XVIII. Dürer Verseny

Online forduló (2024. 10. 21.)

Megoldások

C kategória

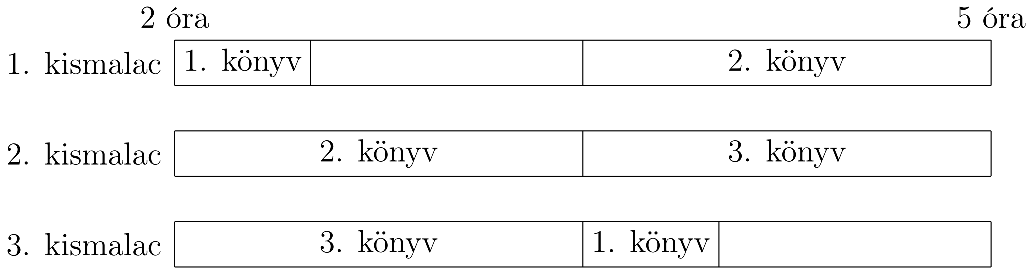
Válaszok

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
6	3	35	18	24	24	66	18	816

Részletes megoldások

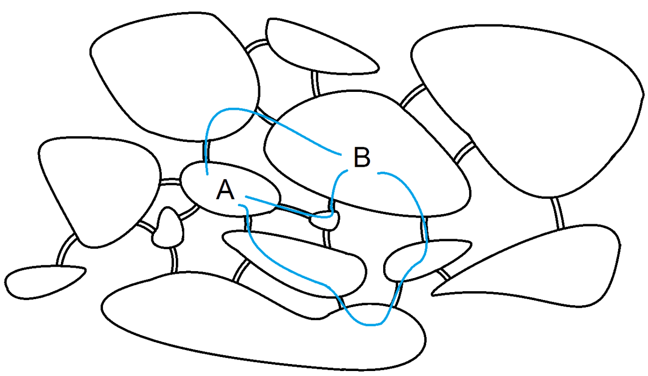
C-1. Tegyük fel, hogy van olyan kismalac, aki mindhárom könyvet elolvassa. Ekkor $30+90+90=210$ percet tölt olvasással, ami nem lehetséges, hiszen csak 180 perc telik el 2 és 5 óra között. Tehát minden kismalac legfeljebb 2 könyvet olvas el.

Ez meg is valósítható az ábrán látható módon:

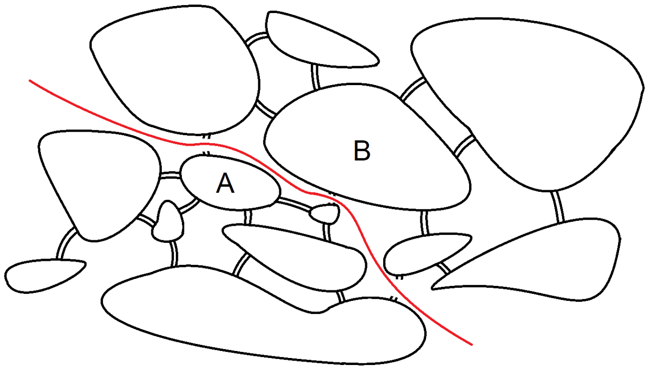


Azaz a leírt számok összege legfeljebb 6.

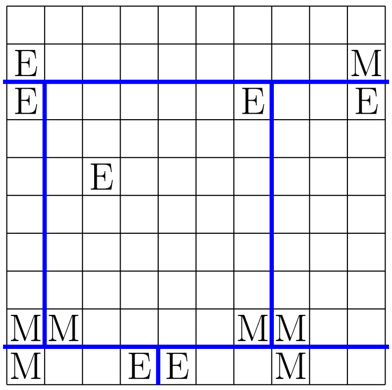
C-2. Ahogy az alábbi ábrán látható, létezik 3 különböző út Anita és Bori között. Ezek az utak mind különböző hidakat használnak, azaz ahhoz, hogy a két maffiózó ne tudjon találkozni, legalább 3 hidat (minden útról egyet) le kell zárnia a rendőrségnek.

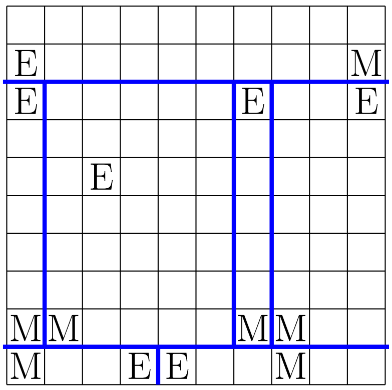


Három híd lezárásával a város kettévágható a lenti ábrán látható módon, azaz elég három hidat lezárni.



C-3. Minden szeleten pontosan egy szem málna és egy szem eper van. Emiatt ahol az ábrán két szomszédos négyzetben is E vagy M van, ott köztük húzódik két szelet határa. Ezek alapján a bal oldali ábrán látható szeleteket tudjuk biztosan meghatározni.





A torta közepén két málna és két eper maradt, azaz azt a téglalapot még ketté kell vágnunk. Mivel a két alsó sarokban van egy-egy szem málna, így függőleges vágásra van szükség. Ezzel legalább az egyik oszlopot levágjuk, tehát a legnagyobb szelet mérete legfeljebb $5 \cdot 7 = 35$. Ez elérhető a jobb oldali ábrán látható módon.

C-4. Legyen az az x. kilométer, amikor Peti ivott. Ekkor x osztható 4-gyel. Tudjuk, hogy következőnek az $x + 3$. kilométer kezdetekor ivott Zoli. Tehát $x + 3$ osztható 5-tel. Ezekből következik, hogy $x + 8$ osztható 4-gyel és 5-tel is, azaz osztható 20-szal. Így $x + 8 = 20$, 40 vagy 60. $x + 8 = 80$ már nem lehetséges, mert az $x + 3$. kilométernél a fiúk még bicikliztek, azaz $x + 3 \leq 72$. Emiatt x lehetséges értékei: 12, 32, 52.

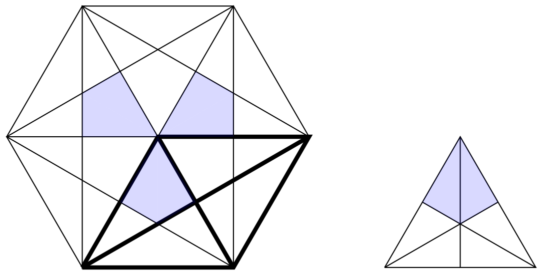
A feladat szövegéből azt is tudjuk, hogy x-től $x + 3$-ig semelyik szám nem osztható 7-tel, hiszen Marci nem vette elő a kulacsát Zoli előtt vagy vele együtt. Emiatt $x = 12$, $x = 32$ kiesik, hisz 7 osztja $12 + 2 = 14$-et és $32 + 3 = 35$-öt.

Tehát Zoli az $52 + 3 = 55$. kilométer elején ivott. Innentől még $72 - 55 + 1 = 18$ kilométer volt hátra, hiszen még az 55. kilométert is végigtekerték a fiúk.

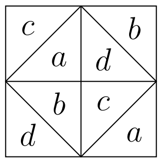
C-5. A szemközti csúcsokat összekötő átlók 6 szabályos háromszögre osztják a hatszöget, melyek területe hatoda a hatszögének. A további átlók két-két ilyen háromszöget vágnak ketté. A két háromszög rombuszt alkot −amiről tudjuk, hogy az átlói felezik egymást − azaz a hatszög átlói a szabályos háromszögek súlyvonalai lesznek.

A kiszínezett részek területét számoljuk ki külön-külön. Minden színezett részt az egyik szabályos háromszög oldalai és két súlyvonala határolja. Tudjuk, hogy mindhárom súlyvonal berajzolása esetén a háromszöget hat egybevágó kis háromszögre osztjuk. Ezek területe a háromszög hatoda, azaz $144/6/6 = 4$. A színezett rész két ilyen kis háromszögből áll, azaz 8 egység méretű.

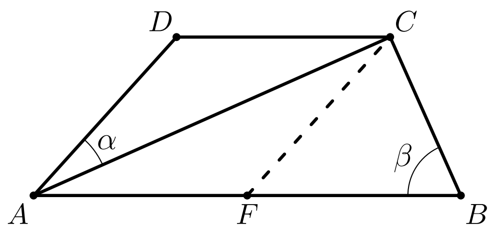
Tehát három kiszínezett rész területe összesen 24 egység.



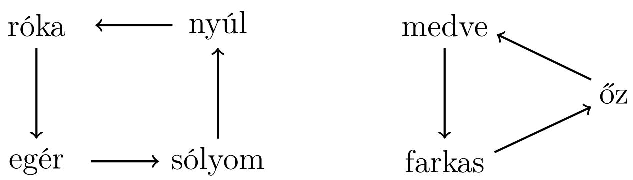
C-6. Mivel a középen lévő négy darab háromszögnek van egy közös pontja, ezért mindnek különböző színűnek kell lennie. A külső négy darab háromszögre ugyancsak igaz, hogy a belsők közül hárommal érintkeznek, tehát csak az ”átellenes” belső háromszög színére festhetjük őket. Ekkor a belsők eltérnek színben, a külsők is egymástól és a belsőktől is, tehát jó a színezés. Mivel a belsők színe megadja egyértelműen a külsőkét, ezért azok nem adnak új eseteket. A belső részt $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ féleképpen lehet kiszínezni. Mivel a forgatással és tükrözéssel egymásba vihető színezéseket különbözőnek tekintjük, így a lehetséges színezések száma 24.



C-7. CF párhuzamos AD-vel a feladat szövege szerint. Mivel $ABCD$ trapéz, ezért AF és DC is párhuzamos, tehát $AFCD$ paralelogramma, sőt rombusz, mert két szomszédos oldala egyenlő. Így $AF = FC = DC$ és szimmetria miatt $DAC\angle = CAF\angle = ACF\angle$. Mivel $FC = AF = FB$, így BCF egyenlőszárú háromszög, azaz $FBC\angle = BCF\angle$. Tudjuk, hogy $180° = CAF\angle + ACF\angle + FCB\angle + FBC\angle = 2 \cdot (CAF\angle + FBC\angle) = 2 \cdot (24° + FBC\angle)$, amiből $FBC\angle = 90° - 24° = 66°$ következik.



C-8. Két vádló-kör lesz a bagoly jegyzetében az ábra szerint. A gyanúsítást nyíllal jelöljük.



Ha egy körön valaki bevádol valakit, az a másik kör állatainak vallomását nem befolyásolja, ezért elég külön-külön a két körön megnézni, hogy hányféle lehet a gyanúsítottak száma és összeszorozni.

Nézzük a 4 hosszú kört. Tegyük fel, hogy az első megkérdezett az egér (ha más az első, az a szimmetria miatt ugyanígy fog működni). A sólyom biztosan gyanúsított lesz és a válasza nem fontos, tehát a nyúl biztos nem lesz gyanúsított és a vallomása számít. Ezért ha a nyúl a róka előtt lesz kikérdezve, akkor a róka és a sólyom lesz a bagoly listáján. Az egér nem kerül fel a listára, mert a róka gyanúsítása már nem számít. Tehát ekkor két (nem szomszédos) gyanúsított lesz a körben, ami attól függően, hogy kit kérdeztünk először, kétféle lehet: sólyom és róka vagy egér és nyuszi.

Ha a rókát kérdezzük a nyúl előtt, ő ugyan bevádolja az egeret, de neki a vallomását már figyelembe vettük, így a sólyom a listán marad és felkerül mellé az egér. A bagoly a rókát is felírja, mert a nyuszi meggyanúsítja és az ő vallomását figyelembe veszi a bagoly. Ekkor tehát három gyanúsított lesz, és egy marad ki, tehát négyféle lehet a vádlottak listája. Attól függően, hogy kit kérdeztünk először, mind a négy eset elő is fordul.

Tehát összesen erről a körről $2 + 4 = 6$-féle gyanúsított csoport készülhet.

Hasonlóan a három hosszú körön, ha a farkas tesz vallomást először, akkor az őz válasza nem érdekes, tehát a medve válasza számít. Így a medve nem lesz gyanúsított, de a farkas igen. Tehát innen mindig ketten leszek gyanúsítva, ami háromféleképpen fordulhat elő.

A két körben összesen tehát $6 \cdot 3 = 18$-féle lehet a gyanúsítottak listája.

C-9. Kezdjük a legnagyobb háromjegyűektől: a kilencessel kezdődőektől, azaz keressünk megfelelő számot 900 és 999 között.

Először vizsgáljuk meg a 999 és 900 számokat. 999 osztható 9-cel, de 81-gyel már nem, így nem jó. 900 sem jó, hisz csak a 0 osztható 0-val.

A 901 és 998 közötti számok közül olyat keresünk, ami 9-cel osztható, hiszen 9 az egyik számjegye. A második két számjegy összegének 9-cel oszthatónak kell lennie (a kilences oszthatóság szabályai szerint). A két utolsó számjegy összege 1 és 17 közé esik, mivel a 900-at és a 999-et már kizártuk. Tehát csak olyan szám lehet megfelelő, aminek az utolsó két számjegyének összege 9. Emiatt a két számjegy közül az egyik páros, azaz a szám osztható 2-vel is. Tehát elég átnéznünk a 18-cal osztható számokat 901 és 998 között. Ezek a 990 (nem osztható 0-val), a 972 (nem osztható 7-tel), a 954 (nem osztható 5-tel), a 936 (nem osztható $9 \cdot 3 = 27$-tel) és a 918 (nem osztható 8-cal).

Térjünk át a 800 és 899 közé eső számokra. Itt a keresett számnak oszthatónak kell lennie 8-cal. Tehát a szám biztosan páros, azaz az utolsó számjegye páros. Ezért ahhoz, hogy a számjegyeinek szorzatával osztható legyen, a szám osztható 16-tal is.

Hét ilyen szám van, ezeket nézzük végig. 896 (nem osztható 9-cel), 880 (nem osztható 0-val), 864 (nem osztható $8 \cdot 2 \cdot 4 = 64$-gyel), 848 (csak 16-tal osztható), 832 (nem osztható 3-mal), $816 = 8 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 17$. Mivel a legnagyobbtól indulva ez az első megfelelő szám, így 816 a megoldás.

C-10. A második bandának van nyerő stratégiája.

Miután az első banda kirabolt egy bankot, a kört "kiteríthetjük", azaz a bankokat felírhatjuk sorban, hogy a sor elején és a végén is a kirabolt bank legyen.

$$\otimes - \odot - \odot - \odot - \odot - \odot - \odot - \otimes$$

Az ábrán pirossal jelöljük azokat a bankokat, amiket már nem lehet kirabolni, vagy azért, mert már valaki kirabolta őket, vagy mert mindkét szomszédjukat kirabolták. A többi bank zöld színű.

Következőnek mi lépünk. Válasszuk a balról második zöld bankot. Ezután az állás a következő:

$$\otimes - \otimes - \otimes - \odot - \odot - \odot - \odot - \otimes$$

Ha a másik banda valamelyik szélső bankot rabolja ki (A ábra), akkor mi válasszuk a megmaradó háromból a középsőt. Ha a másik banda valamelyik középső bankot rabolja ki (B ábra), akkor válasszuk bármelyiket a két megmaradó zöld bankból. Így mindkét esetben mi raboljuk ki az utolsó bankot, azaz megnyertük a játékot.

A) $\quad \otimes - \otimes - \otimes - \odot - \odot - \odot - \otimes - \otimes$

B) $\quad \otimes - \otimes - \otimes - \odot - \odot - \otimes - \otimes - \otimes$