XVII. DÜRER VERSENY

E KATEGÓRIA

VÁLTÓ MEGOLDÁSOK

DÖNTŐ – 2024. 02. 09–11.

E1. A Quadropoly nevű társasjátékban Csaba börtönbe került. Egy játékos úgy próbálhat meg kiszabadulni a börtönből, hogy egyszerre dob két szabályos dobókockával. A próbálkozás akkor sikeres, ha a dobott számok összege 4-gyel osztható. Mennyi annak a valószínűsége, hogy Csaba első próbálkozásra kiszabadul? **Válaszként a tört legegyszerűbb alakjában a számláló és a nevező összegét adjátok meg!**

Megoldás: Ha egy kockával dobunk, bármelyik szám valószínűsége $\frac{1}{6}$. Két kocka esetén 36 azonos valószínűségű esetet tudunk felsorolni, így például $\frac{1}{36}$ annak az esélye, hogy az első kockával 3-ast, a második kockával 4-es dobunk. Mindkettő dobókockán egy 1 és 6 közötti számot látunk, tehát az összegük 2 és 12 között van. Csaba akkor szabadul ki, ha a számok összege 4, 8 vagy 12.

$4 = 1+3 = 2+2 = 3+1$ – annak a valószínűsége, hogy az összeg 4: $\frac{3}{36}$

$8 = 2+6 = 3+5 = 4+4 = 5+3 = 6+2$ – annak a valószínűsége, hogy az összeg 8: $\frac{5}{36}$

$12 = 6+6$ – annak a valószínűsége, hogy az összeg 12: $\frac{1}{36}$

Összesen: $\frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{1}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$, amiben a számláló és a nevező összege $1+4=5$.

E2. Kartal egy 5×5-ös táblázat mezőit kitölti 1-től 25-ig az egész számokkal, minden mezőbe egy számot írva és minden számot egyszer felhasználva. Ezek után Benedek minden sor után, Dani pedig minden oszlop alá odaírja a benne szereplő számok összegét. Jóska kivonja a Benedek által leírt legnagyobb számból a Dani által leírt legkisebb számot. Mi a lehető legnagyobb szám, amit Jóska eredményül kaphatott?

Megoldás: Vegyük észre, hogy bárhogy választunk ki egy sort és egy oszlopot, lesz egy közös mezőjük. Ezt a mezőt egyszer hozzáadtuk, egyszer kivontuk, így a végeredményből kiesik. Nézzük a Benedek-féle legnagyobb sor másik 4 mezőjét (cél, hogy ezek összege a lehető legnagyobb legyen), és ebből vonjuk ki a Dani-féle legkisebb oszlop másik 4 mezőjét (cél, hogy ezek összege a lehető legkisebb legyen). A legjobb, amit kaphatunk, $25+24+23+22-(1+2+3+4) = 25+24+23+22-10 = 84$.

E3. Egy digitális kijelző egy 1 és 9999 közti egész számot képes kijelezni, és egyesével számol másodpercenként, vagy mindig növekvő, vagy mindig csökkenő irányban. Sajnos az egyesek helyiértékén álló számjegynek kiégett a jobb felső vonalkája (minden más működik). Béla valamennyi ideig folyamatosan nézte a kijelzőt, és ez alapján nem tudta eldönteni, hogy a számlálás felfelé, vagy lefelé megy-e. Legfeljebb hány különböző számot próbált a kijelző megjeleníteni ezalatt? *Amikor a kijelző eléri növekvő irányban a 9999-et, vagy csökkenő irányban az 1-et, megáll. A kijelző a szám előtt nem jelez ki nullákat, és a négy rész rendre az ezresek, százasok, tízesek és egyesek helyén lévő számjegyet mutatja.*

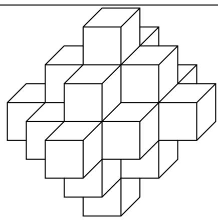
A bal oldalon látható példaként, hogy a kijelző hogyan jelzi ki a 637 számot. A jobb oldalon pedig az látszik, hogy a kijelző (ha minden pálcika jól működne) melyik számjegyet hogyan jelezné ki.

Megoldás: A kiégett vonalka miatt a kijelzőn ugyanúgy jelenik meg az ötös és a kilences, illetve a hatos és a nyolcas számjegy. Ha az egyes helyiértéken lévő szám ötöstől nő kilencesig, vagy ha kilencestől csökken ötösig, eközben nem dönthető el, hogy melyik eset áll fenn, hiszen a nagyobb helyiértéken álló számok sem változnak eközben. Lehetséges tehát, hogy öt számot is megjelenített a képernyő, amíg Béla nézte azt.

Ha a kijelző egyes helyiértéke nulla és négy közöttről indul (a határokat is beleértve), amikor Béla ránéz, akkor rögtön az első változásnál eldönthető, hogy nő vagy csökken (mivel ezen számok nem keverhetőek össze semelyik másik számmal sem, illetve két-két szomszédjuk sem keverhető össze egymással). Így tehát elég olyan számlálásokat vizsgálni, amelyeknél a kijelző egyes helyiértéke öt és kilenc közöttről indul. Egy ilyen lefelé menő számlálás utolsó számjegye legfeljebb öt lépés alatt elér négyesre. Hogyha a kijelző egyes helyiértéke eljut a négyes számjegyig, akkor már meg tudjuk mondani, hogy a számlálás felfelé vagy lefelé megy. Ezért legfeljebb öt hosszú lehet egy olyan számsorozat, amelyről nem dönthető el, hogy nő vagy csökken, azaz legfeljebb 5 különböző számot próbált a kijelző megjeleníteni ezalatt.

E4. Összeragasztottunk 25 szabályos dobókockát az ábrán látható módon úgy, hogy bármely két összeragasztott lapon a pöttyök száma megegyezik. Legfeljebb mennyi lehet a felszínen található pöttyök száma?

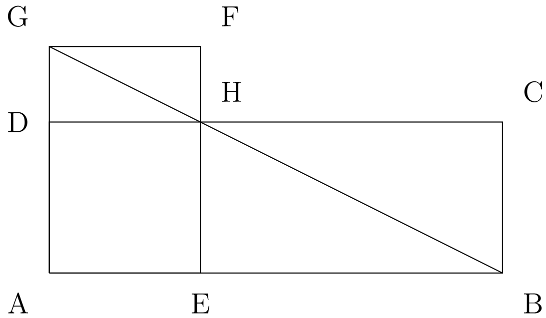
A pöttyöktől eltekintve a test a másik irányból nézve is ugyanígy néz ki. Egy dobókockát szabályosnak nevezünk, ha a szemközti lapokon a pöttyök száma összesen 7.



Megoldás: Mivel az összeragasztott oldalakon azonos számú pötty van, és a ”kockaoszlopok” páratlan számú kockából állnak, így minden összeragasztott ”kockaoszlop” két végén a pöttyök száma 7 (állandó). A ”kockaoszlopok” három irányban állnak. Bármely irányból nézve az alakzatot, azonos számú kockaoldal látszik (13). Minden látszódó kockaoldal pontosan egy irányból nézve egy ”kockaoszlop” vége. A felszínen található pontok száma: $7 \cdot 3 \cdot 13 = 273$.

E5. Adottak az $ABCD$ és $AEFG$ téglalapok úgy, hogy E az AB szakasz, D pedig az AG szakasz belső pontja. Legyen az EF és CD szakaszok metszéspontja H. Tudjuk, hogy $AEHD$ egy négyzet, aminek a területe 36 egység, továbbá az $ABCD$ téglalap területe 10-szerese az $AEFG$ téglalap területének. Hány egység hosszú az AB szakasz, ha a B, H, G pontok egy egyenesen vannak?

Megoldás:



Legyen T_1 az $ABCD$ téglalap területe, T_2 pedig az $AEFG$ téglalap területe. Jelölje x az EB szakasz hosszát, y pedig a DG szakasz hosszát.

$AEHD$ négyzet területe 36, ezért $AE = AD = 6$, ekkor $T_1 = 6 \cdot (6 + x)$ és $T_2 = 6 \cdot (6 + y)$, továbbá $T_1 = 10 \cdot T_2$, azaz $6 \cdot (6 + x) = 10 \cdot 6 \cdot (6 + y)$, ebből jön $y = \frac{x-54}{10}$.

A B, H, G pontok egy egyenesre esnek, ezért DHG és EBH háromszögek hasonlóak, emiatt $\frac{EH}{EB} = \frac{DG}{DH}$, behelyettesítve $\frac{6}{x} = \frac{y}{6}$, átrendezve $xy = 36$. Ebbe beírva $y = \frac{x-54}{10}$-t, azt kapjuk, hogy $x \cdot \frac{x-54}{10} = 36 \Rightarrow x^2 - 54x - 360 = 0$.

Ez az alábbi módon szorzattá alakítható: $(x - 60)(x + 6) = 0$, és mivel $x > 0$, csak $x = 60$ lehet. Tehát a végeredmény $AB = 6 + x = 66$.

E6. Egy számot nevezzünk *kacsaszámnak*, ha a számot visszafelé kiolvasva az eredetinél nagyobb számot kapunk. Csak az 1-es és 2-es számjegyek felhasználásával hány 14 jegyű kacsaszám írható le?
Például a 37145 *kacsaszám, mert* $54173 > 37145$.

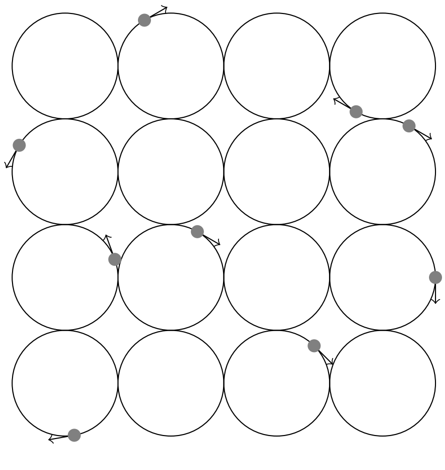
Megoldás: Ha egy szám palindrom (azaz visszafelé felírva ugyanaz, mint előre), akkor nyilván nem lehet kacsaszám. A csak 1-esből és 2-esből álló 14-jegyű palindromok száma 2^7, hiszen egy 14-jegyű palindromot egyértelműen meghatároz az első 7 jegye.
Egy számot nevezzük *libaszámnak*, ha a számjegyeit visszafelé felírva az eredetinél kisebb számot kapunk. Egy kacsaszámot visszafelé felírva mindig libaszámot kapunk, továbbá egy libaszámot visszafelé felírva mindig egy kacsaszámot kapunk (hiszen ha egy szám számjegyeit felírjuk visszafelé, majd az új számmal ezt ismét megtesszük, önmagát kapjuk). Mivel így a kacsa- és libaszámok párosítva lettek, a nem-palindromoknak pontosan a fele lesz kacsaszám. Tehát a csak 1-esből és 2-esből álló 14-jegyű kacsaszámok száma: $\frac{2^{14}-2^7}{2} = 8128$.

E7. Egy kardhalnak speciális viszonya van a 8-as számmal, így pontosan azok a háromjegyű számok a kedvencei, melyekre maga a szám, a számjegyek összege, és a számjegyek szorzata is osztható 8-cal, de a számban nincsen 8-cal osztható számjegy. Mennyi a kardhal kedvenc számainak összege?

Megoldás: Mivel a számban nincsen nyolccal osztható számjegy, ezért 0 és 8 nem szerepelhet benne. Emellett tudjuk, hogy a három számjegy szorzata osztható nyolccal, azaz legalább két számjegy páros kell, hogy legyen, különben nem szerepelne a számjegyek szorzatában legalább három darab kettes prímtényező. Mivel a számjegyek összege is nyolccal osztható és van legalább két páros számjegye, ezért a harmadik számjegy is páros lesz. Így a szorzatuk mindenképpen osztható lesz 8-cal. A számban a 2, 4 és 6 számjegyek szerepelhetnek. A számjegyek összege nyolccal osztható, azaz 8 vagy 16 (mivel legalább $2 + 2 + 2 = 6$ és legfeljebb $6 + 6 + 6 = 18$). Így a szám állhat két 6-osból és egy 4-esből vagy pedig két 2-esből és egy 4-esből. Ezek a számok a 224, 242, 422, 466, 646 és a 664, amelyek közül a 224 és a 664 osztható nyolccal, így ezek a kardhal kedvenc számai. A kardhal kedvenc számainak összege $224 + 664 = 888$.

E8. Az ábrán látható körvonalakon 9 hangya járkál, mindannyian azonos, állandó sebességgel, anélkül, hogy megfordulnának vagy megállnának. Amikor egy hangya két kör érintési pontjára ér, választhat, hogy a két egymást érintő körvonal közül melyiken halad tovább előre, de ekkor sem fordulhat meg. Amikor két hangya szembetalálkozik egymással, akkor az egyik átmászik a másikon, és ha útjuk során korábban még nem találkoztak, akkor egyikük felkiált. Legfeljebb hányszor kiálthatnak fel a hangyák összesen, ha kezdetben az ábrán látható helyekről a megjelölt irányokba indulnak el?

Tudjuk, hogy a megadott kezdőhelyzetből indulva nem fordulhat elő olyan, hogy két hangya úgy találkozik, hogy éppen ugyanabba az irányba néznek.



Megoldás: Egy hangya egy körön óramutató járásával megegyezően vagy ellentétesen mehet. Amikor egy hangya kört vált, akkor a haladási iránya mindig megváltozik, amikor pedig nem vált kört, akkor nem változik. Ezért sakktáblaszerűen váltakoznak egy adott hangya esetén az óramutató járásával megegyező és ellentétes irányú haladási irányok az ábrán. Így egy adott kezdőpontból induló hangya esetén csak a kiindulási helyzetből egyértelműen következik, hogy a hangya melyik körön melyik irányba halad, ha arra jár.

A második sorban levő két hangya a bal felső körön óramutató járásával megegyezően megy, a többi hét hangya mind ellentétesen. A feltétel miatt az ugyanolyan irányba néző hangyák nem találkoznak, ezért csak a két különböző irányú csoportba tartozó hangyák találkozhatnak. Közülük pedig mindenki találkozhat mindenkivel a másik csoportból. Példa erre, ha az összes hangya ugyanazon a körön mászik.

Ezért a válasz 14, a 2 hangya egyenként mind a 7 másik hangyával találkozhat.

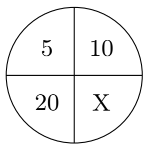
E9. Legyen N a legkisebb olyan pozitív egész, melynek fele négyzetszám, harmada köbszám, ötöde pedig egy egész szám ötödik hatványa. Hány pozitív osztója van N-nek?

Megoldás: A feladatban a legkisebb olyan n számot keressük, amire $n = 2 \cdot k^2 = 3 \cdot l^3 = 5 \cdot m^5$ valamilyen k, l és m egészekre. Ismert, hogyha egy t-edik hatvány osztható egy p prímmel, akkor p^t-nel is.
Mivel n fele, harmada és ötöde is egész, ezért osztható 2-vel, 3-mal és 5-tel is. A prímtényezős felbontás egyértelműsége miatt l^3-ben és m^5-ben ugyanannyiadik hatványon kell, hogy szerepeljen a 2, viszont mivel ezek rendre 3. és 5. hatványok, ezért n prímtényezős felbontásában a 2 kitevője osztható kell, hogy legyen 3-mal és 5-tel, azaz 15-tel is. Ehhez hasonlóan igazolható, hogy n oszható 3^{10}-nel és 5^6-nal is.
Az előzőekből következik, hogy n legalább $2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6$ (ugyanis többszöröse ennek a számnak). Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a szám teljesíti a feladat feltételeit. Az osztóinak száma pedig az ismert képlet alapján: $(15 + 1) \cdot (10 + 1) \cdot (6 + 1) = 1232$.

E10. Egy iskolából egy egyéni matematikaversenyen a 12.a és 12.b osztályokból három-három tanuló vett részt. Tudjuk, hogy a diákok a versenyen hat különböző pontszámot értek el, így a helyezéseik is különböznek. Matematikatanáruk csak a hat helyezés ismeretében megállapította, hogy a 12.b osztályosok pontszámainak összege nagyobb a 12.a osztályosok pontszámainak összegénél. Hányféle lehetett a hat diák sorrendje a versenyen?
A versenyen két versenyző közül az végez előrébb, akinek több pontja van. Ha két versenyzőnek ugyanannyi pontja van, akkor ugyanannyiadik helyen végeznek. A tanár a versenyen elérhető maximális pontszámot sem ismeri.

Megoldás: A tanár akkor tudja biztosra azt mondani, hogy a B-sek pontszámainak összege nagyobb, mint az A-soké, ha az osztályokon belül is rangsorolva a diákokat az ugyanannyiadik helyezést elérő B-s diákok megelőzik az A-s diákokat, azaz az első B-s előrébb végez, mint az első A-s és így tovább. Ne különböztessük meg az azonos osztálybeli diákokat. Ekkor 5-féle lehetséges megfelelő sorrend létezik. Jelölje a az A-sokat és b a B-seket. Megfelelő sorrendek: *bbbaaa*, *bbabaa*, *bbaaba*, *babbaa*, *bababa*. Mivel az azonos osztálybeli diákokat meg kell különböztesssük, ezért a 3-3 azonos osztálybeli diákot sorbarendezhetjük egymás között, azaz az ötöt meg kell szoroznunk $3! \cdot 3!$ -al. Így a tanár 180-féle sorrendnél mondhatta azt, hogy a B-sek pontszámainak összege nagyobb, mint az A-soké.

E11. Morgan kapitány a jobb oldalon látható, négy szektorból álló táblára 9 nyilat dobott. Ha egy nyíl eltalálta a táblát, akkor a nyíl pontértéke megegyezik az eltalált szektoron látható számmal. Ha egy nyíl nem találta el a táblát, akkor az nem ér pontot. Hányféle pozitív egész szám állhat az X helyén, ha Morgan összesen 175 pontot ért el? *A szektorok határait nem találta el Morgan.*



Megoldás: Először indirekt tegyük fel, hogy csupán az 5, 10, 20 szektorokból elő tudjuk állítani a 175 összeget. Ha mind a 9 találat a 20-as szektort éri, akkor az összeg 180. Bármi ennél kisebb összeg eléréséhez az egyik 20-as helyett legfeljebb egy 10-eset kellett volna dobnia, de azzal már legfeljebb 170-re csökkenne az összeg. Ellentmondás.
Tehát Morgan kapitánynak el kellett találnia az X mezőt legalább egyszer.
Először számoljuk meg azokat az 5-tel osztható számokat, amik kerülhetnek X helyére. A fenti gondolatmenet szerint 5, 10 és 20 nem jön szóba. Azt állítjuk, hogy minden más lehet, ami legfeljebb 175. Vegyünk egy tetszőleges ilyen X értéket.
Ha X $20k + 15$ alakú ($0 \leq k \leq 8$), akkor egy X dobás mellé legfeljebb 8 darab 20-as dobással el lehetett érni a 175-öt.
Ha X $20k$ alakú, és $k \neq 1$, azaz $2 \leq k \leq 8$, akkor egy X, egy 5-ös, egy 10-es és legfeljebb hat 20-as dobással szintén eljutunk a 175-ig.

Ha X $20k+5$ alakú ($1 \le k \le 8$), akkor egy X, egy 10-es, és legfeljebb hét 20-as dobással 175-öt tudunk kapni.
Végül, ha X $20k+10$ alakú ($1 \le k \le 8$), akkor egy X, egy 5-ös, és legfeljebb hét darab 20-as dobással 175-be jutunk.

Így X tényleg minden 5-tel osztható szám lehet 175-ig az 5, 10 és 20 kivételével, ami 32 lehetőség. Ha X nem osztható 5-tel, akkor mivel az összes többi dobás, és a végső 175 pont is 5-tel osztható, így ez csak úgy lehetséges, hogy 5-tel osztható számú X-et dobott Morgan, azaz jelen esetben pontosan 5-öt. Ekkor a lehetséges X-eket úgy határozhatjuk meg, hogy megnézzük, hogy legfeljebb négy dobással, amik mind az 5, 10, 20 pontok valamelyikébe mentek, hány pontot érhetett el, és ezeket a lehetőségeket levonjuk a 175-ből és 5-tel osztjuk.
Nem nehéz látni, hogy legfeljebb négy szám összege, melyek mindegyike 5, 10 vagy 20, minden nemnegatív, 5-tel osztható, 80-nál nem nagyobb szám lehet, kivéve a 75. Ez a fenti gondolatmenethez hasonlóan látható, azaz $20k$ alakú számokat csak 20-as dobásokkal megkaphatunk, $20k+5$ alakúakat egy 5-ös és 20-as dobásokkal, $20k+10$ alakúakat egy 10-es és 20-as dobásokkal, és $20k+15$ esetén egy 5-ös, egy 10-es, és 20-as dobásokkal, azonban 75-re ez már 5 dobás lenne, és azt nem is lehet négyből. Tehát a 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 80 számok állíthatóak elő legfeljebb 4 dobásból, amihez az X értékére a következő lehetőségeket kapunk (ezeket kivonjuk 175-ből, és 5-tel osztjuk): 35, 34, 33, 32, 31, 30, 29, 28, 27, 26, 25, 24, 23, 22, 21, 19. Ez 16 szám, de ebből a 35, 30, 25 már korábban volt, mivel 5-tel osztható, így ez 13 új megoldást ad.
Tehát összesen $32 + 13 = 45$ megoldás van.

E12. Töltsétek ki a táblázat mezőit az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számjegyekkel úgy, hogy minden sorban és oszlopban minden számjegy pontosan egyszer szerepeljen, és a táblázaton kívülre írt számok azt mutassák, hogy mi a legnagyobb szám, ami előáll az adott sorban/oszlopban két szomszédos mezőben álló szám különbségeként. **Válaszként azt a négyjegyű számot adjátok meg, amit az ábrán szürkével jelölt négy mezőben lévő számjegyek fentről lefelé történő összeolvasásával kaptok!**

	3		3	1		
5						
2						1
5						
3					2	

Megoldás:

	3		3	1		
5				6		
2	2	4	6	5	3	1
5				4		
				3		
				2		
3				1	2	

I. Az 1-es mellé csak 2-es vagy 3-as mehet a különbség miatt, de a 2-est kizárja az oszlopban található 2-es. A 4. oszlopban a különbség miatt csak sorrendben követhetik egymást a számok, és amennyiben fordítva lennének, az utolsó sorban 2-es és 6-os kerülne egymás mellé, ami a sorra vonatkozó 3-as miatt nem lehet. A 2. sorban az első három helyre a 2, 4 és 6 kerül, ebben a sorrendben, mivel a 2-es és a 6-os nem lehet szomszéd, és a 2-es nem kerülhet az 5-ös mellé.

	3		3	1		
5				6	1	
2	2	4	6	5	3	1
5	1	6		4		
	4			3		
				2		
3				1	2	

II. Mivel 5 különbség kizárólag 6-ból 1-ként jöhet ki ezekből a számokból, az 1. sorban mindenképpen egymás mellett van az 1-es és a 6-os, de az egyes nem kerülhet a 3. oszlopba a 6-os mellé az oszlopra vonatkozó 3-as miatt. A 3. sorra vonatkozó 5-ös miatt az 1-es és a 6-os egymás mellett állnak, az 1-es miatt csak a 4-estől balra lehetnek és ott a 6-os csak a 2. oszlopban lehet az oszlopokra vonatkozó számok miatt, és ezután az 1-es sem lehet 3. oszlopban. Az 1. oszlop 4. eleme nem lehet 2-es vagy 3-as, szóval az oszlopra vonatkozó szám miatt 4-es.

	3		3	1		
5				6	1	
2	2	4	6	5	3	1
5	1	6		4		
	4	1	2	3		
			1	2		
3	6			1	2	

III. A 3. oszlopban az 1-es a többi 1-es miatt már csak két helyre kerülhet. Ha a 4. helyre kerül, akkor a 3. oszlopra és a 6. sorra vonatkozó számok miatt az 5., illetve 6. helyre csak 3-as és 4-es kerülhet, ezért a 3. helyre 2-esnek kéne kerülnie, ami nem mehet a 6-os mellé. Tehát a 3. oszlopban a 5. helyre kerül az 1-es, és ez alapján a 2. oszlopban a 4. helyre. A 3. oszlop 4. helyére nem kerülhet 3-as vagy 4-es, tehát, 2-esnek kell lennie. Az utosó sorban a korábban beírt 6-osok és a sorra vonatkozó szám miatt csak az 1. helyre kerülhet 6-os.

	3		3	1		
5		2		6	1	
2	2	4	6	5	3	1
5	1	6	3	4		2
	4	1	2	3		
			1	2	4	
3	6			1	2	

IV. A 3. sorban a korábban beírt 2-esek alapján a 2-es csak az utolsó helyre kerülhet. A korábban beírt 2-esek miatt az 1. sorban a 2-es csak a 2. helyre kerülhet, illetve a korábban beírt 4-esek miatt az 5. oszlopban a 4-es csak a 5. helyre kerülhet. Ezenkívül a korábban beírt 3-asok miatt a 3. sorban a 3-as csak a 3. helyre kerülhet.

	3		3	1		
5	3	2	5	6	1	4
2	2	4	6	5	3	1
5	1	6	3	4	5	2
	4	1	2	3	6	5
	5	3	1	2	4	6
3	6	5	4	1	2	3

V. A 3. oszlopban az 1-es alá az oszlopra vonatkozó szám miatt csak 4-es kerülhet, ami után a másik hiányzó 4-es is beírható. Innen pedig néhány lépés alatt kitölthetőek a maradék hiányzó mezők.

Tehát a keresett négyjegyű szám a 2563.

E13. Azonos méretű kiskockákból összeragasztottunk egy $3 \times 3 \times 5$-ös téglatestet, melynek a középső kiskockája piros színű, a többi kiskocka pedig sárga, azonban mind különböző árnyalatú.
Anita leszedett ebből néhány kiskockát (legalább egyet) úgy, hogy egy olyan téglatest maradt, amelynek a felszínén nem látható piros szín. Hányféleképpen nézhetett ki a kapott téglatest?
Anita a téglatest aljáról is szedhetett le kiskockát, és a megmaradt téglatest minden lapja látható volt.

Megoldás: Először számoljuk meg, hogy Anita megkötések nélkül hány különböző módon választhatta ki a megmaradt téglatestet: minden lapjának megválaszthatja szabadon a koordinátáját, így függőlegesen $5 + 1 = 6$ lehetőségből kell egy alját és egy tetejét választani, ezt $\binom{6}{2} = 15$-féleképpen teheti meg. Hasonlóan a második koordinátairányban 4 lehetőség van a két határra, így $\binom{4}{2} = 6$ választás van, ugyanígy a harmadik koordinátairányban is, ezért összesen $15 \cdot 6 \cdot 6 = 540$ résztéglatest van.

Ha ebből kivonjuk azon résztéglatestek számát, melyek szélén látszik a piros szín, akkor megkapjuk a feladatban keresett számot.

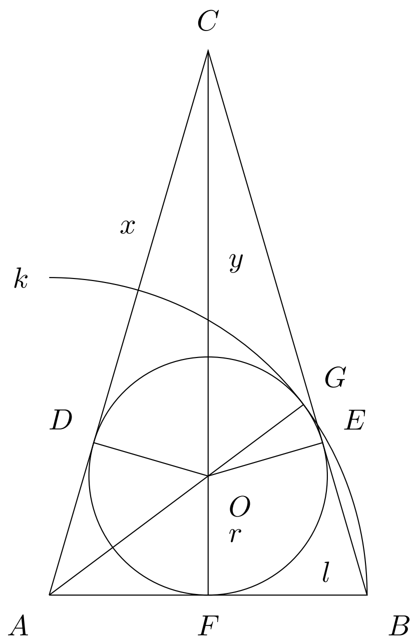
Ahhoz, hogy legyen a szélén piros, meg kell maradnia a piros kockának, az ilyen téglatestek száma $\left(\frac{5+1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3+1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3+1}{2}\right)^2 = 144$, mivel a téglatest alja csak a 3 legalsó szint valamelyike lehet, hasonlóan a teteje csak a felső 3 szint valamelyike. A másik két koordinátában is megfelelő oldalán kell lenni a piros kockának a lapoknak, így minden lap koordinátáját 2-féleképpen lehet megválasztani. Ezeket egymástól függetlenül meg lehet választani, így az összes ilyen téglatest száma a fent kapott szorzat.

Ezek közül nem mind rossz, az olyanokat számoltuk meg feleslegesen, amelyekben benne van a piros kocka, de nem látszik a felszínen. Az ilyen téglatestek a középső 3×3-as kockát biztosan tartalmazzák, ezen kívül az alsó illetve felső $1 \times 3 \times 3$-as szint hozzáadható, ez $2 \cdot 2 = 4$ lehetőség.

Ezért a rossz téglatestek száma $144 - 4 = 140$, a jók száma így $540 - 140 = 400$ lehetne, de a teljes téglát nem hagyhatta meg, így a helyes végeredmény $400 - 1 = 399$.

E14. Az A középpontú k kör sugara 14 egység, és B egy pont a körvonalon. Az ℓ kör érinti az AB szakaszt a felezőpontjában és érinti a k kört is. Legyen C az a pont, melyre az ABC háromszög beírt köre ℓ. Hány egység az ABC háromszög kerülete?

Megoldás:



Az F felezi az AB szakaszt, tehát $AF = 7$. Az AFO háromszög derékszögű (hisz F-ben érinti az AB szakasz az l kört), tehát Pitagorasz tétele alapján: $7^2 + r^2 = AO^2$. Az l és a k kör G-ben érintik egymást, tehát az A, O, G egy egyenesre esnek, ezért $AO + OG = AG$, így $\sqrt{7^2 + r^2} + r = 14 \Rightarrow 7^2 + r^2 = (14 - r)^2 = r^2 - 28r + 196 \Rightarrow 28r = 147 \Rightarrow r = \frac{21}{4}$. Külső pontból húzott érintőkre vonatkozó tétel alapján: $AD = AF$, $CD = CE$, $BF = BE$. Legyen $y = OC$, $x = CD$, $K = 14+(7+x)+(7+x)$ (az ABC háromszög kerülete). Az ABC háromszög egyenlőszárú, tehát $m_{AB} = r+y$, ezért $2 \cdot T_{ABC} = r \cdot K = r \cdot (28 + 2x) = 14 \cdot (r + y) \Rightarrow y = \frac{1}{7}rx + r$. A CDO háromszög derékszögű, tehát $r^2 + x^2 = y^2 = \left(\frac{1}{7}rx + r\right)^2 = \frac{1}{49}r^2x^2 + \frac{2}{7}r^2x + r^2 \Rightarrow (1 - \frac{1}{49}r^2)x^2 = \frac{2}{7}r^2x$, mivel $x \neq 0$, ezért $x = \frac{\frac{2}{7}r^2}{1-\frac{1}{49}r^2} = \frac{\frac{2}{7}\cdot\frac{21}{4}^2}{1-\frac{1}{49}\cdot\frac{21}{4}^2} = \frac{\frac{63}{8}}{(1-\frac{9}{16})} = \frac{\frac{63}{8}}{\frac{7}{16}} = 18$. Tehát $K = 14 + (7 + 18) + (7 + 18) = 64$

E15. Hat település, Arka, Bőcs, Cák, Dég, Ete és Füzér egy út mentén egymás mellett helyezkedik el ilyen sorrendben. Az egymást követő falvak között buszjáratok közlekednek, minden szomszédos pár között állandó gyakorisággal. Ezek a gyakoriságok 5, 7, 9, 11 és 12 perc az öt falupár között, de nem tudjuk, hogy milyen sorrendben. Egy napon Alex, Áron és Benedek három különböző időpontban ment el Arkáról Füzérre ezekkel a buszokkal: Alex 12:00-kor, Áron 12:01-kor, Benedek pedig 13:00-kor ért az arkai buszmegállóhoz. Azt is tudjuk, hogy míg Alex 14:20-kor, addig Áron csak 15:00-kor érkezett Füzérre. Hány perccel Áron után érkezett Benedek Füzérre?
A buszok pontosak, egész percben indulnak és érkeznek, az azonos falvak közt közlekedő buszok menetideje ugyanannyi, az átszállás nem kerül időbe, és mindhárman minden faluban az első lehetséges busszal mentek tovább.

Megoldás: Áron 39 perccel utazott hosszabb ideig, mint Alex. A feltételek alapján Áron maximum 4 percet várhatott az 5 percenként buszhoz tartozó településen (hiszen ha éppen 1 perccel kési le az előzőt, akkor 4-et kel várnia a következőre). Hasonlóan indokolható, hogy a 7 perces megállóban maximum 6 percet kellett várnia, a 9 percesben maximum 8-at, a 11-esben maximum 10-et, a 12-esben pedig maximum 11-et. Tehát Áron maximálisan $4 + 6 + 8 + 10 + 11 = 39$ percet várakozott. Viszont ez csak úgy lehetséges, ha Alex minden járatot pont elért (azaz 0 percet kellett várnia az átszállások miatt).
Meg szeretnénk határozni, hogy melyik két település között milyen gyakoriságú busz közlekedik. Vizsgáljuk meg először, hogy Ete és Füzér közt melyik megy. Ha az n perces, akkor Áron Etén $E-1$ percet várakozott, tehát $39-(E+1)$ átszállási várakozás után ért oda. Viszont Ennek a számnak oszthatónak kell lennie E-vel, mivel Alex 0 percet várakozott és onnantól E percenként mentek a buszok. A járatgyakoriságok közül egyedül az 5 percesre teljesül ez a tulajdonság, tehát Ete és Füzér között 5 percenként járnak buszok és Etére Áron $39-5+1 = 35$ perc várakozás után ért.
Vizsgáljuk meg, hogy Dég és Ete között hány percenként mennek. Az előző indoklás alapján, ha D percenként, akkor $35-D+1$-nek oszhatónak kell lennie D-vel. Ez a megmaradó lehetőségek közül a 9 és a 12 percesre teljesül (és Dégre ebben a két esetben Áron $35-9+1 = 27$, illetve $35-12+1 = 24$ percnyi várakozás után ért). Vizsgáljuk meg a 12 perces esetet: Ekkor, a Cákról Dégre menő C percenként menő buszra teljesülnie kellene annak, hogy $C|24-C+1$, de a buszok közül ez csak az 5 percenként menőre teljesül, amiről viszont már tudjuk, hogy Ete és Füzér között közlekedik. Tehát Dég és Ete között 9 percenként mennek buszok és Dégig Áron 27 percet várakozott.
A Cák és Dég közt C percenként menő buszra teljesül az, hogy $C|27-C+1$, ez a megmaradó 3 busz közül kizárólag a 7 percesre teljesül és így a Cákra érésig 21 percet várt az átszállás miatt Áron. A Bőcs és Cák közt B percenként menő buszra teljesül az, hogy $B|21-B+1$, tehát B csak 11 lehet és ezzel kizárásos alapon kijön az is, hogy Arka és Bőcs közt 12 percenként megy busz.
Benedek Arkáról 60 perccel Alex után indult, így itt nem kellett várakoznia a 12 percenként járó buszra. Azaz Bőcsre is 60 perccel Alex után ért, ahol 11 percenként járnak a buszok, így Cákra már 66 perccel Alex után érkezett. Itt 7 percenként járnak a buszok, tehát Dégre már 70 perccel Alex után ért Benedek, ahol 9 percenként járnak a buszok. Ezáltal Etére 72 perccel Alexet követően ért oda, ahol 5 percenként járnak a buszok, így Füzérre 75 perccel Alex után, így 35 perccel Áron után ért oda Benedek.

E16. Egy hegyesszögű háromszög magasságai 585, 600 és 936 egység hosszúak. Hány egység hosszú a háromszög kerülete?

Megoldás: Jelöljük a három oldalt és a hozájuk tartozó magasságokat rendre a, b, c, m_a, m_b, m_c-vel. A magasságok hosszainak prímtényezős felbontásai $m_a = 585 = 3^2 \cdot 5 \cdot 13$, $m_b = 600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ és $m_c = 936 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13$. Ezek legkisebb közös többszöröse $\text{lkkt} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 13$.
Ekkor legyen x olyan, hogy $2 \cdot T = a \cdot m_a = b \cdot m_b = c \cdot m_c = \text{lkkt} \cdot x$. Ebből kifejezve az oldalakat: $a = 2^3 \cdot 5 \cdot x = 40x$, $b = 3 \cdot 13 \cdot x = 39x$, $c = 5^2 \cdot x = 25x$, vagyis a háromszög félkerülete $s = \frac{a+b+c}{2} = 52x$. Ekkor a területet a Héron-képlettel is számolva kapjuk, hogy $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot x = \frac{1}{2}\text{lkkt} \cdot x = \frac{1}{2} a \cdot m_a = T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{52x \cdot 12x \cdot 13x \cdot 27x} = \sqrt{2^4 \cdot 3^4 \cdot 13^2}x^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot x^2$, azaz $x = 5^2 = 25$. Innen pedig a félkerületet használva kapjuk, hogy a kerület $K = 2s = 2 \cdot 52 \cdot 25 = 2600$.