleg $S \to S$ bijekció. Ehhez azt kell látni, hogy tetszőleges $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots b_{k-1}) \in S$ elemhez pontosan egy olyan $\mathbf{a} \in S$ van, melyre $\phi(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$. Ehhez pedig azt kell látni, hogy egyféleképpen tudunk a_{2i+1}, a_{2i+2} számokat választani, hogy $b_{2i+1} = na_{2i+1} + a_{2i+2}$ és $b_{2i+2} = a_{2i+1} - na_{2i+2}$. Ezt elég $i = 0$ esetén megmutatni, a többire ugyanúgy igaz. Összeadva az első egynelet n-szeresét és a második egyenletet, $nb_1 + b_2 = (n^2+1)a_1 = la_1$, azaz csak az $a_1 = \frac{nb_1 + b_2}{l}$ választás lehetséges. Ez alapján csak $a_2 = b_1 - na_1$ lehet. Ez tényleg megoldás, így tényleg egyértelmű a megoldás, azaz ϕ bijekció.

Ekkor

$$(na_{2i+1}+a_{2i+2})^2+(a_{2i+1}-na_{2i+2})^2=$$
$$=n^2a_{2i+1}^2+2na_{2i+1}a_{2i+2}+a_{2i+2}^2+a_{2i+1}^2-2na_{2i+1}a_{2i+2}+n^2a_{2i+2}^2=$$
$$=(n^2+1)(a_{2i+1}^2+a_{2i+2}^2)=l(a_{2i+1}^2+a_{2i+2}^2),$$

azaz $\sum_{i=1}^{k-1} b_i^2 = l\sum_{i=1}^{k-1} a_i^2$. Ebből kapjuk, hogy $p-\sum_{i=1}^{k-1} b_i^2 = l\left(p-\sum_{i=1}^{k-1} a_i^2\right)$, így vagy mindkettő nulla, vagy (a negyedik észrevétel alapján) pontosan egy kvadratikus maradékosztály, ebben 2, a másikban 0 helyes a_k-t találunk. Azaz ez a bijekció számunkra megfelelő, így az eddigiek alapján pontosan p^{k-1} megoldása van az egyenletnek.

E+6. **Játék:** Egy pozitív egész n esetén adott egy $1 \times n$-es tábla, ahol a szomszédos mezőket $n-1$ *elválasztó él* határolja el egymástól, melyeken kezdetben nincs gyufa. Egy $0 < k < n$ méretű lépés során egy játékos kiválaszt egy $1 \times k$-as résztáblát, mely a belsejében nem tartalmaz gyufát, és a résztáblát határoló gyufa nélküli elválasztó élekre rárak egyet-egyet. A lépés akkor szabályos, ha a határoló elválasztó élek közül legalább az egyiken még nem volt gyufa, továbbá vagy $k = 1$, vagy k osztható 4-gyel. Két játékos felváltva lép, a soron következő játékosnak a legnagyobb $0 < k < n$ méretű szabályos lépései közül kell meglépnie az egyiket. A játéknak akkor van vége, ha valaki nem tud szabályosan lépni, aki ezzel veszít.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! A szervezők először meghatározzák n értékét, ezután Ti dönthetitek el, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.
Németh Márton feladata

Megoldás: Válasz: Második nyer, ha $n = 7$, vagy $n = 8m + 1$ vagy $n = 8m + 4$.

Vegyük észre, hogy a legnagyobb k, amire létezik k nagyságú szabályos lépés, az először $4 \cdot \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor$, majd minden lépésben 4-gyel csökken, és a soron következő játékos mindig az előző játékos által kijelölt résztáblán belül kénytelen új résztáblát kijelölni. Ez egészen addig megy, amíg az egyik játákos $k = 4$-gyel lép, és ezek után minkét játékos csak $k = 1$ méretű lépéseket tud végrehajtani. Így a játék két fázista osztható.

Az első fázisban, amíg $k > 1$ méretűeket lépnek a játékosok, csak az számít, hogy mekkora részintervellumokat hagynak maguk után. Minden lépésben a soron következő játékos dönthet, hogy egy 4 hosszút hagy, egy 3 és egy 1 hosszút (ebben az esetben az 1 hosszú részről megfeledkezhetünk), vagy két kettő hosszút. Az első fázis utolsó lépésében keletkezik plusz egy 4 hosszú intervallum.

A második fázisban pedig a $k = 1$-es lépések segítségével tüntetik el az intervallumokat. Egy 4-es intervallumból vagy lehet egy 1-est és egy 3-ast, vagy két 1-es és egy 2-est csinálni. Egy 3-asból vagy egy 1-est és egy 2-est vagy három darab 1-est. Végül egy 2-eset két 1-esre lehet vágni, és az 1-eseket már nem lehet tovább bontani. Ezek alapján a játékot át lehet fogalmazni

Átfogalmazás: Egy táblára kezdetben a 4-es szám van írva. Két játékos felváltva ír új számokat a táblára, minden lépésben vagy egy 4-est, vagy egy 3-ast, vagy két darab 2-est, kivéve az első lépés során, amikor első a felírt számokat az S halmazból választhatja, ahol S fix, és n négyes maradékától függ (lejebb le vannak írva az esetek). Összesen d ilyen lépés után a játékosok már csak újfajta lépéseket csinálhatnak:
-Egy 4-est letörölni, és egy 3-est felírni, vagy
-Egy 4-est letörölni, és egy 2-est felírni, vagy
-Egy 3-ast letörölni, és egy 2-est felírni, vagy
-Egy 3-est letörölni, vagy
-Egy 2-est letörölni.
Aki nem tud lépni, veszít.

Állítás: Ez az új játék ekvivalens az eredetivel, a következő parametrizációval:
-Ha $n = 4m + 1$, akkor $S = \{\emptyset\}$,
-Ha $n = 4m + 2$, akkor $S = \{\emptyset, \{2\}\}$,
-Ha $n = 4m + 3$, akkor $S = \{\{3\}, \{2\}\}$,
-Ha $n = 4m + 4$, akkor $S = \{\{4\}, \{3\}, \{2, 2\}\}$. Legyen továbbá

$$d = \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor.$$

A fent leírtak alapján látható, hogy ez a játék tényleg ekvivalens az eredetivel, így mostantól ezt oldjuk meg.

Az új játékban is nevezzük második fázisnak azt, amikor már csak számot lehet törölni, vagy kicserélni. Jelölje ekkor az (x, y, z) állapot azt, amikor x darab 4-es, y darab 3-as és z darab 2-es maradt. Ekkor $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ mindig teljesül. Ilyenkor a szabályos lépések:

$$(x, y, z) \to (x-1, y+1, z)$$
$$(x, y, z) \to (x-1, y, z+1)$$
$$(x, y, z) \to (x, y-1, z+1)$$
$$(x, y, z) \to (x, y-1, z)$$
$$(x, y, z) \to (x, y, z-1)$$

Legyen a második fázisban a kezdőállapot (x_0, y_0, z_0).

Állítás: A második fázisból második játékos nyer, ha y_0 és z_0 páros, különben a második fázisból kezdő nyer.

Ezt könnyű látni, hiszen: legyen nyerő állás az, ahol y és z páros. Ha kezdő nem nyerő állásból kezd, akkor egy lépéssel olyanba tud jutni, mivel választhat, hogy y, z vagy mindkettő paritását változtassa. Nyerő állásból nem lehet nyerő állásba jutni, mivel minden szabályos lépés változtatja vagy y, vagy z paritását.

Most térjünk rá arra, hogy ezek alapján hogyan kell játszani az első fázisban. Válasszuk külön azt a két esetet, amikor d páros, és amikor páratlan.

Páros d: Megmutatjuk, hogy $n = 4m + 2$ vagy $n = 4m + 3$ esetén kezdő nyer, különben második. Vegyük észre, hogy a második fázisban ugyanaz fog kezdeni, mint az első fáziban, vagyis kezdő célja, hogy y_0 és z_0 közül valamelyik páratlan legyen.
-$n = 4m + 1$: Kezdő kénytelen semmit felírni. Második írjon fel egy 4-est, és innentől mindig lépje ugyanazt, mint kezdő.
-$n = 4m + 2$ vagy $n = 4m + 3$: Kezdő írjon fel egy 2-est. A 2-esek paritásának száma nem változik, páratlan marad, így első nyer.
-$n = 4m + 4$: Itt kezdő nem tud felírni egy 2-est, lépése után második mindig csinálja ugyanazt, mint kezdő.

Páratlan d: Megmutatjuk, hogy mindig kezdő nyer, ha $n \neq 7$. Vegyük észre, hogy a második fázisban második fog kezdeni, vagyis kezdő célja, hogy y_0 és z_0 közül mindkettő páros legyen.
-$n = 4m + 1$: Kezdő kénytelen semmit felírni. Ezután mindig csinálja ugyanazt, mint második (kezdő lép utoljára).
-$n = 4m + 2$: Kezdő ne írjon fel semmit. A 2-esek száma páros marad, az utolsó lépésvel elérheti, hogy a 3-asok száma is páros legyen.
-$n = 4m+3$ vagy $n = 4m+4$: Kezdő írjon fel egy 3-ast. A 2-esek száma páros marad, az utolsó lépésvel elérheti, hogy a 3-asok száma is páros legyen. Ez azonban a $d = 1$ esetben nem működik. Ha $n = 8$, akkor két 2-es felírásával nyer a kezdő, de $n = 7$ esetén veszít.