XVII. DÜRER VERSENY

D KATEGÓRIA

VÁLTÓ MEGOLDÁSOK

DÖNTŐ – 2024. 02. 09–11.

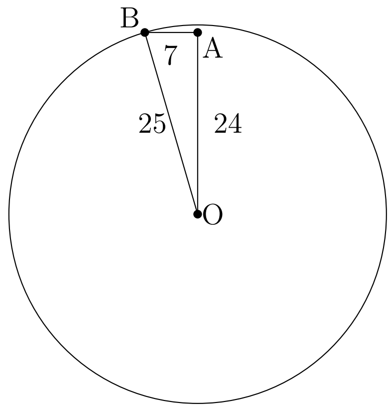
D1. Zorka kíváncsi volt, hogy Panna kapitány hány éves, ezért megkérdezte tőle. Ő erre azt felelte, hogy pont 25 évvel idősebb, mint Tamás nevű fia. Hány éves Panna kapitány, ha Zorka tudja, hogy Tamás 12 év múlva pont fele olyan idős lesz, mint most Panna?

Megoldás: Jelölje Panna kapitány életkorát (években) x, Tamásét pedig y. Panna 25 évvel idősebb, mint Tamás, ezért $x = y+25$. Tamás 12 év múlva fele annyi idős lesz, mint most Panna, ezért $y+12 = \frac{x}{2}$. Az egyenletrendszert megoldva $x = 26$ adódik, tehát Panna 26 éves.

D2. Leila, a félszemű kalóz egy kör alakú tenger közepén volt hajójával. Naplementekor elindult kifelé valamelyik irányba és hajózott egyenesen 24 kilométert. Ám ekkor óriási vihar támadt, ami elfordította a hajót derékszögben balra. A vihar lecsendesedése után ebben az irányban hajózott még egyenesen 7 kilométert és végül ott ért partot. Hány kilométer a tenger átmérője?
A vihar alatt Leila lehorgonyzott, így a hajó nem mozdult el, csak elfordult.

Megoldás:

Legyen a kör középpontja O, ahonnan Leila indul. Innen 24 km-t tesz meg egyenesen, így elér az A pontba (ld. ábra). Majd egy 90 fokos balra fordulás után egyenesen halad 7 km-t, ekkor partot ér, tehát a körvonalra érkezik, legyen ez a pont B. Vegyük az OAB derékszögű háromszöget, aminek két befogója 24 km és 7 km hosszú. Pitagorasz tétellel kiszámolható az átfogó hossza, ami 25 km-nek adódik, ami éppen a kör sugara. A kör átmérője a sugár kétszerese, ezért az átmérő hossza $2 \cdot 25 = 50$ km.



D3. Kartal egy 5×5-ös táblázat mezőit kitölti 1-től 25-ig az egész számokkal, minden mezőbe egy számot írva és minden számot egyszer felhasználva. Ezek után Benedek minden sor után, Dani pedig minden oszlop alá odaírja a benne szereplő számok összegét. Jóska kivonja a Benedek által leírt legnagyobb számból a Dani által leírt legkisebb számot. Mi a lehető legnagyobb szám, amit Jóska eredményül kaphatott?

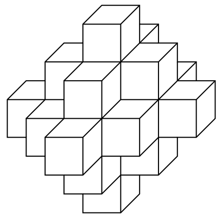
Megoldás: Vegyük észre, hogy bárhogy választunk ki egy sort és egy oszlopot, lesz egy közös mezőjük. Ezt a mezőt egyszer hozzáadtuk, egyszer kivontuk, így a végeredményből kiesik. Nézzük a Benedek-féle legnagyobb sor másik 4 mezőjét (cél, hogy ezek összege a lehető legnagyobb legyen), és ebből vonjuk ki a Dani-féle legkisebb oszlop másik 4 mezőjét (cél, hogy ezek összege a lehető legkisebb legyen). A legjobb, amit kaphatunk, $25 + 24 + 23 + 22 - (1 + 2 + 3 + 4) = 25 + 24 + 23 + 22 - 10 = 84$.

D4. A Quadropoly nevű társasjátékban Csaba börtönbe került. Egy játékos úgy próbálhat meg kiszabadulni a börtönből, hogy egyszerre dob két szabályos dobókockával. A próbálkozás akkor sikeres, ha a dobott számok összege 4-gyel osztható. Mennyi annak a valószínűsége, hogy Csaba első próbálkozásra kiszabadul? **Válaszként a tört legegyszerűbb alakjában a számláló és a nevező összegét adjátok meg!**

Megoldás: Ha egy kockával dobunk, bármelyik szám valószínűsége $\frac{1}{6}$. Két kocka esetén 36 azonos valószínűségű esetet tudunk felsorolni, így például $\frac{1}{36}$ annak az esélye, hogy az első kockával 3-ast, a második kockával 4-es dobunk. Mindkettő dobókockán egy 1 és 6 közötti számot látunk, tehát az összegük 2 és 12 között van. Csaba akkor szabadul ki, ha a számok összege 4, 8 vagy 12.
$4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1$ – annak a valószínűsége, hogy az összeg 4: $\frac{3}{36}$
$8 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4 = 5 + 3 = 6 + 2$ – annak a valószínűsége, hogy az összeg 8: $\frac{5}{36}$
$12 = 6 + 6$ – annak a valószínűsége, hogy az összeg 12: $\frac{1}{36}$
Összesen: $\frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{1}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$, amiben a számláló és a nevező összege $1 + 4 = 5$.

D5. Összeragasztottunk 25 szabályos dobókockát az ábrán látható módon úgy, hogy bármely két összeragasztott lapon a pöttyök száma megegyezik. Legfeljebb mennyi lehet a felszínen található pöttyök száma?

A pöttyöktől eltekintve a test a másik irányból nézve is ugyanígy néz ki. Egy dobókockát szabályosnak nevezünk, ha a szemközti lapokon a pöttyök száma összesen 7.



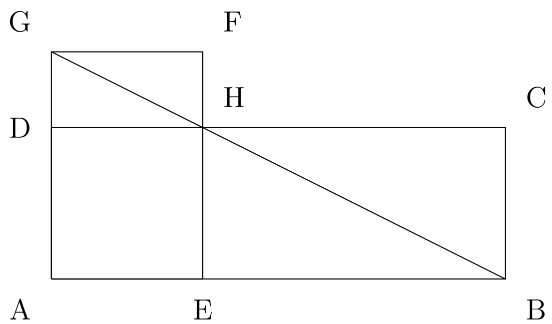
Megoldás: Mivel az összeragasztott oldalakon azonos számú pötty van, és a "kockaoszlopok" páratlan számú kockából állnak, így minden összeragasztott "kockaoszlop" két végén a pöttyök száma 7 (állandó). A "kockaoszlopok" három irányban állnak. Bármely irányból nézve az alakzatot, azonos számú kockaoldal látszik (13). Minden látszódó kockaoldal pontosan egy irányból nézve egy "kockaoszlop" vége. A felszínen található pontok száma: $7 \cdot 3 \cdot 13 = 273$.

D6. Egy kardhalnak speciális viszonya van a 8-as számmal, így pontosan azok a háromjegyű számok a kedvencei, melyekre maga a szám, a számjegyek összege, és a számjegyek szorzata is osztható 8-cal, de a számban nincsen 8-cal osztható számjegy. Mennyi a kardhal kedvenc számainak összege?

Megoldás: Mivel a számban nincsen nyolccal osztható számjegy, ezért 0 és 8 nem szerepelhet benne. Emellett tudjuk, hogy a három számjegy szorzata osztható nyolccal, azaz legalább két számjegy páros kell, hogy legyen, különben nem szerepelne a számjegyek szorzatában legalább három darab kettes prímtényező. Mivel a számjegyek összege is nyolccal osztható és van legalább két páros számjegye, ezért a harmadik számjegy is páros lesz. Így a szorzatuk mindenképpen osztható lesz 8-cal. A számban a 2, 4 és 6 számjegyek szerepelhetnek. A számjegyek összege nyolccal osztható, azaz 8 vagy 16 (mivel legalább $2 + 2 + 2 = 6$ és legfeljebb $6 + 6 + 6 = 18$). Így a szám állhat két 6-osból és egy 4-esből vagy pedig két 2-esből és egy 4-esből. Ezek a számok a 224, 242, 422, 466, 646 és a 664, amelyek közül a 224 és a 664 osztható nyolccal, így ezek a kardhal kedvenc számai. A kardhal kedvenc számainak összege $224 + 664 = 888$.

D7. Adottak az $ABCD$ és $AEFG$ téglalapok úgy, hogy E az AB szakasz, D pedig az AG szakasz belső pontja. Legyen az EF és CD szakaszok metszéspontja H. Tudjuk, hogy $AEHD$ egy négyzet, aminek a területe 36 egység, továbbá az $ABCD$ téglalap területe 10-szerese az $AEFG$ téglalap területének. Hány egység hosszú az AB szakasz, ha a B, H, G pontok egy egyenesen vannak?

Megoldás:



Legyen T_1 az $ABCD$ téglalap területe, T_2 pedig az $AEFG$ téglalap területe. Jelölje x az EB szakasz hosszát, y pedig a DG szakasz hosszát.

$AEHD$ négyzet területe 36, ezért $AE = AD = 6$, ekkor $T_1 = 6 \cdot (6 + x)$ és $T_2 = 6 \cdot (6 + y)$, továbbá $T_1 = 10 \cdot T_2$, azaz $6 \cdot (6 + x) = 10 \cdot 6 \cdot (6 + y)$, ebből jön $y = \frac{x-54}{10}$.

A B, H, G pontok egy egyenesre esnek, ezért DHG és EBH háromszögek hasonlóak, emiatt $\frac{EH}{EB} = \frac{DG}{DH}$, behelyettesítve $\frac{6}{x} = \frac{y}{6}$, átrendezve $xy = 36$. Ebbe beírva $y = \frac{x-54}{10}$-t, azt kapjuk, hogy $x \cdot \frac{x-54}{10} = 36 \Rightarrow x^2 - 54x - 360 = 0$.

Ez az alábbi módon szorzattá alakítható: $(x-60)(x+6) = 0$, és mivel $x > 0$, csak $x = 60$ lehet. Tehát a végeredmény $AB = 6 + x = 66$.

D8. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek a fele négyzetszám, a harmada pedig köbszám?

Megoldás: Ismert, hogy egy szám akkor és csak akkor négyzetszám, ha a prímtényezős felbontásában minden kitevő osztható 2-vel, illetve akkor és csak akkor köbszám, ha minden kitevő osztható 3-mal. Legyen n a legkisebb olyan pozitív egész szám, amely teljesíti a feladat feltételeit. Ekkor $n/2$ négyzetszám, ezért n prímtényezős felbontásában 2 kitevője páratlan, 3 kitevője pedig páros. $n/3$ köbszám, ezért n prímtényezős felbontásában 2 kitevője 3-mal osztható, 3 kitevője pedig 3-mal osztva egy maradékot ad. Így tehát n-ben 2 kitevője 3, mert a 3 a legkisebb pozitív szám, amely páratlan és 3-mal osztható; 3 kitevője pedig 4, mert a 4 a legkisebb pozitív szám, amely páros és 3-mal osztva 1 maradékot ad. Világos, hogy az is csak növel a számon, ha van más prímtényezője a 2-n és 3-on kívül. Tehát $2^3 \cdot 3^4 = 648$ teljesíti a feladat feltételeit.

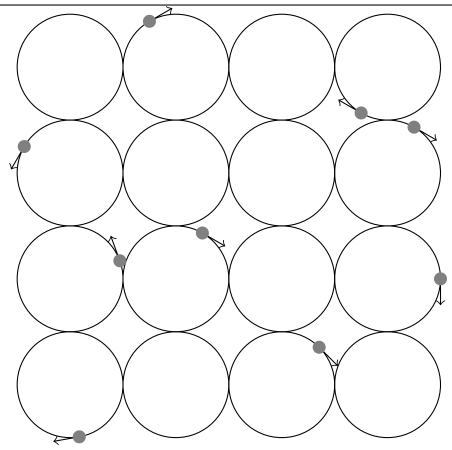
D9. Egy számot nevezzünk *kacsaszámnak*, ha a számot visszafelé kiolvasva az eredetinél nagyobb számot kapunk. Csak az 1-es és 2-es számjegyek felhasználásával hány nyolcjegyű kacsaszám írható le?
Például a 37145 *kacsaszám, mert* $54173 > 37145$.

Megoldás: Összesen 2^8 darab nyolcjegyű szám van, amely csak 1-es vagy 2-es számjegyeket tartalmaz. Ezeket párba állíthatjuk a megfordítottjukkal, ezek közül pontosan az egyik (a kisebbik) lesz kacsaszám, kivéve ha a szám és megfordítottja megegyezik. Ezeket a következőképpen számolhatjuk le: a szám első 4 számjegyét szabadon megválaszthatjuk, és az utolsó 4 jegy ennek megfordítása lesz, tehát palindrom számból 2^4 darab van. Így a kacsaszámok száma $\frac{2^8-2^4}{2} = 120$.

2. Megoldás: Ha az első számjegy 1 és a nyolcadik számjegy 2, akkor a többi számjegytől függetlenül kacsaszám lesz, fordított esetben sosem lesz az. Ilyen fajta szám $2^6 = 64$ db van. Ha azonosak (1 vagy 2), akkor a második és a hetedik számjegyet nézzük. Ha a második számjegy 1 és a hetedik 2, akkor ismét kacsaszám lesz, ilyenből $2 \cdot 2^4 = 32$ db van. Ezt a gondolatmenetet folytatva kapjuk, hogy még azok a megfelelő számok, amiknek első és utolsó, valamint második és hetedik jegye megegyezik, a harmadik 1, hatodik 2, negyedik és ötödik bármi lehet, ez 16 eset, és végül még az lehet, hogy a negyedik 1, ötödik 2, és az első-utolsó, második-hetedik, harmadik-hatodik párok megegyeznek, ez 8 eset. Ezért összesen $64 + 32 + 16 + 8 = 120$ db 1-2-számjegyes nyolcjegyű kacsaszám van.

D10. Az ábrán látható körvonalakon 9 hangya járkál, mindannyian azonos, állandó sebességgel, anélkül, hogy megfordulnának vagy megállnának. Amikor egy hangya két kör érintési pontjára ér, választhat, hogy a két egymást érintő körvonal közül melyiken halad tovább előre, de ekkor sem fordulhat meg. Amikor két hangya szembetalálkozik egymással, akkor az egyik átmászik a másikon, és ha útjuk során korábban még nem találkoztak, akkor egyikük felkiált. Legfeljebb hányszor kiálthatnak fel a hangyák összesen, ha kezdetben az ábrán látható helyekről a megjelölt irányokba indulnak el?

Tudjuk, hogy a megadott kezdőhelyzetből indulva nem fordulhat elő olyan, hogy két hangya úgy találkozik, hogy éppen ugyanabba az irányba néznek.



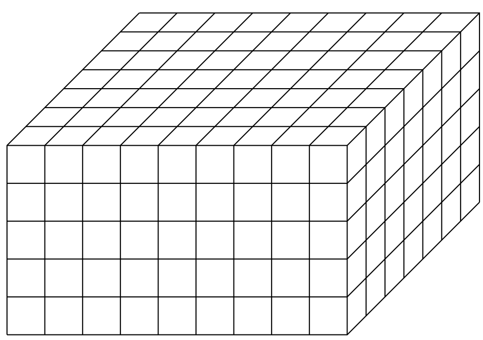
Megoldás: Egy hangya egy körön óramutató járásával megegyezően vagy ellentétesen mehet. Amikor egy hangya kört vált, akkor a haladási iránya mindig megváltozik, amikor pedig nem vált kört, akkor nem változik. Ezért sakktáblaszerűen váltakoznak egy adott hangya esetén az óramutató járásával megegyező és ellentétes irányú haladási irányok az ábrán. Így egy adott kezdőpontból induló hangya esetén csak a kiindulási helyzetből egyértelműen következik, hogy a hangya melyik körön melyik irányba halad, ha arra jár.

A második sorban levő két hangya a bal felső körön óramutató járásával megegyezően megy, a többi hét hangya mind ellentétesen. A feltétel miatt az ugyanolyan irányba néző hangyák nem találkoznak, ezért csak a két különböző irányú csoportba tartozó hangyák találkozhatnak. Közülük pedig mindenki találkozhat mindenkivel a másik csoportból. Példa erre, ha az összes hangya ugyanazon a körön mászik.

Ezért a válasz 14, a 2 hangya egyenként mind a 7 másik hangyával találkozhat.

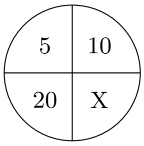
D11. Azonos méretű kiskockákból összeragasztottunk egy $5 \times 7 \times 9$-es téglatestet, melynek a középső kiskockája piros színű, a többi kiskocka pedig sárga, azonban mind különböző árnyalatú.
Anita leszedett ebből néhány sárga kiskockát (legalább egyet) úgy, hogy egy olyan téglatest maradt, amelynek a felszínén nem látható piros szín. Hányféleképpen nézhetett ki a kapott téglatest?
Anita a téglatest aljáról is szedhetett le kiskockát, és a megmaradt téglatest minden lapja látható volt.

Megoldás: Tekintsük a téglatestet az ábrán látható módon.



A megmaradt téglatestet úgy kaphatta Anita az eredetiből, hogy leszedett valahány réteg sárga kockát rendre a téglatest aljáról, tetejéről, elejéről, hátuljáról, bal, illetve jobb oldaláról. Mivel a piros kocka nem látszik a felszínen, így alulról és felülről legfeljebb 1-1, elölről és hátulról legfeljebb 2-2, balról és jobbról pedig legfeljebb 3-3 réteget szedhetett le Anita. Mivel akár az is lehet, hogy az adott irányból egy réteget sem szedett le, így összesen $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 576$-féleképpen válaszhatta meg a leszedett rétegek számát. Mivel ebből 1 esetben egy kockát sem szedett le, így összesen 575 téglatestet kaphatott.

D12. Morgan kapitány a jobb oldalon látható, négy szektorból álló táblára 9 nyilat dobott. Ha egy nyíl eltalálta a táblát, akkor a nyíl pontértéke megegyezik az eltalált szektoron látható számmal. Ha egy nyíl nem találta el a táblát, akkor az nem ér pontot. Hányféle pozitív egész szám állhat az X helyén, ha Morgan összesen 175 pontot ért el? *A szektorok határait nem találta el Morgan.*



Megoldás: Először indirekt tegyük fel, hogy csupán az 5, 10, 20 szektorokból elő tudjuk állítani a 175 összeget. Ha mind a 9 találat a 20-as szektort éri, akkor az összeg 180. Bármi ennél kisebb összeg eléréséhez az egyik 20-as helyett legfeljebb egy 10-eset kellett volna dobnia, de azzal már legfeljebb 170-re csökkenne az összeg. Ellentmondás.
Tehát Morgan kapitánynak el kellett találnia az X mezőt legalább egyszer.
Először számoljuk meg azokat az 5-tel osztható számokat, amik kerülhetnek X helyére. A fenti gondolatmenet szerint 5, 10 és 20 nem jön szóba. Azt állítjuk, hogy minden más lehet, ami legfeljebb 175. Vegyünk egy tetszőleges ilyen X értéket.
Ha X $20k+15$ alakú ($0 \leq k \leq 8$), akkor egy X dobás mellé legfeljebb 8 darab 20-as dobással el lehetett érni a 175-öt.
Ha X $20k$ alakú, és $k \neq 1$, azaz $2 \leq k \leq 8$, akkor egy X, egy 5-ös, egy 10-es és legfeljebb hat 20-as dobással szintén eljutunk a 175-ig.
Ha X $20k+5$ alakú ($1 \leq k \leq 8$), akkor egy X, egy 10-es, és legfeljebb hét 20-as dobással 175-öt tudunk kapni.
Végül, ha X $20k+10$ alakú ($1 \leq k \leq 8$), akkor egy X, egy 5-ös, és legfeljebb hét darab 20-as dobással 175-be jutunk.

Így X tényleg minden 5-tel osztható szám lehet 175-ig az 5, 10 és 20 kivételével, ami 32 lehetőség. Ha X nem osztható 5-tel, akkor mivel az összes többi dobás, és a végső 175 pont is 5-tel osztható, így ez csak úgy lehetséges, hogy 5-tel osztható számú X-et dobott Morgan, azaz jelen esetben pontosan 5-öt. Ekkor a lehetséges X-eket úgy határozhatjuk meg, hogy megnézzük, hogy legfeljebb négy dobással, amik mind az 5, 10, 20 pontok valamelyikébe mentek, hány pontot érhetett el, és ezeket a lehetőségeket levonjuk a 175-ből és 5-tel osztjuk.
Nem nehéz látni, hogy legfeljebb négy szám összege, melyek mindegyike 5, 10 vagy 20, minden nemnegatív, 5-tel osztható, 80-nál nem nagyobb szám lehet, kivéve a 75. Ez a fenti gondolatmenethez hasonlóan látható, azaz $20k$ alakú számokat csak 20-as dobásokkal megkaphatunk, $20k+5$ alakúakat egy 5-ös és 20-as dobásokkal, $20k+10$ alakúakat egy 10-es és 20-as dobásokkal, és $20k+15$ esetén egy 5-ös, egy 10-es, és 20-as dobásokkal, azonban 75-re ez már 5 dobás lenne, és azt nem is lehet négyből.
Tehát a 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 80 számok állíthatóak elő legfeljebb 4 dobásból, amihez az X értékére a következő lehetőségeket kapunk (ezeket kivonjuk 175-ből, és 5-tel osztjuk): 35, 34, 33, 32, 31, 30, 29, 28, 27, 26, 25, 24, 23, 22, 21, 19. Ez 16 szám, de ebből a 35, 30, 25 már korábban volt, mivel 5-tel osztható, így ez 13 új megoldást ad.
Tehát összesen $32+13=45$ megoldás van.

D13. Egy iskolából egy egyéni matematikaversenyen a 12.a és 12.b osztályokból három-három tanuló vett részt. Tudjuk, hogy a diákok a versenyen hat különböző pontszámot értek el, így a helyezéseik is különböznek. Matematikatanáruk csak a hat helyezés ismeretében megállapította, hogy a 12.b osztályosok pontszámainak összege nagyobb a 12.a osztályosok pontszámainak összegénél. Hányféle lehetett a hat diák sorrendje a versenyen?
A versenyen két versenyző közül az végez előrébb, akinek több pontja van. Ha két versenyzőnek ugyanannyi pontja van, akkor ugyanannyiadik helyen végeznek. A tanár a versenyen elérhető maximális pontszámot sem ismeri.

Megoldás: A tanár akkor tudja biztosra azt mondani, hogy a B-sek pontszámainak összege nagyobb, mint az A-soké, ha az osztályokon belül is rangsorolva a diákokat az ugyanannyiadik helyezést elérő B-s diákok megelőzik az A-s diákokat, azaz az első B-s előrébb végez, mint az első A-s és így tovább. Ne különböztessük meg az azonos osztálybeli diákokat. Ekkor 5-féle lehetséges megfelelő sorrend létezik. Jelölje a az A-sokat és b a B-seket. Megfelelő sorrendek: $bbbaaa$, $bbabaa$, $bbaaba$, $babbaa$, $bababa$. Mivel az azonos osztálybeli diákokat meg kell különböztesssük, ezért a 3-3 azonos osztálybeli diákot sorba-rendezhetjük egymás között, azaz az ötöt meg kell szoroznunk $3! \cdot 3!$ -al. Így a tanár 180-féle sorrendnél mondhatta azt, hogy a B-sek pontszámainak összege nagyobb, mint az A-soké.

D14. Dorka leírt egy papírra néhány különböző pozitív egész számot az alábbi tulajdonsággal: Lili bármely $2 \leq K \leq 100$ egész számra is gondol, tud találni a Dorka által leírt számok között néhány különbözőt (legalább egyet), melyeknek a szorzata éppen K. Legkevesebb hány számot írt le Dorka?

Megoldás: Ha Lili egy prímszámra gondolt, akkor azt csak úgy tudjuk előállítani szorzatként, ha maga ez a prímszám szerepel a Dorka által leírt számok között. Sőt, ha Lili egy prím négyzetére gondolt, ennek a számnak is szerepelnie kell a papíron, hiszen csak különböző számokat szabad összeszorozni, egy számot saját magával nem szabad.

A prímszámok 2 és 100 között: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, ami 25 db szám. A prímszámok négyzetei 2 és 100 között: $4, 9, 25, 49$, ami 4 db szám.

Ha egy p prímszám negyedik hatványa is kisebb 100-nál, akkor az csak $p \cdot p^3$, vagy p^4 szorzatalakban állhat elő, ezért p^3 vagy p^4 is a papíron kell, hogy szerepeljen. Ez $p = 2, 3$-ra igaz, így legalább 31 számot kell leírni. Amennyiben a fent felsorolt számokon kívül még Dorka leírja a 16-ot és a 81-et, azzal már minden számot elő tud állítani, mert minden 100-nál nem nagyobb számban a 3-nál nagyobb prímtényezők legfeljebb második, a 2 és 3 legfeljebb negyedik hatványon szerepel, és ezek a prímhatványok előállnak a fenti számokból.

D15. Töltsétek ki a táblázat mezőit az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számjegyekkel úgy, hogy minden sorban és oszlopban minden számjegy pontosan egyszer szerepeljen, és a táblázaton kívülre írt számok azt mutassák, hogy mi a legnagyobb szám, ami előáll az adott sorban/oszlopban két szomszédos mezőben álló szám különbségeként. **Válaszként azt a négyjegyű számot adjátok meg, amit az ábrán szürkével jelölt négy mezőben lévő számjegyek fentről lefelé történő összeolvasásával kaptok!**

	3		3	1		
5						
2						1
5						
3					2	

Megoldás:

	3		3	1		
5				6		
2	2	4	6	5	3	1
5				4		
				3		
				2		
3				1	2	

I. Az 1-es mellé csak 2-es vagy 3-as mehet a különbség miatt, de a 2-est kizárja az oszlopban található 2-es. A 4. oszlopban a különbség miatt csak sorrendben követhetik egymást a számok, és amennyiben fordítva lennének, az utolsó sorban 2-es és 6-os kerülne egymás mellé, ami a sorra vonatkozó 3-as miatt nem lehet. A 2. sorban az első három helyre a 2, 4 és 6 kerül, ebben a sorrendben, mivel a 2-es és a 6-os nem lehet szomszéd, és a 2-es nem kerülhet az 5-ös mellé.

	3		3	1		
5				6	1	
2	2	4	6	5	3	1
5	1	6		4		
	4			3		
				2		
3				1	2	

II. Mivel 5 különbség kizárólag 6-ból 1-ként jöhet ki ezekből a számokból, az 1. sorban mindenképpen egymás mellett van az 1-es és a 6-os, de az egyes nem kerülhet a 3. oszlopba a 6-os mellé az oszlopra vonatkozó 3-as miatt. A 3. sorra vonatkozó 5-ös miatt az 1-es és a 6-os egymás mellett állnak, az 1-es miatt csak a 4-estől balra lehetnek és ott a 6-os csak a 2. oszlopban lehet az oszlopokra vonatkozó számok miatt, és ezután az 1-es sem lehet 3. oszlopban. Az 1. oszlop 4. eleme nem lehet 2-es vagy 3-as, szóval az oszlopra vonatkozó szám miatt 4-es.

	3		3	1		
5				6	1	
2	2	4	6	5	3	1
5	1	6		4		
	4	1	2	3		
			1	2		
3	6			1	2	

III. A 3. oszlopban az 1-es a többi 1-es miatt már csak két helyre kerülhet. Ha a 4. helyre kerül, akkor a 3. oszlopra és a 6. sorra vonatkozó számok miatt az 5., illetve 6. helyre csak 3-as és 4-es kerülhet, ezért a 3. helyre 2-esnek kéne kerülnie, ami nem mehet a 6-os mellé. Tehát a 3. oszlopban a 5. helyre kerül az 1-es, és ez alapján a 2. oszlopban a 4. helyre. A 3. oszlop 4. helyére nem kerülhet 3-as vagy 4-es, tehát, 2-esnek kell lennie. Az utosó sorban a korábban beírt 6-osok és a sorra vonatkozó szám miatt csak az 1. helyre kerülhet 6-os.

	3		3	1		
5		2		6	1	
2	2	4	6	5	3	1
5	1	6	3	4		2
	4	1	2	3		
			1	2	4	
3	6			1	2	

IV. A 3. sorban a korábban beírt 2-esek alapján a 2-es csak az utolsó helyre kerülhet. A korábban beírt 2-esek miatt az 1. sorban a 2-es csak a 2. helyre kerülhet, illetve a korábban beírt 4-esek miatt az 5. oszlopban a 4-es csak a 5. helyre kerülhet. Ezenkívül a korábban beírt 3-asok miatt a 3. sorban a 3-as csak a 3. helyre kerülhet.

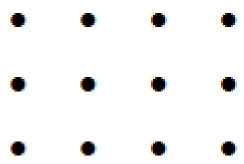
	3		3	1		
5	3	2	5	6	1	4
2	2	4	6	5	3	1
5	1	6	3	4	5	2
	4	1	2	3	6	5
	5	3	1	2	4	6
3	6	5	4	1	2	3

V. A 3. oszlopban az 1-es alá az oszlopra vonatkozó szám miatt csak 4-es kerülhet, ami után a másik hiányzó 4-es is beírható. Innen pedig néhány lépés alatt kitölthetőek a maradék hiányzó mezők.

Tehát a keresett négyjegyű szám a 2563.

D16. A jobb oldali ábrán szereplő 3×4-es rács 12 pontját összekötöttük valamilyen sorrendben úgy, hogy egy olyan sokszöget kaptunk, melynek kerülete minden rácsponton pontosan egyszer halad át és minden csúcsa a pontok egyike. Hányféle lehetett a kapott sokszög?

A sokszög kerülete nem lehet önmetsző, és nem is érintkezhet saját magával. A forgatással vagy tükrözéssel egymásba



vihető eseteket is különbözőnek tekintjük.

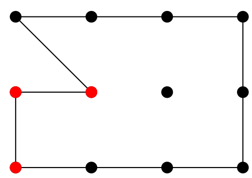
Megoldás: Megkülönböztetjük a középső két pontot és a szélen lévő 10 pontot. Nézzük a keletkezett sokszöget, és vegyük a kerületén lévő rácspontokat az óramutató járásával megegyező sorrendben. Ha ebből a körsorrendből kivesszük a két középső pontot, akkor ez megegyezik a külső pontok eredeti óramutató járása szerinti sorrendjével, mivel a sokszög önátmetszésmentes.

Az összes lehetséges sokszöget meghatározza a sorrend, amiben áthalad a 12 csúcson, így a fenti észrevétel miatt csak az számít, hogy a szélén lévő 10 csúcs körsorrendjébe hova szúrjuk be a két középső csúcsot.

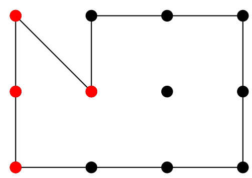
Emiatt azt kell megvizsgálni, hogy mely beszúrások megvalósíthatóak.

Bontsuk esetekre aszerint, hogy a bal oldali középső pont melyik két szélső pont között van a sokszög kerületén. A vízszintes középső egyenesre tengelyesen szimmetrikus az ábra, ezért csak azon eseteket nézzük meg, amikor a bal oldali középső pont két olyan pont közé van beszúrva, melyek egyike sem alsó sorbeli.

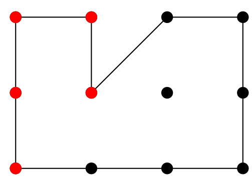
1. eset:
   Ha a keret két bal oldali pontjával van összekötve:
   Ekkor a jobb oldali középső pont bármely két pont közé beszúrható a kerületen, kivéve az ábrán három pirossal jelölt csúcs közül két szomszédos közé, hiszen akkor a keletkezett sokszög két oldala érintené egymást. Ezért ilyenkor 9 lehetséges 12-szög van.



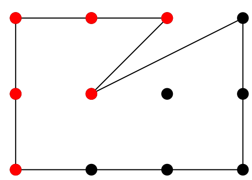
2. eset:
   Ha a keret bal felső sarkával és az attól jobbra lévő ponttal van összekötve:
   Ekkor a jobb oldali középső pont bármely két pont közé beszúrható a kerületen, kivéve az ábrán négy pirossal jelölt csúcs közül két szomszédos közé, hiszen akkor a keletkezett sokszög két oldala érintené egymást. Ezért ilyenkor 8 lehetséges 12-szög van.



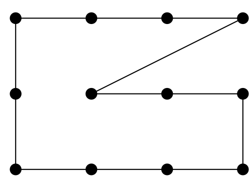
3. eset:
   Ha a keret két felső középső pontjával van összekötve:
   Ekkor a jobb oldali középső pont bármely két pont közé beszúrható a kerületen, kivéve az ábrán öt pirossal jelölt csúcs közül két szomszédos közé, hiszen akkor a keletkezett sokszög két oldala érintené egymást. Ezért ilyenkor 7 lehetséges 12-szög van.



4. eset:
   Ha a keret felső sorának két jobb oldali pontjával van összekötve:
   Ekkor hasonlóan a piros színű pontok közé nem szúrható be a jobb oldali középső pont, ez 6 lehetőség.



5. eset:
   Ha a keret jobb felső sarkával és jobb középső pontjával van összekötve:
   Ekkor a bal oldali középső pont csak azon két csúcs között lehet, amelyen szerepel az ábrán, ezért így csak 1 lehetőség van.



Ez összesen $9 + 8 + 7 + 6 + 1 = 31$ lehetőség, de minden esethez párosítható az az eset, amikor a bal oldali középső pont a függőlegesen tükrözött pontpárhoz van hozzákötve, így összesen $2 \cdot 31 = 62$ módon rajzolható meg ez a sokszög.