E+1. Egy számot nevezzünk *kacsaszámnak*, ha a számot visszafelé kiolvasva az eredetinél nagyobb számot kapunk. Csak az 1-es és 2-es számjegyek felhasználásával hány 14 jegyű kacsaszám írható le?
Például a 37145 *kacsaszám, mert* $54173 > 37145$.

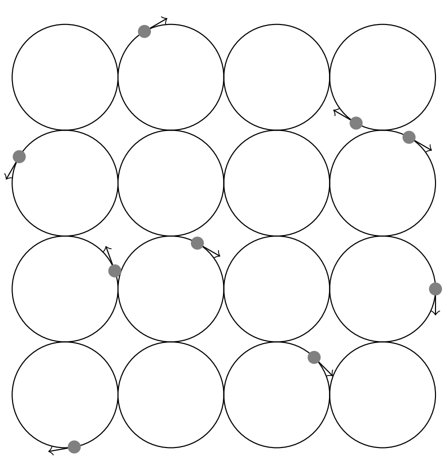
Megoldás: Ha egy szám palindrom (azaz visszafelé felírva ugyanaz, mint előre), akkor nyilván nem lehet kacsaszám. A csak 1-esből és 2-esből álló 14-jegyű palindromok száma 2^7, hiszen egy 14-jegyű palindromot egyértelműen meghatároz az első 7 jegye.
Egy számot nevezzük *libaszámnak*, ha a számjegyeit visszafelé felírva az eredetinél kisebb számot kapunk. Egy kacsaszámot visszafelé felírva mindig libaszámot kapunk, továbbá egy libaszámot visszafelé felírva mindig egy kacsaszámot kapunk (hiszen ha egy szám számjegyeit felírjuk visszafelé, majd az új számmal ezt ismét megtesszük, önmagát kapjuk). Mivel így a kacsa- és libaszámok párosítva lettek, a nem-palindromoknak pontosan a fele lesz kacsaszám. Tehát a csak 1-esből és 2-esből álló 14-jegyű kacsaszámok száma: $\frac{2^{14}-2^7}{2} = 8128$.

E+2. Egy kardhalnak speciális viszonya van a 8-as számmal, így pontosan azok a háromjegyű számok a kedvencei, melyekre maga a szám, a számjegyek összege, és a számjegyek szorzata is osztható 8-cal, de a számban nincsen 8-cal osztható számjegy. Mennyi a kardhal kedvenc számainak összege?

Megoldás: Mivel a számban nincsen nyolccal osztható számjegy, ezért 0 és 8 nem szerepelhet benne. Emellett tudjuk, hogy a három számjegy szorzata osztható nyolccal, azaz legalább két számjegy páros kell, hogy legyen, különben nem szerepelne a számjegyek szorzatában legalább három darab kettes prímtényező. Mivel a számjegyek összege is nyolccal osztható és van legalább két páros számjegye, ezért a harmadik számjegy is páros lesz. Így a szorzatuk mindenképpen osztható lesz 8-cal. A számban a 2, 4 és 6 számjegyek szerepelhetnek. A számjegyek összege nyolccal osztható, azaz 8 vagy 16 (mivel legalább $2+2+2=6$ és legfeljebb $6+6+6=18$). Így a szám állhat két 6-osból és egy 4-esből vagy pedig két 2-esből és egy 4-esből. Ezek a számok a 224, 242, 422, 466, 646 és a 664, amelyek közül a 224 és a 664 osztható nyolccal, így ezek a kardhal kedvenc számai. A kardhal kedvenc számainak összege $224+664=888$.

E+3. Az ábrán látható körvonalakon 9 hangya járkál, mindannyian azonos, állandó sebességgel, anélkül, hogy megfordulnának vagy megállnának. Amikor egy hangya két kör érintési pontjára ér, választhat, hogy a két egymást érintő körvonal közül melyiken halad tovább előre, de ekkor sem fordulhat meg. Amikor két hangya szembetalálkozik egymással, akkor az egyik átmászik a másikon, és ha útjuk során korábban még nem találkoztak, akkor egyikük felkiált. Legfeljebb hányszor kiálthatnak fel a hangyák összesen, ha kezdetben az ábrán látható helyekről a megjelölt irányokba indulnak el?

Tudjuk, hogy a megadott kezdőhelyzetből indulva nem fordulhat elő olyan, hogy két hangya úgy találkozik, hogy éppen ugyanabba az irányba néznek.



Megoldás: Egy hangya egy körön óramutató járásával megegyezően vagy ellentétesen mehet. Amikor egy hangya kört vált, akkor a haladási iránya mindig megváltozik, amikor pedig nem vált kört, akkor nem változik. Ezért sakktáblaszerűen váltakoznak egy adott hangya esetén az óramutató járásával megegyező és ellentétes irányú haladási irányok az ábrán. Így egy adott kezdőpontból induló hangya esetén csak a kiindulási helyzetből egyértelműen következik, hogy a hangya melyik körön melyik irányba halad, ha arra jár.

A második sorban levő két hangya a bal felső körön óramutató járásával megegyezően megy, a többi hét hangya mind ellentétesen. A feltétel miatt az ugyanolyan irányba néző hangyák nem találkoznak, ezért csak a két különböző irányú csoportba tartozó hangyák találkozhatnak. Közülük pedig mindenki találkozhat mindenkivel a másik csoportból. Példa erre, ha az összes hangya ugyanazon a körön mászik.

Ezért a válasz 14, a 2 hangya egyenként mind a 7 másik hangyával találkozhat.

E+4. Legyen N a legkisebb olyan pozitív egész, melynek fele négyzetszám, harmada köbszám, ötöde pedig egy egész szám ötödik hatványa. Hány pozitív osztója van N-nek?

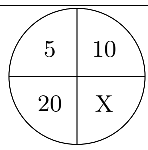
Megoldás: A feladatban a legkisebb olyan n számot keressük, amire $n = 2 \cdot k^2 = 3 \cdot l^3 = 5 \cdot m^5$ valamilyen k, l és m egészekre. Ismert, hogyha egy t-edik hatvány osztható egy p prímmel, akkor p^t-nel is.
Mivel n fele, harmada és ötöde is egész, ezért osztható 2-vel, 3-mal és 5-tel is. A prímtényezős felbontás egyértelműsége miatt l^3-ben és m^5-ben ugyanannyiadik hatványon kell, hogy szerepeljen a 2, viszont mivel ezek rendre 3. és 5. hatványok, ezért n prímtényezős felbontásában a 2 kitevője osztható kell, hogy legyen 3-mal és 5-tel, azaz 15-tel is. Ehhez hasonlóan igazolható, hogy n oszható 3^{10}-nel és 5^6-nal is.
Az előzőekből következik, hogy n legalább $2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6$ (ugyanis többszöröse ennek a számnak). Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a szám teljesíti a feladat feltételeit. Az osztóinak száma pedig az ismert képlet alapján: $(15 + 1) \cdot (10 + 1) \cdot (6 + 1) = 1232$.

E+5. Dorka leírt egy papírra néhány különböző pozitív egész számot az alábbi tulajdonsággal: Lili bármely $2 \leq K \leq 100$ egész számra is gondol, tud találni a Dorka által leírt számok között néhány különbözőt (legalább egyet), melyeknek a szorzata éppen K. Legkevesebb hány számot írt le Dorka?

Megoldás: Ha Lili egy prímszámra gondolt, akkor azt csak úgy tudjuk előállítani szorzatként, ha maga ez a prímszám szerepel a Dorka által leírt számok között. Sőt, ha Lili egy prím négyzetére gondolt, ennek a számnak is szerepelnie kell a papíron, hiszen csak különböző számokat szabad összeszorozni, egy számot saját magával nem szabad.

A prímszámok 2 és 100 között: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, ami 25 db szám. A prímszámok négyzetei 2 és 100 között: $4, 9, 25, 49$, ami 4 db szám.
Ha egy p prímszám negyedik hatványa is kisebb 100-nál, akkor az csak $p \cdot p^3$, vagy p^4 szorzatalakban állhat elő, ezért p^3 vagy p^4 is a papíron kell, hogy szerepeljen. Ez $p = 2, 3$-ra igaz, így legalább 31 számot kell leírni. Amennyiben a fent felsorolt számokon kívül még Dorka leírja a 16-ot és a 81-et, azzal már minden számot elő tud állítani, mert minden 100-nál nem nagyobb számban a 3-nál nagyobb prímtényezők legfeljebb második, a 2 és 3 legfeljebb negyedik hatványon szerepel, és ezek a prímhatványok előállnak a fenti számokból.

E+6. Morgan kapitány a jobb oldalon látható, négy szektorból álló táblára 9 nyilat dobott. Ha egy nyíl eltalálta a táblát, akkor a nyíl pontértéke megegyezik az eltalált szektoron látható számmal. Ha egy nyíl nem találta el a táblát, akkor az nem ér pontot. Hányféle pozitív egész szám állhat az X helyén, ha Morgan összesen 175 pontot ért el? *A szektorok határait nem találta el Morgan.*



Megoldás: Először indirekt tegyük fel, hogy csupán az 5, 10, 20 szektorokból elő tudjuk állítani a 175 összeget. Ha mind a 9 találat a 20-as szektort éri, akkor az összeg 180. Bármi ennél kisebb összeg eléréséhez az egyik 20-as helyett legfeljebb egy 10-eset kellett volna dobnia, de azzal már legfeljebb 170-re csökkenne az összeg. Ellentmondás.
Tehát Morgan kapitánynak el kellett találnia az X mezőt legalább egyszer.
Először számoljuk meg azokat az 5-tel osztható számokat, amik kerülhetnek X helyére. A fenti gondolatmenet szerint 5, 10 és 20 nem jön szóba. Azt állítjuk, hogy minden más lehet, ami legfeljebb 175. Vegyünk egy tetszőleges ilyen X értéket.
Ha X $20k+15$ alakú ($0 \leq k \leq 8$), akkor egy X dobás mellé legfeljebb 8 darab 20-as dobással el lehetett érni a 175-öt.
Ha X $20k$ alakú, és $k \neq 1$, azaz $2 \leq k \leq 8$, akkor egy X, egy 5-ös, egy 10-es és legfeljebb hat 20-as dobással szintén eljutunk a 175-ig.
Ha X $20k+5$ alakú ($1 \leq k \leq 8$), akkor egy X, egy 10-es, és legfeljebb hét 20-as dobással 175-öt tudunk kapni.
Végül, ha X $20k+10$ alakú ($1 \leq k \leq 8$), akkor egy X, egy 5-ös, és legfeljebb hét darab 20-as dobással 175-be jutunk.

Így X tényleg minden 5-tel osztható szám lehet 175-ig az 5, 10 és 20 kivételével, ami 32 lehetőség. Ha X nem osztható 5-tel, akkor mivel az összes többi dobás, és a végső 175 pont is 5-tel osztható, így ez csak úgy lehetséges, hogy 5-tel osztható számú X-et dobott Morgan, azaz jelen esetben pontosan 5-öt. Ekkor a lehetséges X-eket úgy határozhatjuk meg, hogy megnézzük, hogy legfeljebb négy dobással, amik mind az 5, 10, 20 pontok valamelyikébe mentek, hány pontot érhetett el, és ezeket a lehetőségeket levonjuk a 175-ből és 5-tel osztjuk.
Nem nehéz látni, hogy legfeljebb négy szám összege, melyek mindegyike 5, 10 vagy 20, minden nemnegatív, 5-tel osztható, 80-nál nem nagyobb szám lehet, kivéve a 75. Ez a fenti gondolatmenethez hasonlóan látható, azaz $20k$ alakú számokat csak 20-as dobásokkal megkaphatunk, $20k+5$ alakúakat egy 5-ös és 20-as dobásokkal, $20k+10$ alakúakat egy 10-es és 20-as dobásokkal, és $20k+15$ esetén egy 5-ös, egy 10-es, és 20-as dobásokkal, azonban 75-re ez már 5 dobás lenne, és azt nem is lehet négyből. Tehát a 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 80 számok állíthatóak elő legfeljebb 4 dobásból, amihez az X értékére a következő lehetőségeket kapunk (ezeket kivonjuk 175-ből, és 5-tel osztjuk): 35, 34, 33, 32, 31, 30, 29, 28, 27, 26, 25, 24, 23, 22, 21, 19. Ez 16 szám, de ebből a 35, 30, 25 már korábban volt, mivel 5-tel osztható, így ez 13 új megoldást ad.
Tehát összesen $32 + 13 = 45$ megoldás van.

E+7. Egy iskolából egy egyéni matematikaversenyen a 12.a és 12.b osztályokból négy-négy tanuló vett részt. Tudjuk, hogy a diákok a versenyen nyolc különböző pontszámot értek el, így a helyezéseik is különböznek. Matematikatanáruk csak a nyolc helyezés ismeretében megállapította, hogy a 12.b osztályosok pontszámainak összege nagyobb a 12.a osztályosok pontszámainak összegénél. Hányféle lehetett a nyolc diák sorrendje a versenyen?
A versenyen két versenyző közül az végez előrébb, akinek több pontja van. Ha két versenyzőnek ugyanannyi pontja van, akkor ugyanannyiadik helyen végeznek. A tanár a versenyen elérhető maximális pontszámot sem ismeri.

Megoldás: A tanár akkor tudja biztosra azt mondani, hogy a b-sek pontszámainak összege nagyobb, mint az a-soké, ha osztály szerint is rangsoroljuk a diákokat és az ugyanannyiadik helyezést elérő b-s diákok megelőzik az a-s diákokat, azaz az első b-s előrébb végez, mint az első a-s, a második b-s előrébb végez, mint a második a-s, és így tovább. Ez azért van így, mert ha ez a helyzet, akkor világos, hogy a b-sek összesen több pontot szereztek, ha viszont valamelyik helyen az a-s diák előrébb végzett, akkor lehet, hogy ezzel az a-s diáknak, és az előtte lévőknek legalább 1000 és legfeljebb 1010 pontja van, míg az utána lévőknek legfeljebb 10. Így több a-s diáknak van nagy, 1000 körüli pontja, tehát összesen több lesz a pontjuk.
Egy pillanatig ne különböztessük meg az azonos osztálybeli diákokat, csak azt vizsgáljuk, hogy ki a-s, és ki b-s, és így nézzük meg, hogy hány sorrend lehet. Ezekből pontosan annyi lehetőség van, mint amennyi a 4. Catalan-szám, azaz 14, de ezt nem ismerve fel is lehet őket sorolni: bbbbaaaa, bbbabaaa, bbbaabaa, bbbaaaba, bbabbaaa, bbababaa, bbabaaba, bbaabbaa, bbaababa, babbbaaa, babbabaa, babbaaba, bababbaa, babababa. Mivel az azonos osztálybeli diákokat meg kell különböztessük, ezért a 4-4 azonos osztálybeli diákot felcserélhetjük egymás között, azaz szoroznunk kell $4! \cdot 4!$-al. Így a tanár $14 \cdot 4! \cdot 4! = 8064$-féle sorrendnél mondhatta azt, hogy a b-sek pontszámainak összege nagyobb, mint az a-soké.

E+8. Azonos méretű kiskockákból összeragasztottunk egy $3 \times 5 \times 5$-ös téglatestet, melynek a középső kiskockája piros színű, a többi kiskocka pedig sárga, azonban mind különböző árnyalatú.
Anita leszedett ebből néhány kiskockát (legalább egyet) úgy, hogy egy olyan téglatest maradt, amelynek a felszínén nem látható piros szín. Hányféleképpen nézhetett ki a kapott téglatest?
Anita a téglatest aljáról is szedhetett le kiskockát, és a megmaradt téglatest minden lapja látható volt.

Megoldás: Először számoljuk meg, hogy Anita megkötések nélkül hány különböző módon választhatta ki a megmaradt téglatestet: minden lapjának megválaszthatja szabadon a koordinátáját, így függőlegesen és hosszanti irányban $5+1=6$ lehetőségből kell egy alját és egy tetejét választani, ezt $\binom{6}{2}$ $= 15$-féleképpen teheti meg. Hasonlóan a harmadik koordinátairányban 4 lehetőség van a két határra, így $\binom{4}{2} = 6$ választás van, ezért összesen $15 \cdot 15 \cdot 6 = 1350$ résztéglatest van.
Ha ebből kivonjuk azon résztéglatestek számát, melyek szélén látszik a piros szín, akkor megkapjuk a feladatban keresett számot.
Ahhoz, hogy legyen a szélén piros, meg kell maradnia a piros kockának, az ilyen téglatestek száma $\left(\frac{5+1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{5+1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3+1}{2}\right)^2 = 324$, mivel a téglatest alja csak a 3 legalsó szint valamelyike lehet, hasonlóan a teteje csak a felső 3 szint valamelyike. A másik két koordinátában is megfelelő oldalán kell lenni a piros kockának a lapoknak, így minden lap koordinátáját 3, illetve 2-féleképpen lehet megválasztani. Ezeket egymástól függetlenül meg lehet választani, így az összes ilyen téglatest száma a fent kapott szorzat.
Ezek közül nem mind rossz, az olyanokat számoltuk meg feleslegesen, amelyekben benne van a piros kocka, de nem látszik a felszínen. Ezek azok a téglatestek, melyek a középső $3 \times 3 \times 3$-as kockát tartalmazzák, így minden 3×5-ös lapnak 2-féleképpen lehet megválasztani a koordinátáját, ezért ilyenből $2^4 = 16$ fajta van.
Ezért a rossz téglatestek száma $324 - 16 = 308$, a jók száma így $1350 - 308 = 1042$ lehetne, de a teljes téglát nem hagyhatta meg, így a helyes végeredmény $1042 - 1 = 1041$.

E+9. Gabi megkérdezte Benit, hogy mikor van a születésnapja. Erre Beni titokzatosan azt felelte, hogy csak azt árulja el, hogy mennyi h^n, ahol h és n rendre a születési dátumában a hónap és a nap sorszámát jelöli. Ebből az értékből Gabi még nem tudta meghatározni, hogy mikor van Beni születésnapja. Ezek alapján hány lehetséges napja van az évnek, amelyen Beni születhetett?

Megoldás: Egy év 12 hónapból áll. Beni nem születhetett a $5., 6., 7., 10., 11.$ és $12.$ hónapban, mivel ezeknek a számoknak nincsen közös pozitív kitevős hatványuk semmilyen tőlük különböző számmal 12-ig (és önmaguk bármely két, különböző kitevős hatványa különböző).

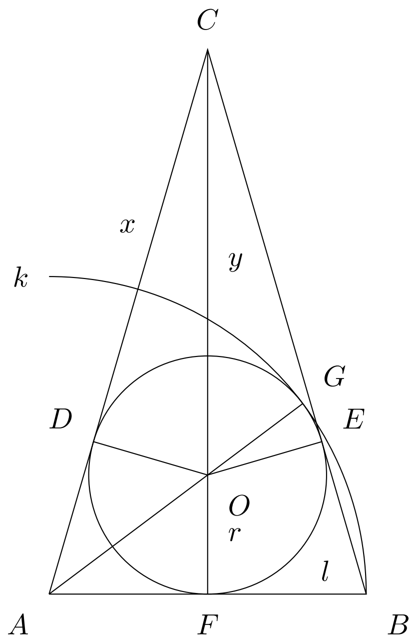
Ha Beni januári, akkor az 1-es számot mondta Gabinak, amiből ő így tényleg nem tudná meghatározni, hogy Beni január melyik napján született. Ez 31 lehetőség.
Ezeken kívül még az alábbi dátumokkal van probléma:

- Ha februárban egy páros napon született volna Beni, akkor ugyanazt mondta volna, mintha áprilisban a feleannyiadik napon.
- Ha márciusban egy páros napon született volna Beni, akkor ugyanazt mondta volna, mintha szeptemberben a feleannyiadik napon.
- Ha februárban egy 3-mal osztható napon született volna Beni, akkor ugyanazt mondta volna, mintha augusztusban a harmadannyiadik napon.
- Ha áprilisban egy 3-mal osztható napon született volna Beni, akkor ugyanazt mondta volna, mintha augusztusban a kétharmadannyiadik napon.

Ez januárban összesen 31 nap, februárban 19 nap, márciusban 15, áprilisban 20, augusztusban 15, szeptemberben pedig 15, tehát összesen 115 nap.

E+10. Az A középpontú k kör sugara 14 egység, és B egy pont a körvonalon. Az ℓ kör érinti az AB szakaszt a felezőpontjában és érinti a k kört is. Legyen C az a pont, melyre az ABC háromszög beírt köre ℓ. Hány egység az ABC háromszög kerülete?

Megoldás:



Az F felezi az AB szakaszt, tehát $AF = 7$. Az AFO háromszög derékszögű (hisz F-ben érinti az AB szakasz az l kört), tehát Pitagorasz tétele alapján: $7^2 + r^2 = AO^2$. Az l és a k kör G-ben érintik egymást, tehát az A, O, G egy egyenesre esnek, ezért $AO + OG = AG$, így $\sqrt{7^2 + r^2} + r = 14 \Rightarrow 7^2 + r^2 = (14 - r)^2 = r^2 - 28r + 196 \Rightarrow 28r = 147 \Rightarrow r = \frac{21}{4}$. Külső pontból húzott érintőkre vonatkozó tétel alapján: $AD = AF$, $CD = CE$, $BF = BE$. Legyen $y = OC$, $x = CD$, $K = 14+(7+x)+(7+x)$ (az ABC háromszög kerülete). Az ABC háromszög egyenlőszárú, tehát $m_{AB} = r+y$, ezért $2 \cdot T_{ABC} = r \cdot K = r \cdot (28 + 2x) = 14 \cdot (r + y) \Rightarrow y = \frac{1}{7}rx + r$. A CDO háromszög derékszögű, tehát $r^2 + x^2 = y^2 = \left(\frac{1}{7}rx + r\right)^2 = \frac{1}{49}r^2x^2 + \frac{2}{7}r^2x + r^2 \Rightarrow (1 - \frac{1}{49}r^2)x^2 = \frac{2}{7}r^2x$, mivel $x \neq 0$, ezért $x = \frac{\frac{2}{7}r^2}{1-\frac{1}{49}r^2} = \frac{\frac{2}{7}\cdot\frac{21}{4}^2}{1-\frac{1}{49}\cdot\frac{21}{4}^2} = \frac{\frac{63}{8}}{(1-\frac{9}{16})} = \frac{\frac{63}{8}}{\frac{7}{16}} = 18$. Tehát $K = 14 + (7 + 18) + (7 + 18) = 64$

E+11. Töltsétek ki a táblázat mezőit az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számjegyekkel úgy, hogy minden sorban és oszlopban minden számjegy pontosan egyszer szerepeljen, és a táblázaton kívülre írt számok azt mutassák, hogy mi a legnagyobb szám, ami előáll az adott sorban/oszlopban két szomszédos mezőben álló szám különbségeként. **Válaszként azt a négyjegyű számot adjátok meg, amit az ábrán szürkével jelölt négy mezőben lévő számjegyek fentről lefelé történő összeolvasásával kaptok!**

	3		3	1		
5						
2						1
5						
3					2	

Megoldás:

	3		3	1		
5				6		
2	2	4	6	5	3	1
5				4		
				3		
				2		
3				1	2	

I. Az 1-es mellé csak 2-es vagy 3-as mehet a különbség miatt, de a 2-est kizárja az oszlopban található 2-es. A 4. oszlopban a különbség miatt csak sorrendben követhetik egymást a számok, és amennyiben fordítva lennének, az utolsó sorban 2-es és 6-os kerülne egymás mellé, ami a sorra vonatkozó 3-as miatt nem lehet. A 2. sorban az első három helyre a 2, 4 és 6 kerül, ebben a sorrendben, mivel a 2-es és a 6-os nem lehet szomszéd, és a 2-es nem kerülhet az 5-ös mellé.

	3		3	1		
5				6	1	
2	2	4	6	5	3	1
5	1	6		4		
	4			3		
				2		
3				1	2	

II. Mivel 5 különbség kizárólag 6-ból 1-ként jöhet ki ezekből a számokból, az 1. sorban mindenképpen egymás mellett van az 1-es és a 6-os, de az egyes nem kerülhet a 3. oszlopba a 6-os mellé az oszlopra vonatkozó 3-as miatt. A 3. sorra vonatkozó 5-ös miatt az 1-es és a 6-os egymás mellett állnak, az 1-es miatt csak a 4-estől balra lehetnek és ott a 6-os csak a 2. oszlopban lehet az oszlopokra vonatkozó számok miatt, és ezután az 1-es sem lehet 3. oszlopban. Az 1. oszlop 4. eleme nem lehet 2-es vagy 3-as, szóval az oszlopra vonatkozó szám miatt 4-es.

	3		3	1		
5				6	1	
2	2	4	6	5	3	1
5	1	6		4		
	4	1	2	3		
			1	2		
3	6			1	2	

III. A 3. oszlopban az 1-es a többi 1-es miatt már csak két helyre kerülhet. Ha a 4. helyre kerül, akkor a 3. oszlopra és a 6. sorra vonatkozó számok miatt az 5., illetve 6. helyre csak 3-as és 4-es kerülhet, ezért a 3. helyre 2-esnek kéne kerülnie, ami nem mehet a 6-os mellé. Tehát a 3. oszlopban a 5. helyre kerül az 1-es, és ez alapján a 2. oszlopban a 4. helyre. A 3. oszlop 4. helyére nem kerülhet 3-as vagy 4-es, tehát, 2-esnek kell lennie. Az utosó sorban a korábban beírt 6-osok és a sorra vonatkozó szám miatt csak az 1. helyre kerülhet 6-os.

	3		3	1		
5		2		6	1	
2	2	4	6	5	3	1
5	1	6	3	4		2
	4	1	2	3		
			1	2	4	
3	6			1	2	

IV. A 3. sorban a korábban beírt 2-esek alapján a 2-es csak az utolsó helyre kerülhet. A korábban beírt 2-esek miatt az 1. sorban a 2-es csak a 2. helyre kerülhet, illetve a korábban beírt 4-esek miatt az 5. oszlopban a 4-es csak a 5. helyre kerülhet. Ezenkívül a korábban beírt 3-asok miatt a 3. sorban a 3-as csak a 3. helyre kerülhet.

	3		3	1		
5	3	2	5	6	1	4
2	2	4	6	5	3	1
5	1	6	3	4	5	2
	4	1	2	3	6	5
	5	3	1	2	4	6
3	6	5	4	1	2	3

V. A 3. oszlopban az 1-es alá az oszlopra vonatkozó szám miatt csak 4-es kerülhet, ami után a másik hiányzó 4-es is beírható. Innen pedig néhány lépés alatt kitölthetőek a maradék hiányzó mezők.

Tehát a keresett négyjegyű szám a 2563.

E+12. Egy hegyesszögű háromszög magasságai 585, 600 és 936 egység hosszúak. Hány egység hosszú a háromszög kerülete?

Megoldás: Jelöljük a három oldalt és a hozájuk tartozó magasságokat rendre a, b, c, m_a, m_b, m_c-vel. A magasságok hosszainak prímtényezős felbontásai $m_a = 585 = 3^2 \cdot 5 \cdot 13$, $m_b = 600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ és $m_c = 936 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13$. Ezek legkisebb közös többszöröse $\text{lkkt} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 13$.
Ekkor legyen x olyan, hogy $2 \cdot T = a \cdot m_a = b \cdot m_b = c \cdot m_c = \text{lkkt} \cdot x$. Ebből kifejezve az oldalakat: $a = 2^3 \cdot 5 \cdot x = 40x$, $b = 3 \cdot 13 \cdot x = 39x$, $c = 5^2 \cdot x = 25x$, vagyis a háromszög félkerülete $s = \frac{a+b+c}{2} = 52x$. Ekkor a területet a Héron-képlettel is számolva kapjuk, hogy $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot x = \frac{1}{2}\text{lkkt} \cdot x = \frac{1}{2} a \cdot m_a = T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{52x \cdot 12x \cdot 13x \cdot 27x} = \sqrt{2^4 \cdot 3^4 \cdot 13^2 x^2} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot x^2$, azaz $x = 5^2 = 25$.
Innen pedig a félkerületet használva kapjuk, hogy a kerület $K = 2s = 2 \cdot 52 \cdot 25 = 2600$.

E+13. Hat település, Arka, Bőcs, Cák, Dég, Ete és Füzér egy út mentén egymás mellett helyezkedik el ilyen sorrendben. Az egymást követő falvak között buszjáratok közlekednek, minden szomszédos pár között állandó gyakorisággal. Ezek a gyakoriságok 5, 7, 9, 11 és 12 perc az öt falupár között, de nem tudjuk, hogy milyen sorrendben. Egy napon Alex, Áron és Benedek három különböző időpontban ment el Arkáról Füzérre ezekkel a buszokkal: Alex 12:00-kor, Áron 12:01-kor, Benedek pedig 13:00-kor ért az arkai buszmegállóhoz. Azt is tudjuk, hogy míg Alex 14:20-kor, addig Áron csak 15:00-kor érkezett Füzérre. Hány perccel Áron után érkezett Benedek Füzérre?
A buszok pontosak, egész percben indulnak és érkeznek, az azonos falvak közt közlekedő buszok menetideje ugyanannyi, az átszállás nem kerül időbe, és mindhárman minden faluban az első lehetséges busszal mentek tovább.

Megoldás: Áron 39 perccel utazott hosszabb ideig, mint Alex. A feltételek alapján Áron maximum 4 percet várhatott az 5 percenként buszhoz tartozó településen (hiszen ha éppen 1 perccel kési le az előzőt, akkor 4-et kel várnia a következőre). Hasonlóan indokolható, hogy a 7 perces megállóban maximum 6 percet kellett várnia, a 9 percesben maximum 8-at, a 11-esben maximum 10-et, a 12-esben pedig maximum 11-et. Tehát Áron maximálisan $4+6+8+10+11=39$ percet várakozott. Viszont ez csak úgy lehetséges, ha Alex minden járatot pont elért (azaz 0 percet kellett várnia az átszállások miatt).
Meg szeretnénk határozni, hogy melyik két település között milyen gyakoriságú busz közlekedik. Vizsgáljuk meg először, hogy Ete és Füzér közt melyik megy. Ha az n perces, akkor Áron Etén $E-1$ percet várakozott, tehát $39-(E+1)$ átszállási várakozás után ért oda. Viszont Ennek a számnak oszthatónak kell lennie E-vel, mivel Alex 0 percet várakozott és onnantól E percenként mentek a buszok. A járatgyakoriságok közül egyedül az 5 percesre teljesül ez a tulajdonság, tehát Ete és Füzér között 5 percenként járnak buszok és Etére Áron $39-5+1=35$ perc várakozás után ért.
Vizsgáljuk meg, hogy Dég és Ete között hány percenként mennek. Az előző indoklás alapján, ha D percenként, akkor $35-D+1$-nek oszhatónak kell lennie D-vel. Ez a megmaradó lehetőségek közül a 9 és a 12 percesre teljesül (és Dégre ebben a két esetben Áron $35-9+1=27$, illetve $35-12+1=24$ percnyi várakozás után ért). Vizsgáljuk meg a 12 perces esetet: Ekkor, a Cákról Dégre menő C percenként menő buszra teljesülnie kellene annak, hogy $C|24-C+1$, de a buszok közül ez csak az 5 percenként menőre teljesül, amiről viszont már tudjuk, hogy Ete és Füzér között közlekedik. Tehát Dég és Ete között 9 percenként mennek buszok és Dégig Áron 27 percet várakozott.
A Cák és Dég közt C percenként menő buszra teljesül az, hogy $C|27-C+1$, ez a megmaradó 3 busz közül kizárólag a 7 percesre teljesül és így a Cákra érésig 21 percet várt az átszállás miatt Áron. A Bőcs és Cák közt B percenként menő buszra teljesül az, hogy $B|21-B+1$, tehát B csak 11 lehet és ezzel kizárásos alapon kijön az is, hogy Arka és Bőcs közt 12 percenként megy busz.
Benedek Arkáról 60 perccel Alex után indult, így itt nem kellett várakoznia a 12 percenként járó buszra. Azaz Bőcsre is 60 perccel Alex után ért, ahol 11 percenként járnak a buszok, így Cákra már 66 perccel Alex után érkezett. Itt 7 percenként járnak a buszok, tehát Dégre már 70 perccel Alex után ért Benedek, ahol 9 percenként járnak a buszok. Ezáltal Etére 72 perccel Alexet követően ért oda, ahol 5 percenként járnak a buszok, így Füzérre 75 perccel Alex után, így 35 perccel Áron után ért oda Benedek.

E+14. Mennyi $\sum_{k=1}^{17} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$? **Válaszként a tört legegyszerűbb alakjának számlálóját adjátok meg.**

Megoldás: Vegyük észre, hogy

$$\frac{2}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{(k+1)(k+2)-k(k+3)}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{k(k+3)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)},$$

$$\frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{(k+3)-k}{k(k+3)} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right),$$

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+2)-(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}.$$

Ezek alapján a kifejezés átalakítható az alábbi teleszkopikus kifejezéssé:

$$\sum_{k=1}^{17}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\cdot\sum_{i=1}^{17}\frac{1}{k} - \frac{1}{3}\cdot\sum_{i=1}^{17}\frac{1}{k+3} - \sum_{i=1}^{17}\frac{1}{k+1} + \sum_{i=1}^{17}\frac{1}{k+2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{18}-\frac{1}{19}-\frac{1}{20}\right)-\frac{1}{2}+\frac{1}{19}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{11\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 19 - 2\cdot 5\cdot 19 - 2^2\cdot 3^2\cdot 5 - 3^2\cdot 19}{2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 19} - \frac{1}{2} + \frac{1}{19}\right) =$$

$$= \frac{6270-190-180-171}{20520} - \frac{5130}{20520} + \frac{540}{20520} = \frac{1139}{20520}.$$

Tehát a válasz 1139.

E+15. Benjamin gondolt egy x valós számra, és elmondta Timinek az $\lfloor x^3 \rfloor$ értéket. Timi azt elmondta nekünk, hogy ez egy 100-nál nem nagyobb pozitív egész szám, valamint hogy $\lfloor x^3 \rfloor$ ismeretében $\lfloor x^2 \rfloor$ nem határozható meg egyértelműen. Jelölje A azt, hogy ezen feltételek mellett a Timi által hallott szám értéke hányféle lehet. Ezután Benjamin gondolt egy y valós számra is, és elmondta Timinek az $\lfloor y^4 \rfloor$ értéket, majd Timi ismét elmondta nekünk, hogy ez egy 100-nál nem nagyobb pozitív egész szám, továbbá azt is, hogy $\lfloor y^4 \rfloor$ ismeretében $\lfloor y^3 \rfloor$ nem határozható meg egyértelműen. Jelölje B azt, hogy ezen feltételek mellett a Timi által másodjára hallott szám értéke hányféle lehet. Mennyi $A+B$?
Az $\lfloor r \rfloor$ jelölés az r valós szám egészrészét jelöli, ami a legnagyobb olyan egész szám, amely r-nél nem nagyobb.

Megoldás: Könnyen látható, hogy $B = 100$, hiszen bármely $a \in \{1, 2, \dots, 100\}$ $y = \sqrt[4]{a}$ és $y = -\sqrt[4]{a}$ is azt eredményezi, hogy $\lfloor y^4 \rfloor = a$, viszont y^3 előjele különbözik a két esetben, így $\lfloor y^3 \rfloor$ negatív az egyik esetben és nemnegatív a másikban. Tehát bármely $a \in \{1, 2, \dots, 100\}$-ra igaz mindkét feltétel, és más a nem lehetséges.

Most legyen a olyan szám, hogy teljesül rá az első két feltétel, avagy $a \in \{1, 2, \dots, 100\}$ és $a = \lfloor y^3 \rfloor$ nem határozza meg $\lfloor y^2 \rfloor$-et.

Egyenletrendezéssel $a = \lfloor y^3 \rfloor \iff \sqrt[3]{a} \le y < \sqrt[3]{a+1}$ és $b = \lfloor y^2 \rfloor \iff \sqrt{b} \le y < \sqrt{b+1}$. Tehát azon $a \in \{1, 2, \dots, 100\}$ számok számát keressük, melyekre az $[\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a+1})$ intervallumot több $[\sqrt{b}, \sqrt{b+1})$ intervallum is metszi, avagy amikor van olyan b egész szám, amelyre $\sqrt{b} \in (\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a+1})$, avagy $b \in (a^{2/3}, (a+1)^{2/3})$.

Egy b egész szám legfeljebb egy ilyen intervallumban lehet, hiszen az intervallumok páronként diszjunktak. Továbbá az intervallumok hossza rövidebb mint 1:

$$(a+1)^{2/3} < a^{2/3} + 1^{2/3}$$

mindkét oldalt harmadik hatványra emelve

$$(a+1)^2 < a^2 + 3a^{4/3} + 3a^{2/3} + 1$$
$$2a < 3a^{4/3} + 3a^{2/3}$$
$$2/3 < a^{1/3} + a^{-1/3}.$$

Mivel a pozitív, számtani-mértani középből következik az egyenlőtlenség.

Tehát minden egyes intervallumhoz rendelhető pontosan egy b egész szám amely az intervallumon belül van, és minden egyes $b \in 1, 2, \dots, \lfloor 101^{2/3} \rfloor$ vagy tartozik pontosan egy intervallumhoz, vagy egy intervallum végpontja. b pontosan akkor végpontja egy intervallumnak, ha $b = a^{2/3}$. Tehát pontosan annyi ilyen b van, ahány lehetséges a ami köbszám, avagy $|\{1, 8, 27, 64\}| = 4$. Tehát $A = \lfloor 101^{2/3} \rfloor - 4 = 17$.

Így $A + B = 117$.

E+16. Egy n pozitív egész számot nevezzünk *pokolinak*, ha $\frac{1!\cdot 2!\cdot \ldots \cdot 100!}{n!}$ egész és négyzetszám. Mennyi a pokoli számok összege?

Megoldás: Egy pokoli szám nem lehet 100-nál nagyobb, mivel egy száznál nagyobb szám faktoriálisa osztható 101-gyel, míg a számláló, a 101 prímtulajdonsága miatt nem, azaz a hányados nem lenne egész.

Bontsuk fel a számlálóban minden $1 \leq i \leq 100$-re $i!$-t $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot i$-vé. Ha ezt megtesszük a számlálóban összesen 100 darab 1-es tényező, 99 darab 2-es tényező, … és 1 darab 100-as tényező fog szerepelni (hiszen minden i szerepel a nála nem kisebb számok faktoriálisában tényezőként, de nem szerepel egy nála kisebb lévőében sem)
Ekkor:
$1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 100! = 1^{100} \cdot 2^{99} \cdot 3^{98} \cdot \ldots \cdot 100^1 = 1^{100} \cdot (2 \cdot 2^{98}) \cdot 3^{98} \cdot (4 \cdot 4^{96}) \cdot \ldots \cdot (98 \cdot 98^2) \cdot 99^2 \cdot (100 \cdot 100^0) =$ $(1^{100} \cdot 2^{98} \cdot 3^{98} \cdot 4^{96} \cdot \ldots 99^2 \cdot 100^0) \cdot (2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 100) = (1^{100} \cdot 2^{98} \cdot \ldots \cdot 100^0) \cdot (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot \ldots \cdot (2 \cdot 49) \cdot (2 \cdot 50) =$ $(1^{100} \cdot 2^{98} \cdot \ldots \cdot 100^0) \cdot 2^{50} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 50 = (1^{100} \cdot 2^{98} \cdot \ldots \cdot 100^0) \cdot 2^{50} \cdot 50!$
Mivel egy egész szám páros kitevőjű hatványa mindig négyzetszám, a tört számlálója előáll mint négyzetszámok és 50! szorzata. Mivel négyzetszámok szorzata is négyzetszám, így a számlálót 50!-sal leosztva négyzetszámot kapunk, azaz az 50 egy pokoli szám.
Egy pokoli szám biztosan kisebb 53-nál, hiszen a számlálóban páros mennyiségű 53-as prímtényező szerepel a 100-nál nem nagyob pozitív egészek közül pontosan az 53-nál kisebb n-ekre lesz $n!$-ban páros sok 53-as prímtényező. Továbbá minden pokoli szám 47 és 93 között kell, hogy legyen, hiszen a számláló átírásában a 47^{54}-ben és a 94^7-ben szerepel 47-es prímtényező, összesen páratlan mennyiségű (51 darab) és a 100-nál nem nagyob pozitív egészek közül pontosan a 47-nél nem kisebb, de 94-nél kisebb pozitív egészekre n-ekre lesz lesz $n!$-ban páratlan sok 47-as prímtényező.
Tehát kizárólag a $47, 48, 49, 50, 51$, vagy az 52 lehetnek pokoliak. Ezek közül az 50-ről tudjuk, hogy tényleg az.
Ezekre az alábbi összefüggések fennállnak:

$$\frac{1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 100!}{47!} = \frac{1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 100!}{50!} \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48; \quad \frac{1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 100!}{48!} = \frac{1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 100!}{50!} \cdot 50 \cdot 49;$$

$$\frac{1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 100!}{49!} = \frac{1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 100!}{50!} \cdot 50; \quad \frac{1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 100!}{51!} = \frac{1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 100!}{50!} \cdot \frac{1}{51};$$

$$\frac{1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 100!}{52!} = \frac{1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 100!}{50!} \cdot \frac{1}{51 \cdot 52}$$

.
Ismert, hogy egy pozitív q négyzetszám és z egész szám szorzata pontosan akkor négyzetszám, ha z is négyzetszám. Továbbá, ha $\frac{q}{z}$ egész, akkor pontosan akkor négyzetszám, ha z is az. Viszont könnyen ellenőrizhető, hogy az $50 \cdot 49 \cdot 48$; $50 \cdot 49$; 50; 51 és $51 \cdot 52$ számok közül egyik sem négyzetszám, tehát a 47; 48; 49; 51 és 52 számok egyike sem lehet pokoli.
Összefoglalva: Az 50 az egyetlen pokoli szám, ebből kifolyólag a pokoli számok összege is annyi.