



XVII. DÜRER  
VERSENY

K, K+, L  
KATEGÓRIA

DÖNTŐ – 2024. 02. 09–11.

## Összetett váltó feladatok és részletes megoldásuk

### Szerves kémia

#### CH-2 (L)

Hány nyílt láncú izomer írható fel a  $C_3H_6O_2$  összegképletre?  
(a tükörképi párok és a cisz-transz izomerek külön számolandók)

propánsav

metil-acetát, etil-formiát

2-hidroxiopropanal\*, 3-hidroxiopropanal

2-metoxietanal

hidroxiaceton

dihidroxiropén (1,1; 1,2 [E/Z]; 1,3 [E/Z]; 2,3; 3,3)

1-metoxieténol

2-metoxieténol (E/Z)

Összesen  $13 + 4 = 17$ .

#### CH-3 (K, K+, L)

Albrecht a következő szelvényt adta fel: 221 212 2XX 222 2X

A helyes szelvény: 2X1 21X X2X 1X2 11

Tehát 6 találatosa lett a totón.



# XVII. DÜRER VERSENY

# K, K+, L

KATEGÓRIA

DÖNTŐ – 2024. 02. 09–11.

## CH-4 (K, K+, L)

Egy PB (propán-bután) gázt szállító teherhajó tartályának térfogata 1250 köbméter, melyet 10,00 Bar nyomásra töltöttek a 25,0 °C-os kikötőben. Baleset következtében a tartály megsérült, a gáz pedig nyílt láng felelőtlen használata miatt tökéletesen elégett. Az égés során 42,67 tonna víz keletkezett. Egészre kerekítve hány m/m% propánt tartalmazott a PB gázelegy?

$M(\text{propán}) = 44,10 \text{ g/mol}$ ;  $M(\text{bután}) = 58,12 \text{ g/mol}$ ;  $M(\text{víz}) = 18,02 \text{ g/mol}$

$$n(\text{PB}) = \frac{pV}{RT} = 504272 \text{ mol}, 42670 \text{ kg víz anyagmennyisége } n(\text{H}_2\text{O}) = 2367925 \text{ mol}$$

**Az alkánok égésének egyenlete a következő:**  $\text{C}_n\text{H}_{2n+2} \xrightarrow{\text{O}_2} n \text{CO}_2 + n+1 \text{H}_2\text{O}$

**Az alkán:víz anyagmennyiség arány a szénatomszám ( $n$ ) függvénye:**

$$n(\text{PB}):n(\text{H}_2\text{O}) = 1:(n+1)$$

$$n(\text{H}_2\text{O})/n(\text{PB}) = n+1$$

$$4,696 = n+1$$

$$n = 3,696$$

**Az átlagos szénatomszámból ki tudjuk számítani a propán arányát:**

$$\frac{3n(\text{P}) + 4n(\text{B})}{n(\text{PB})} = \frac{3n(\text{P}) + 4(n(\text{PB}) - n(\text{P}))}{n(\text{PB})} = 3,696$$

megoldva  $n(\text{propán}) = 0,304 \cdot n(\text{PB})$  azaz 30,4 n/n% propán

Az anyagmennyiség arányból a moláris tömegek segítségével a megkapjuk tömegarányt:

$$\frac{0,304 \cdot M(\text{P})}{0,304 \cdot M(\text{P}) + 0,696 \cdot M(\text{PB})} = 25 \text{ m/m\%}$$



VÁLTÓ MEGOLDÁSOK



XVII. DÜRER  
VERSENY

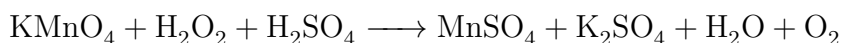
K, K+, L  
KATEGÓRIA

DÖNTŐ – 2024. 02. 09–11.

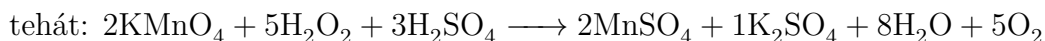
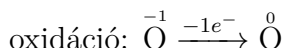
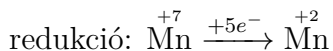
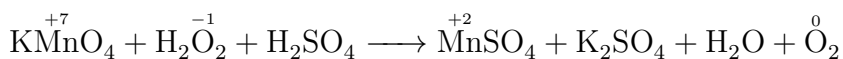
## Szervetlen kémia

### SZ-2 (K, K+), SZ-1 (L)

Rendezzék az alábbi reakcióegyenletet! Mennyi az együtthatók összege?



Oxidációs számok alapján rendezzük az egyenletet!

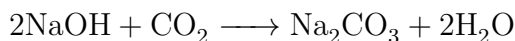


Az együtthatók összege 26.

### SZ-3 (K, K+), SZ-2 (L)

Egy Amerikába tartó teherhajó rakterében szállított kristályos nátrium-hidroxid érintkezésbe került a rakteret kitöltő vízgőz mentes levegővel. Hány százalékkal nőtt a tömege az út során, ha a hidroxid-ionok 70 %-a lépett reakcióba szén-dioxiddal és a keletkező összes vizet megkötötte?

$$M(\text{NaOH}) = 40 \text{ g/mol}; M(\text{CO}_2) = 44 \text{ g/mol}$$



2:1 mólarány!

1 mol NaOH-dal számolva:

$$(40 + 0,35 \cdot 44) / 40 = 1,385, \text{ tehát } 38,50 \%$$



# XVII. DÜRER VERSENY

# K, K+, L

KATEGÓRIA

DÖNTŐ – 2024. 02. 09–11.

## SZ-4 (K, K+), SZ-3 (L)

Egy vegyület, amely két különböző atomból épül fel, 42,9  $m/m\%$ -ot tartalmaz abból az elem-ből, amelynek hidrogénnel alkotott vegyülete erősebb sav a másik elem hidrogénnel alkotott vegyületénél. A két elem atomtömegének szorzata 2832,5, összege pedig 115,35. Mi a vegyület képlete?

$$x \cdot y = 2832,5$$

$$x + y = 115,35$$

A kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása:  $x = 79,9$ ,  $y = 35,45$

A két elem tehát a bróm és a klór. A HBr erősebb sav, mint a HCl, tehát 42,9  $m/m\%$  brómot és 57,1  $m/m\%$  klórt tartalmaz a vegyület.

100 g vegyület tehát 42,9 g brómot és 57,1 g klórt tartalmaz.

A bróm anyagmennyisége:  $42,9 \text{ g} / 79,9 \text{ g/mol} = 0,537 \text{ mol}$

A klór anyagmennyisége:  $57,1 / 35,45 \text{ g/mol} = 1,61 \text{ mol}$

$$n(\text{Br}):n(\text{Cl}) = 0,537:1,61 = 1:3$$

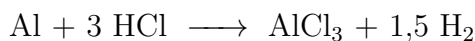
A vegyület képlete:  $\text{BrCl}_3$

## SZ-4 (L)

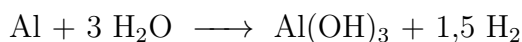
A szingapúri kikötői tolvajok 35,00 kg tiszta timföldet loptak el egy teherhajóról. A timföld olvadékának elektrolízisével alumíniumot állítottak elő. Az elektrolízist 225,3 A áramerősséggel végezték pontosan 24 óráig. Sajnos az előállított alumíniumot nem tudták eladni, így az alumínium felét 56,32 liter 1,500  $\text{mol/dm}^3$ -es sósavban teljesen feloldották, míg a másik felét pedig 38,52 liter 2,00  $\text{mol/dm}^3$ -es nátrium-hidroxid oldatba tették, ezáltal egy általuk jól használható gázt állítottak elő. A gázfejlődés után a két oldatot összeöntötték. Hány g  $\text{Al(OH)}_3$  csapadék keletkezett? Az  $\text{Al(OH)}_3$  oldhatóságát tekintjük elhanyagolhatónak!

$$F = 96500 \text{ C/mol}$$

### 1. A sósav oldja az alumíniumot:



$n(\text{Al}) \cdot 3 > n(\text{HCl})$ , így a maradék alumínium vízben oldódik fel és csapadék képződik:





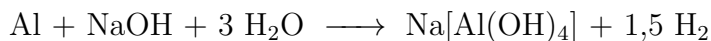
# XVII. DÜRER VERSENY

# K, K+, L

KATEGÓRIA

DÖNTŐ – 2024. 02. 09–11.

## 2. A NaOH oldja alumíniumot



$n(\text{Al}) < n(\text{NaOH})$ , az alumínium teljesen feloldódik,  $[\text{Al}(\text{OH})_4]^-$  komplexet képez.

## 3. Összeöntés után:

Az összeöntés után az alumíniumion-hidroxidion különbségen múlik, mi lesz a rendszerben.

1. ha  $n(\text{Al}) > n(\text{OH}^-)/3$ , akkor alumínium akvakomplex +  $\text{Al}(\text{OH})_3$  csapadék
2. ha  $n(\text{OH}^-)/3 > n(\text{Al}) > n(\text{OH}^-)/4$ , akkor  $\text{Al}(\text{OH})_3$  csapadék +  $[\text{Al}(\text{OH})_4]^-$  komplex
3. ha  $n(\text{OH}^-)/4 > n(\text{Al})$ , akkor  $[\text{Al}(\text{OH})_4]^-$  komplex

$$n(\text{Al}^{3+}) = n(\text{Al}) = It/(zF) = 67,24 \text{ mol}$$

$$n(\text{OH}^-) = 3 \cdot n(\text{Al}) + n(\text{Na}^+) - n(\text{Cl}^-) = 194,28 \text{ mol}$$

$n(\text{Al}) > n(\text{OH}^-)/3$ , így  $\text{Al}(\text{OH})_3$  csapadék és alumínium akvakomplex keletkezik

$$n(\text{Al}(\text{OH})_3) = n(\text{OH}^-)/3 = 64,76 \text{ mol}$$

$$M(\text{Al}(\text{OH})_3) = 78,00 \text{ g/mol}$$

$$m(\text{Al}(\text{OH})_3) = 5051 \text{ g}$$



VÁLTÓ MEGOLDÁSOK

XVII. DÜRER  
VERSENY

K, K+, L  
KATEGÓRIA

DÖNTŐ – 2024. 02. 09–11.

## Analitika

### A-3 (K), A-2 (K+), A-1 (L)

A tengerjáró hajókon kapható ételecet töménységét vegyes százalékban adják meg, ami azt mutatja, 100 ml oldat hány g ecetsav felhasználásával készült. Mennyi a pH-ja a 10,0 %-os ecetsavnak?

$$K_s = 1,862 \cdot 10^{-5}$$

$$M(\text{ecetsav}) = 60,05 \text{ g/mol}$$

Vegyünk 100 ml ételecetet!

$$m(\text{ecetsav}) = 10 \text{ g}$$

$$n(\text{ecetsav}) = m/M = 0,1665 \text{ mol}$$

$$c(\text{ecetsav}) = n/V = 1,665 \text{ mol/dm}^3$$

$$1,862 \cdot 10^{-5} = \frac{x^2}{c - x}$$

$$x^2 + 1,862 \cdot 10^{-5}x - 1,862 \cdot 10^{-5}c = 0$$

$$x = 5,559 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{pH} = -\lg(x) = 2,255$$

### A-3 (K+), A-2 (L)

A kalózok ezüst tárgyakat zsákmányoltak egy tehetősebb család kifosztása során. Az erőszakcselekmények lezajlása után a tárgyakat beolvasztották, hogy azokat később ne lehessen felismerni, majd 4 darab ezüst rudat öntöttek, melyeknek tömege egyenként 2,5 kg volt. Mielőtt azonban túladtak volna a zsákmányon, meghatározták azok ezüst tartalmát, nehogy a kereskedő átverje őket. Az egyik kalóz összegyűjtötte az öntés során keletkezett ezüst törmeléket, amelynek tömege 3,381 g volt. A törmelékből salétromsavat használva 10,00 cm<sup>3</sup> AgNO<sub>3</sub> oldatot készített. Az oldatba mártott ezüst elektród elektródpotenciálja 836,2 mV volt 25 °C-on. Egészre kerekítve hány ezrelék az ezüst rudak ezüst tartalma?

$$E^\circ = 0,810 \text{ V}$$

$$M(\text{Ag}) = 107,9 \text{ g/mol}$$

$$F = 96500 \text{ C/mol}$$



VÁLTÓ MEGOLDÁSOK



XVII. DÜRER  
VERSENY

K, K+, L  
KATEGÓRIA

DÖNTŐ – 2024. 02. 09–11.

$$E = E^{\circ} + \frac{RT}{zF} \ln(c)$$

$$\ln(c) = (E^{\circ} - E) \frac{RT}{zF} = 1,020, \text{ tehát } c = 2,773 \text{ mol/dm}^3$$

$$n(\text{Ag}) = cV = 0,02773 \text{ mol}$$

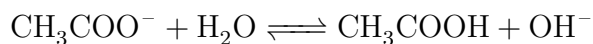
$$m(\text{Ag}) = nM = 2,992 \text{ g}$$

$$m(\text{Ag})/m(\text{össz}) = 0,8849, \text{ tehát kerekítve } 885 \text{ ezrelék}$$

### A-3 (L)

Mennyivel változik meg a pH, ha 1,18 dm<sup>3</sup> 0,54 mol/dm<sup>3</sup>-es nátrium-acetát oldathoz 0,38 dm<sup>3</sup> 1,76 mol/dm<sup>3</sup>-es ecetsavoldatot öntünk?

$$K_s = 1,862 \cdot 10^{-5}$$



$$K_b = \frac{K_v}{K_s} = \frac{[\text{CH}_3\text{COOH}][\text{OH}^-]}{[\text{CH}_3\text{COO}^-]} = \frac{x^2}{c-x} = 5,371 \cdot 10^{-10}$$

$$x^2 + Kx - Kc$$

$$x = 1,703 \cdot 10^{-5}$$

$$\text{pH}_1 = 14 - \text{pOH} = 14 + \lg x = 9,23$$

$$n(\text{CH}_3\text{COO}^-) = cV = 0,6372$$

$$n(\text{CH}_3\text{COOH}) = cV = 0,6688$$

$$\text{pH}_2 = \text{p}K_s + \lg \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-]}{[\text{CH}_3\text{COOH}]} = 4,71$$

$$|\text{pH}_2 - \text{pH}_1| = 4,52$$



VÁLTÓ MEGOLDÁSOK

# XVII. DÜRER VERSENY

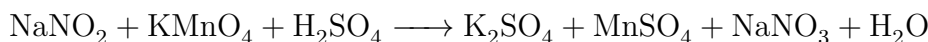
# K, K+, L

KATEGÓRIA

DÖNTŐ – 2024. 02. 09–11.

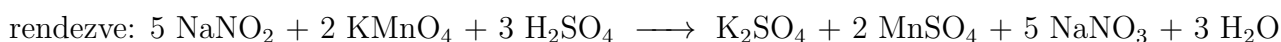
## A-4 (K, K+)

Egy nitrittel szennyezett természetes víz nitrítartalmát meghatározhatjuk permanganometria segítségével, az alábbi (rendezetlen) egyetletben foglaltak szerint:



Ha nitritoldatot szeretnénk permanganát mérőoldattal titrálni, a kénsavas közegben nitritből salétromossav keletkezne, ami könnyen bomlik, ezért fordított titrálást alkalmazunk.

20,0 cm<sup>3</sup> 0,02 mol/dm<sup>3</sup>-es KMnO<sub>4</sub> oldatot (mérőoldatot) öntöttünk titráló lombikokba, hozzáadtunk 10-10 cm<sup>3</sup> hígított kénsavat, hígítottuk desztillált vízzel, a bürettát pedig feltöltöttük az ismeretlen koncentrációjú nitrit oldattal. Hány g/l volt a szennyezett víz nitrit tartalma, ha a fogyások átlaga 21,34 cm<sup>3</sup> volt?



$$n(\text{MnO}_4^-) = 0,02 \cdot 0,02 = 0,400 \text{ mmol}$$

$$n(\text{NO}_2^-) = 2,5 \cdot n(\text{MnO}_4^-) = 1,000 \text{ mmol}$$

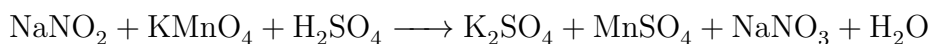
$$V(\text{NO}_2^- \text{ oldat}) = 21,34 \text{ cm}^3$$

$$c(\text{NO}_2^-) = n/V = 46,86 \text{ mmol/dm}^3$$

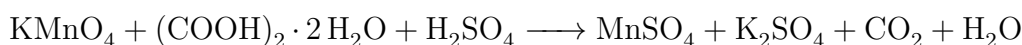
$$M(\text{NO}_2^-) = 46 \text{ g/mol}; cM = 2,156 \text{ g/l}$$

## A-4 (L)

Egy nitrittel szennyezett természetes víz nitrítartalmát meghatározhatjuk permanganometriánál visszaitrálással, a következő módon. A nitrit-sóoldathoz ismert térfogatú és koncentrációjú kálium-permanganát mérőoldatot adunk, majd az oldatot megsavanyítjuk, ekkor az alábbi reakció játszódik le:



A mérőoldat feleslegét rövid várakozás után ismert térfogatú és koncentrációjú oxálsav-oldattal reagáltatjuk. Az oxálsav segéd-mérőoldat feleslegét kálium-permanganát mérőoldattal megtitráljuk. Erre azért van szükség, mert a kálium-permanganát oxálsav-mérőoldattal közvetlenül nem titrálható.



A mérést 25,0 cm<sup>3</sup> ismeretlen koncentrációjú nitrit oldaton végeztük, amelyhez először 25,0 cm<sup>3</sup> 0,020 mol/dm<sup>3</sup>-es KMnO<sub>4</sub> oldatot adtunk. 1,00 dm<sup>3</sup> oxálsav oldatot készítettünk 1,410 g (COOH)<sub>2</sub> · 2 H<sub>2</sub>O felhasználásával, majd 50,0 cm<sup>3</sup>-t hozzáadtunk az elegyhez. A feleslegét 0,020 mol/dm<sup>3</sup>-es KMnO<sub>4</sub> oldattal megtitráltuk. A fogyások átlaga 8,93 cm<sup>3</sup> volt.

Hány g/l volt a szennyezett víz nitrit tartalma?





VÁLTÓ MEGOLDÁSOK

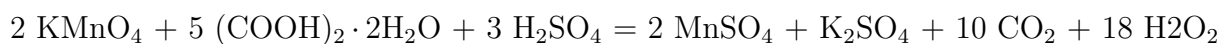
# XVII. DÜRER VERSENY

# K, K+, L

KATEGÓRIA

DÖNTŐ – 2024. 02. 09–11.

Rendezzük az egyenleteket!



$$2 \cdot n(\text{NO}_2^-) + 2 \cdot n(\text{oxálsav}) = 5 \cdot n(\text{KMnO}_4) + 5 \cdot n(\text{fogyás})$$

$$2 \cdot n(\text{NO}_2^-) = 5 \cdot 0,025 \cdot 0,02 + 5 \cdot 0,00893 \cdot 0,02 - 2 \cdot 1,410/126 \cdot 0,025 = 2,274 \text{ mmol}$$

$$n(\text{NO}_2^-) = 1,137 \text{ mmol}$$

$$m(\text{NO}_2^-) = n/M = 0,0523 \text{ g}$$

$$V = 0,025 \text{ l}$$

$$m/V = 2,092 \text{ g/l}$$



**XVII. DÜRER  
VERSENY**

**K, K+, L**  
KATEGÓRIA

**DÖNTŐ – 2024. 02. 09–11.**

## Egyéb feladatok

**E-3 (K), E-2 (K+, L)**

A kalózok sója néven elhíresült ionvegyület kristályvízmentes moláris tömege 216 g/mol. 100 g víz 40 °C-on 80 g, 25 °C-on 40 g kristályvízmentes sót old fel. Ha 40 °C-os telített vizes oldatát 25 °C-ra hűtjük, az oldat tömege 45,89 %-kal csökken. Hány mol kristályvizet tartalmaz mólónként a kalózok sója?

Induljunk ki  $100 + 80 = 180$  g telített oldatból, legyen a kiváló só tömege  $x$ , a kristályvíz tömege  $y$ !

A 25 °C-os telített oldatra igaz, hogy  $(80-x)/(100-y) = 40/100$  vagyis  $x = 40 + 0,4y$

A kiváló sóra pedig igaz, hogy  $x + y = 0,4589 \cdot 180$

vagyis  $x = 82,60 - y$

A két egyenletet összevonva és megoldva megkapjuk, hogy:

$y = 30,43$  g, azaz 1,691 mol

$x = 52,17$  g, azaz 0,2415 mol

A kettő hányadosa 7.



# XVII. DÜRER VERSENY

# K, K+, L

KATEGÓRIA

DÖNTŐ – 2024. 02. 09-11.

## E-4 (K), E-3 (K+)

$A_xB_y$  ionvegyület oldódását ( $A_xB_y \rightleftharpoons xA(aq) + yB(aq)$ ) jellemző oldhatósági szorzat:

$L = [A]^x[B]^y$ , ahol  $[A]$  és  $[B]$  az ionok koncentrációja a telített oldatban.

Határozzátok meg az alábbi vegyületek telített oldatának tömegszázalékos összetételét! A sűrűséget minden esetben tekintsük  $1,000 \text{ g/cm}^3$ -nek! A megoldás a három szám összege!

$$L(\text{bárium-szulfát}) = 1,084 \cdot 10^{-10}$$

$$L(\text{ezüst-klorid}) = 1,770 \cdot 10^{-10}$$

$$L(\text{ólom(II)-szulfát}) = 2,130 \cdot 10^{-8}$$

$1 \text{ dm}^3$  térfogatú és  $1 \text{ kg}$  tömegű oldat esetén:

$$\text{BaSO}_4 \quad L = 1,084 \cdot 10^{-10}$$

$$c = \sqrt{L} = 1,041 \cdot 10^{-5} \text{ mol/dm}^3$$

$$n = c/V = 1,041 \cdot 10^{-5} \text{ mol}$$

$$m = nM = 2,430 \cdot 10^{-3} \text{ g} \rightarrow 2,430 \cdot 10^{-4} \%$$

$$\text{AgCl} \quad L = 1,770 \cdot 10^{-10}$$

$$c = \sqrt{L} = 1,330 \cdot 10^{-5} \text{ mol/dm}^3$$

$$n = c/V = 1,330 \cdot 10^{-5} \text{ mol}$$

$$m = nM = 1,906 \cdot 10^{-3} \text{ g} \rightarrow 1,906 \cdot 10^{-4} \%$$

$$\text{PbSO}_4 \quad L = 2,130 \cdot 10^{-8}$$

$$c = \sqrt{L} = 1,459 \cdot 10^{-4} \text{ mol/dm}^3$$

$$n = c/V = 1,459 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$$

$$m = nM = 4,426 \cdot 10^{-2} \text{ g} \rightarrow 4,426 \cdot 10^{-3} \%$$

**Összesen:**  $4,860 \cdot 10^{-3} \%$



# XVII. DÜRER VERSENY

# K, K+, L

KATEGÓRIA

DÖNTŐ – 2024. 02. 09–11.

## E-3 (L)

Állítsátok növekvő sorrendbe tömegszázalékos összetétel szerint az alábbi vegyületek telített vizes oldatát! A sűrűséget minden esetben tekintsük  $1,000 \text{ g/cm}^3$ -nek! A válasz a vegyületeket jelölő betűket tartalmazza (pl.:  $C < B < E < A < D$  esetén CBEAD)!

$$A \text{ p}L(\text{bárium-szulfát}) = 9,965$$

$$B \text{ p}L(\text{ezüst-klorid}) = 9,752$$

$$C \text{ p}L(\text{ólom(II)-szulfát}) = 7,672$$

$$D \text{ p}L(\text{ólom(II)-jodát}) = 12,43$$

$$E \text{ p}L(\text{ezüst-karbonát}) = 11,06$$

1  $\text{dm}^3$  térfogatú és 1 kg tömegű oldat esetén:

$$\text{BaSO}_4 \text{ } L = 1,084 \cdot 10^{-10}$$

$$c = \sqrt{L} = 1,041 \cdot 10^{-5} \text{ mol/dm}^3$$

$$n = c/V = 1,041 \cdot 10^{-5} \text{ mol}$$

$$m = nM = 2,430 \cdot 10^{-3} \text{ g}$$

$$\text{AgCl} \text{ } L = 1,770 \cdot 10^{-10}$$

$$c = \sqrt{L} = 1,330 \cdot 10^{-5} \text{ mol/dm}^3$$

$$n = c/V = 1,330 \cdot 10^{-5} \text{ mol}$$

$$m = nM = 1,906 \cdot 10^{-3} \text{ g}$$

$$\text{PbSO}_4 \text{ } L = 2,130 \cdot 10^{-8}$$

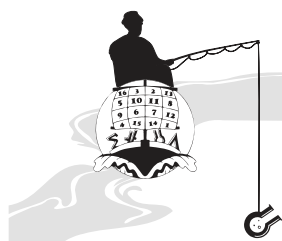
$$c = \sqrt{L} = 1,459 \cdot 10^{-4} \text{ mol/dm}^3$$

$$n = c/V = 1,459 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$$

$$m = nM = 4,426 \cdot 10^{-2} \text{ g}$$

$$\text{Pb(IO}_3)_2 \text{ } L = 3,690 \cdot 10^{-13}$$

$$c = \sqrt[3]{L/4} = 4,518 \cdot 10^{-5} \text{ mol/dm}^3$$



VÁLTÓ MEGOLDÁSOK

# XVII. DÜRER VERSENY

# K, K+, L

KATEGÓRIA

DÖNTŐ – 2024. 02. 09–11.

$$n = 4,518 \cdot 10^{-5} \text{ mol}$$

$$m = nM = 2,083 \cdot 10^{-2} \text{ g}$$

$$\text{Ag}_2\text{CO}_3 \text{ L} = 8,640 \cdot 10^{-12}$$

$$c = \sqrt[3]{L/4} = 1,293 \cdot 10^{-4} \text{ mol/dm}^3$$

$$n = 1,293 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$$

$$m = nM = 3,525 \cdot 10^{-2} \text{ g}$$

## BADEC

### E-4 (K+, L)

A Részeg TengerÉSZ összeöntött  $n$  darab oldatot, melyeknek tömege rendre  $1, 2, 3, \dots, n-2, n-1, n$  gramm, tömegszázalékos összetétele pedig rendre  $n, n-1, n-2, \dots, 3, 2, 1$  m/m%, ahol  $n$  egy 100-nál kisebb pozitív egész szám. Fejezzétek ki  $n$  segítségével, hogy hány tömegszázalékos lesz az  $n$  darab oldat elegye!

Az oldat tömegszázalékos összetételét az összes oldott anyag és az össztömeg hányadosaként kapjuk meg.

#### 1. Empirikus bizonyítás:

$$\text{ha } n = 1, \text{ akkor } \frac{1}{1} = 1 = \frac{3}{3}$$

$$\text{ha } n = 2, \text{ akkor } \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{1 + 2} = \frac{4}{3}$$

$$\text{ha } n = 3, \text{ akkor } \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{1 + 2 + 3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\text{ha } n = 4, \text{ akkor } \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{1 + 2 + 3 + 4} = \frac{20}{10} = \frac{6}{3}$$

$$\text{ha } n = 5, \text{ akkor } \frac{5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5}{1 + 2 + 3 + 4 + 5} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}$$

...

$$n \text{ esetén } = \frac{(n+2)}{3}.$$



VÁLTÓ MEGOLDÁSOK

# XVII. DÜRER VERSENY

# K, K+, L

KATEGÓRIA

DÖNTŐ – 2024. 02. 09–11.

## 2. Matematikai bizonyítás:

**Az oldat tömege:**

$m(\text{oldat}) = 1 + 2 + \dots + n-1 + n$ , ami egy  $d = 1$  differenciájú,  $n$  tagú számtani sorozat.

$$m(\text{oldat}) = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Az oldott anyag tömege:**

$m(\text{oldott anyag}) = 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \dots + (n-2) \cdot 3 + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1$ , ami két  $n$  tagú, ellentétes differenciájú sorozat szorzatösszege.

Nézzük meg, hogy  $n = 1, 2, 3, \dots$  esetén hogy alakul ez az összeg!

ha  $n = 1$ , akkor 1

ha  $n = 2$ , akkor  $2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4$

ha  $n = 3$ , akkor  $3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 10$

ha  $n = 4$ , akkor  $4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 20$

ha  $n = 5$ , akkor  $5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 35$

ha  $n = 6$ , akkor  $6 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 6 \cdot 1 = 56$

Figyeljük meg a szorzatösszegek sorozatát!

0, 1, 4, 10, 20, 35, 56, ...

Vegyük a sorozat differenciájának sorozatát, majd annak a differenciájának sorozatát és így tovább!

1, 3, 6, 10, 15, 21, ...

2, 3, 4, 5, 6, ...

1, 1, 1, 1, 1, ...

Tehát a szorzatösszeg egy  $n$  tagú, harmadrendű sorozat (a tetraéderszámok) összegének felel meg. A tetraéder számok sorozatának összege (azaz az oldott anyag tömege):

$$m(\text{oldott anyag}) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

**Az oldat tömegszázalékos összetétele tehát:**

$$\frac{m(\text{oldottanyag})}{m(\text{oldat})} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \cdot \frac{2}{n(n+1)} = \frac{(n+2)}{3}$$