Elméleti feladatok

1. feladat

Először érdemes kis mértékben átalakítani a feladatsor elméleti bevezetőjében megadott formulát a λ paraméterre vonatkozóan:

$$2\lambda = 1 + \frac{r^2}{R^2} \tag{1}$$

A fenti képletet átrendezve könnyedén kifejezhető a keresett r sugár:

$$r = R\sqrt{2\lambda - 1}\,. \tag{2}$$

2. feladat

A minta tisztán gördülő mozgásának leírásához elsőként szükség van a tömegközéppontra vonatkozó mozgásegyenlet lejtőirányú komponensére. Ennek alakja:

$$Ma = Mg\sin\alpha - S, \tag{3}$$

ahol a a test gyorsulása, S pedig a tapadási súrlódási erő. Emellett érvényes a tömegközéppontra vonatkozó forgásegyenlet is:

$$\Theta\beta = RS, \tag{4}$$

ahol β a test szöggyorsulása. Végül, mivel a minta mindvégig tisztán gördül, az alábbi kényszerfeltétel is teljesül:

$$a = R\beta. \tag{5}$$

Az (3), (4) és (5) egyenleteket összevetve az a gyorsulásra a következőt kapjuk:

$$a = g\sin\alpha - \frac{\Theta a}{MR^2}. \tag{6}$$

A második tagban megjelenik a feladatsorban definiált λ dimenziótlan paraméter. Ennek felhasználásával a végeredmény:

$$a = \frac{g}{1+\lambda}\sin\alpha\,. \tag{7}$$

Mérési feladatok

3. feladat

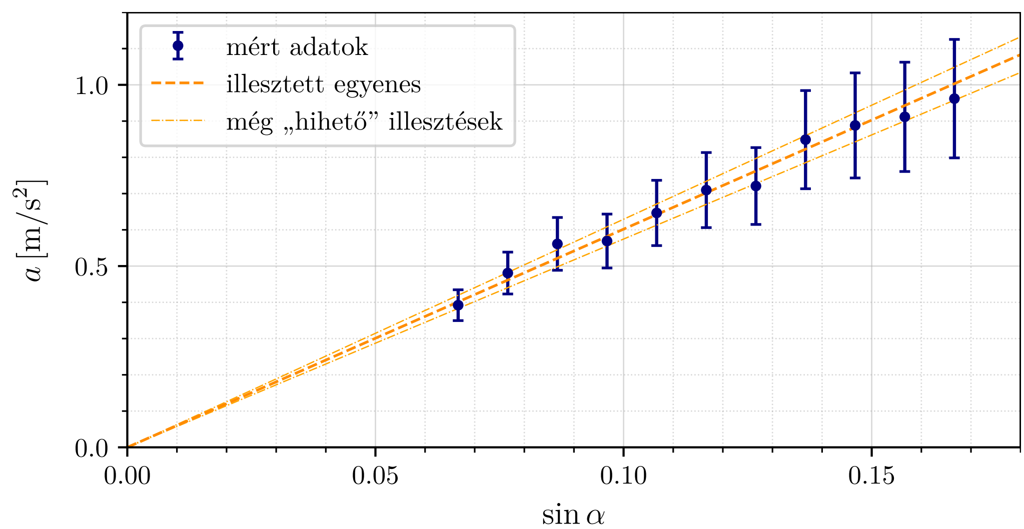
A rendelkezésre álló vonalzóval megmérve a minta külső átmérőjét, megkapható belőle a keresett sugár. Ennek értéke a következő: $R = [3{,}60 \pm 0{,}05]$ cm.

4. feladat

A lejtő magasságát 1,5 cm-es közökkel változtattuk, mindegyik meredekség esetén ötször mérve a gurulás idejét. A mért adatokat átlagoltuk, és ebből a t átlagból számoltuk ki a gyorsulást az $a = 2s/t^2$ összefüggés segítségével, ahol felhasználtuk, hogy a minta egyenletesen gyorsul. A hajlásszög szinuszát a szögfüggvény definíciója szerint a $\sin\alpha = h/s$ képlettel kaptuk. Az eredményeket az 1. táblázat, a kiszámolt $a - \sin\alpha$ adatpárokat az 1. ábra mutatja.

h [m]	t_1 [s]	t_2 [s]	t_3 [s]	t_4 [s]	t_5 [s]	t [s]	$\sin\alpha$	a [m/s^2]
0,100	2,74	2,72	2,81	2,72	2,84	2,78	0,0667	0,392
0,115	2,50	2,53	2,46	2,50	2,50	2,50	0,0767	0,481
0,130	2,25	2,25	2,39	2,37	2,30	2,31	0,0867	0,561
0,145	2,34	2,25	2,25	2,28	2,36	2,30	0,0967	0,569
0,160	2,08	2,13	2,20	2,16	2,20	2,15	0,1067	0,647
0,175	2,08	2,06	2,06	2,09	1,99	2,06	0,1167	0,710
0,190	2,16	2,03	2,03	2,00	1,98	2,04	0,1267	0,721
0,205	1,86	1,84	1,84	1,95	1,91	1,88	0,1367	0,849
0,220	1,86	1,84	1,87	1,81	1,81	1,84	0,1467	0,888
0,235	1,86	1,75	1,78	1,79	1,89	1,81	0,1567	0,912
0,250	1,77	1,72	1,77	1,75	1,82	1,77	0,1667	0,962

1. táblázat. A mért adatok, illetve az ezekből származtatott mennyiségek.



1. ábra. A gyorsulás a lejtő hajlásszögének szinusza függvényében és az illesztett egyenesek.

5. feladat

A mérés során kétféle mennyiséget mérünk: a lejtő magasságát és a gurulás idejét.

A magasságmérés hibája egyszerűen a vonalzó leolvasásából fakadhat, ezt $\Delta h = 1$ mm-nek tekintjük. A hajlásszög értékében ez $\Delta(\sin\alpha) = \Delta h/s = 0{,}0007$ bizonytalanságot jelent, ami több, mint két nagyságrenddel kisebb az összes mért értéknél, tehát a magasságmérés hibájának hatásától elég nagy biztonsággal eltekinthetünk.

Az időmérés hibája már számottevőbb. Bár a többszöri mérés biztosítja azt, hogy az átlag a valódi érték körül legyen, még nagyon nagy számú mérés esetén sem lehetünk biztosak abban, hogy ennek pontos értéke jobban megközelíti a valós értéket, mint amennyi a stopper elindításának és leállításának bizonytalansága. Azt, hogy a megfigyelt eseménnyel együtt megnyomjuk a stopper gombját, a stoppert kezelő ember reakcióideje korlátozza, ami nagyjából 1-2 tizedmásodperc, tehát az időmérés hibája nem lehet kisebb, mint $\Delta t \approx 0{,}15$ s. Ezzel a konstans értékkel akár egyesével is kiszámolhatjuk minden gyorsulásérték hibáját (ahogy az 1. ábrán csináltuk), de egy egyszerű nagyságrendi becslés tehető, ha megvizsgáljuk azt az esetet, amikor ennek hatása a legjelentősebb, vagyis amikor a mért idő a legrövidebb. A legnagyobb magasságnál az idők átlaga $t = 1{,}77$ s, amely a bizonytalanság miatt valójában azt jelenti, hogy t valahova 1,62 s és 1,92 s közé esik, tehát a gyorsulásértéknek valahova 0,81 m/s^2 és 1,14 m/s^2 közé kell esnie, vagyis a gyorsulás bizonytalansága körülbelül $\Delta a \approx 0{,}17$ m/s^2.

6. feladat

A (7) egyenlet alapján azt várjuk, hogy a és $\sin\alpha$ mennyiségek között egyenes arányosság van, ezért a mért adatokra egy origót metsző egyenest illesztünk, amelyet az 1. ábrán ábrázoltunk. Az illesztett egyenes meredeksége $m = 6{,}02\,\mathrm{m/s^2}$. Ebből a (7) egyenlet alapján $\lambda = g/m - 1 = 0{,}630$, és a (2) összefüggésből $r = R\sqrt{2\lambda - 1} = 1{,}84\,\mathrm{cm}$.

Az 1. ábrán illesztett két segédegyenes meredeksége $m_1 = 5{,}75\,\mathrm{m/s^2}$ és $m_2 = 6{,}29\,\mathrm{m/s^2}$. Ebből $\lambda_1 = 0{,}706$ és $\lambda_2 = 0{,}560$, ahonnan $r_1 = 2{,}31$ cm és $r_2 = 1{,}25$ cm. A belső sugár mérésének eredménye tehát

$$\boxed{r = [1{,}84 \pm 0{,}53]\ \mathrm{cm}}\,. \tag{8}$$