Elméleti feladatok

1. feladat

A feladatban tárgyalt M tömegű, R külső és r belső sugarú test tehetetlenségi nyomatéka az addíciós tétel értelmében kiszámítható, mint vele azonos sűrűségű R, illetve r sugarú testek tehetetlenségi nyomatékainak különbsége. Ezt a szuperpozíciós elven alapuló megközelítést szemlélteti az 1. ábra. A nagyobb, R sugarú korong tömege ekkor:

$$M_1 = \frac{MR^2}{R^2 - r^2}, \tag{1}$$

szimmetriatengelyére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka pedig ebből következően:

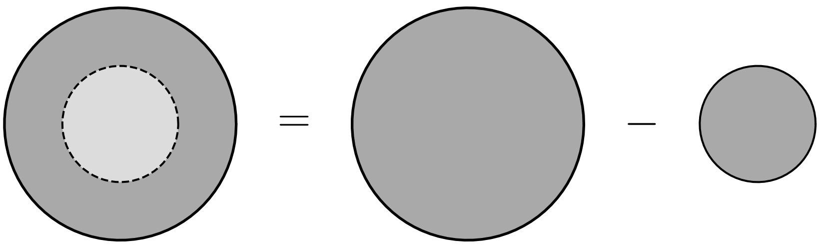
$$\Theta_1 = \frac{1}{2} M_1 R^2 = \frac{MR^4}{2(R^2 - r^2)}. \tag{2}$$

Hasonlóan a kisebb korong esetén a tömeg:

$$M_2 = \frac{Mr^2}{R^2 - r^2}, \tag{3}$$

míg a tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_2 = \frac{1}{2} M_2 r^2 = \frac{Mr^4}{2(R^2 - r^2)}. \tag{4}$$



1. ábra. Tehetetlenségi nyomaték kiszámítása a szuperpozíció elve alapján.

A (2) és (4) egyenletek felhasználásával az üreges minta tehetetlenségi nyomatéka immár kiszámítható. Némi egyszerűsítést követően az alábbi formulára jutunk:

$$\Theta = \Theta_1 - \Theta_2 = \frac{M}{2} \frac{R^4 - r^4}{R^2 - r^2} = \frac{M}{2}(R^2 + r^2). \tag{5}$$

Ezt a feladatban felírt alakkal összevetve adódik a végeredmény:

$$\lambda = \frac{R^2 + r^2}{2R^2}. \tag{6}$$

A fenti képletből könnyedén kifejezhető a r sugár is:

$$r = R\sqrt{2\lambda - 1}. \tag{7}$$

2. feladat

A minta tisztán gördülő mozgásának leírásához elsőként szükség van a tömegközéppontra vonatkozó mozgásegyenlet lejtőirányú komponensére. Ennek alakja:

$$Ma = Mg\sin\alpha - S, \tag{8}$$

ahol a a test gyorsulása, S pedig a tapadási súrlódási erő. Emellett érvényes a tömegközéppontra vonatkozó forgásegyenlet is:

$$\Theta\beta = RS, \tag{9}$$

ahol β a test szöggyorsulása. Végül, mivel a minta mindvégig tisztán gördül, az alábbi kényszerfeltétel is teljesül:

$$a = R\beta. \tag{10}$$

Az (8), (9) és (10) egyenleteket összevetve az a gyorsulásra a következőt kapjuk:

$$a = g\sin\alpha - \frac{\Theta a}{MR^2}. \tag{11}$$

A második tagban megjelenik a feladatsorban definiált λ dimenziótlan paraméter. Ennek felhasználásával a végeredmény:

$$a = \frac{g}{1+\lambda}\sin\alpha\,. \tag{12}$$

Mérési feladatok

3. feladat

A rendelkezésre álló vonalzóval megmérve a minta külső átmérőjét, megkapható belőle a keresett sugár. Ennek értéke a következő: $R = [3{,}60 \pm 0{,}05]\,\mathrm{cm}$.

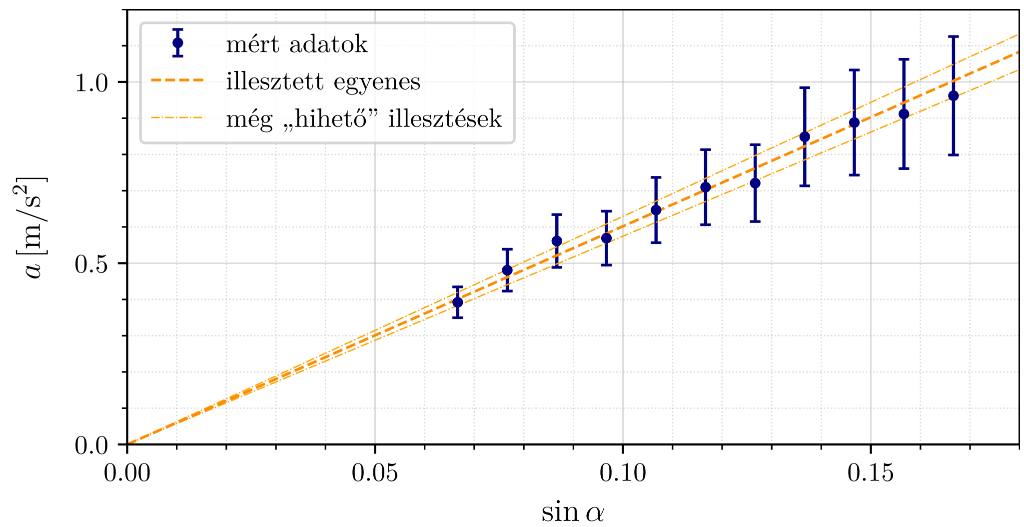
4. feladat

A lejtő magasságát 1,5 cm-es közökkel változtattuk, mindegyik meredekség esetén ötször mérve a gurulás idejét. A mért adatokat átlagoltuk, és ebből a t átlagból számoltuk ki a gyorsulást az $a = 2s/t^2$ összefüggés segítségével, ahol felhasználtuk, hogy a minta egyenletesen gyorsul. A kapott eredményeket az 1. táblázat tartalmazza. Mivel a (12) egyenlet alapján a gyorsulás egyenesen arányos a hajlásszög szinuszával, utóbbit is kiszámoltuk a $\sin\alpha = h/s$ képlettel, majd ezt a két mennyiséget ábrázoltuk az 2. ábrán.

Mivel a (7) egyenlet alapján azt várjuk, hogy a és $\sin\alpha$ mennyiségek között egyenes arányosság van, ezért a mért adatokra egy origót metsző egyenest illesztünk, amelyet az 2. ábrán ábrázoltunk. Látható, hogy kényelmesen található olyan egyenes, amely mindegy adatpont hibatartományán áthalad, és az adatpontok elég jól követik ennek a trendjét, tehát az illeszkedés elég jónak mondható.

h [m]	t_1 [s]	t_2 [s]	t_3 [s]	t_4 [s]	t_5 [s]	t [s]	$\sin\alpha$	a [m/s^2]
0,100	2,74	2,72	2,81	2,72	2,84	2,78	0,0667	0,392
0,115	2,50	2,53	2,46	2,50	2,50	2,50	0,0767	0,481
0,130	2,25	2,25	2,39	2,37	2,30	2,31	0,0867	0,561
0,145	2,34	2,25	2,25	2,28	2,36	2,30	0,0967	0,569
0,160	2,08	2,13	2,20	2,16	2,20	2,15	0,1067	0,647
0,175	2,08	2,06	2,06	2,09	1,99	2,06	0,1167	0,710
0,190	2,16	2,03	2,03	2,00	1,98	2,04	0,1267	0,721
0,205	1,86	1,84	1,84	1,95	1,91	1,88	0,1367	0,849
0,220	1,86	1,84	1,87	1,81	1,81	1,84	0,1467	0,888
0,235	1,86	1,75	1,78	1,79	1,89	1,81	0,1567	0,912
0,250	1,77	1,72	1,77	1,75	1,82	1,77	0,1667	0,962

1. táblázat. A mért adatok, illetve az ezekből származtatott mennyiségek.



2. ábra. A gyorsulás a lejtő hajlásszögének szinusza függvényében és az illesztett egyenesek.

5. feladat

A mérés során kétféle mennyiséget mérünk: a lejtő magasságát és a gurulás idejét.

A magasságmérés hibája egyszerűen a vonalzó leolvasásából fakadhat, ezt $\Delta h = 1$ mm-nek tekintjük. A hajlásszög értékében ez $\Delta(\sin\alpha) = \Delta h/s = 0{,}0007$ bizonytalanságot jelent, ami több, mint két nagyságrenddel kisebb az összes mért értéknél, tehát a magasságmérés hibájának hatásától elég nagy biztonsággal eltekinthetünk.

Az időmérés hibája már számottevőbb. Bár a többszöri mérés biztosítja azt, hogy az átlag a valódi érték körül legyen, még nagyon nagy számú mérés esetén sem lehetünk biztosak abban, hogy ennek pontos értéke jobban megközelíti a valós értéket, mint amennyi a stopper elindításának és leállításának bizonytalansága. Azt, hogy a megfigyelt eseménnyel együtt megnyomjuk a stopper gombját, a stoppert kezelő ember reakcióideje korlátozza, ami nagyjából 1-2 tizedmásodperc, tehát az időmérés hibája nem lehet kisebb, mint $\Delta t \approx 0{,}15$ s. Ezzel a konstans értékkel akár egyesével is kiszámolhatjuk minden gyorsulásérték hibáját (ahogy a 2. ábrán csináltuk), de egy egyszerű nagyságrendi becslés tehető, ha megvizsgáljuk azt az esetet, amikor ennek hatása a legjelentősebb, vagyis amikor a mért idő a legrövidebb. A legnagyobb magasságnál az idők átlaga $t = 1{,}77$ s, amely a bizonytalanság miatt valójában azt jelenti, hogy t valahova 1,62 s és 1,92 s közé esik, tehát a gyorsulásértéknek valahova 0,81 $\mathrm{m/s^2}$ és 1,14 $\mathrm{m/s^2}$ közé kell esnie, vagyis a gyorsulás bizonytalansága körülbelül $\Delta a \approx 0{,}17\ \mathrm{m/s^2}$.

6. feladat

A 2. ábrán illesztett egyenes meredeksége $m = 6{,}02\,\mathrm{m/s^2}$. Ebből a (7) egyenlet alapján $\lambda = g/m - 1 = 0{,}630$, és a (2) összefüggésből $r = R\sqrt{2\lambda - 1} = 1{,}84\,\mathrm{cm}$.

Az 2. ábrán illesztett két segédegyenes meredeksége $m_1 = 5{,}75\,\mathrm{m/s^2}$ és $m_2 = 6{,}29\,\mathrm{m/s^2}$. Ebből $\lambda_1 = 0{,}706$ és $\lambda_2 = 0{,}560$, ahonnan $r_1 = 2{,}31$ cm és $r_2 = 1{,}25$ cm. A belső sugár mérésének eredménye tehát

$$\boxed{r = [1{,}84 \pm 0{,}53]\ \mathrm{cm}}\,. \tag{13}$$