XVIII. Dürer Verseny

Online forduló (2024. 10. 21.)

Megoldások

D kategória

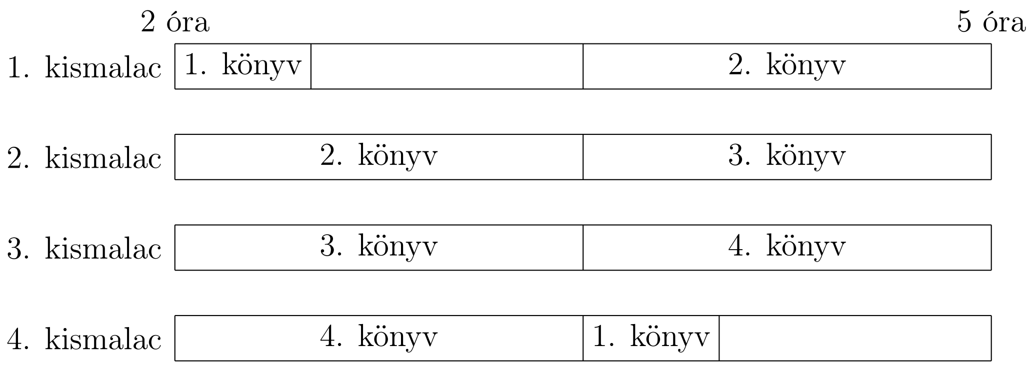
Válaszok

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
8	3	28	5040	24	66	217	816	265

Részletes megoldások

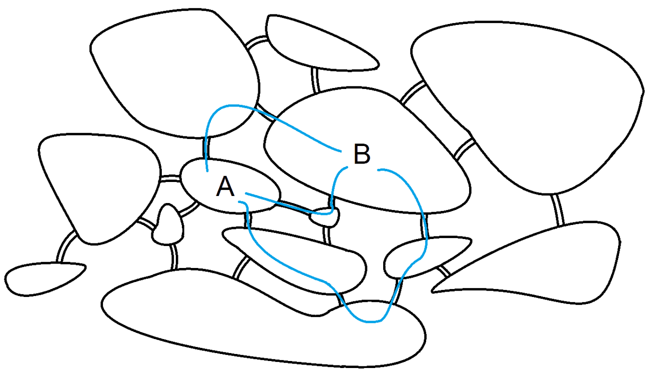
D-1. Lássuk be, hogy semelyik malacka sem olvashat el több, mint 2 könyvet. Tegyük fel, hogy van aki elolvas 3 könyvet. A három könyvből legalább kettő 90 perc hosszú, azaz legalább $30+90+90 = 210$ percet tölt olvasással. Ez nem lehetséges, hiszen csak 180 perc telik el 2 és 5 óra között. Tehát minden kismalac legfeljebb 2 könyvet olvas el.

Ez meg is valósítható az ábrán látható módon:

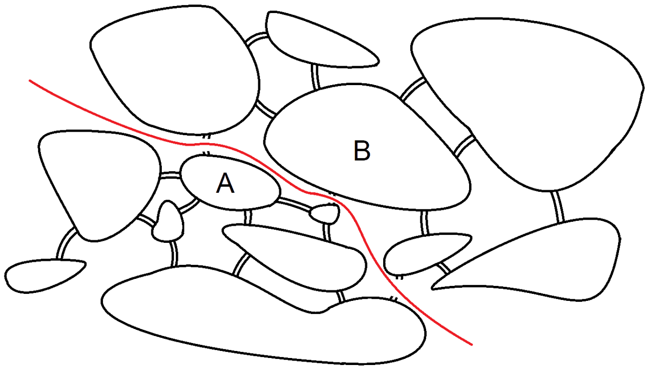


Azaz a leírt számok összege legfeljebb 8.

D-2. Ahogy az alábbi ábrán látható, létezik 3 különböző út Anita és Bori között. Ezek az utak mind különböző hidakat használnak, azaz ahhoz, hogy a két maffiózó ne tudjon találkozni, legalább 3 hidat (minden útról egyet) le kell zárnia a rendőrségnek.



Három híd lezárásával a város kettévágható a lenti ábrán látható módon, azaz elég három hidat lezárni.



D-3. Minden szeleten pontosan egy szem málna és egy szem eper van. Emiatt ahol az ábrán két szomszédos négyzetben is E vagy M van, ott köztük húzódik két szelet határa. Ezek alapján meg tudjuk határozni a bal felső szeletet.

M	M_2									E
E						M_3		E		
M_1										
										M
				E					E	
E			M	E						M
M	E				M					E

Keressük meg az ábrán piros E-vel jelölt eper párját (azaz azt a málnaszemet, ami vele egy szeleten van). Csak az ábrán M_1, M_2 és M_3.mal jelölt málnaszemek lehetnek a párjai. Vizsgáljuk meg ezt a három esetet.

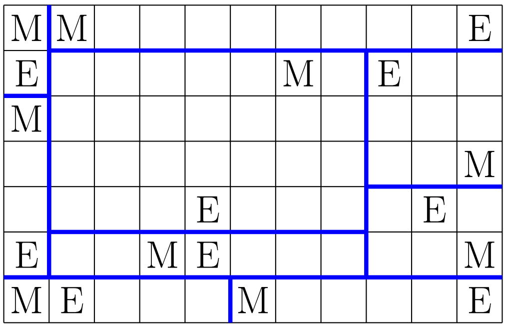
M_1 esetén az elérhető legnagyobb szelet területe 27:

M	M									E
E						M		E		
M										
										M
				E					E	
E			M	E						M
M	E				M					E

M_2 esetén az elérhető legnagyobb terület 25:

M	M									E
E						M		E		
M										
										M
				E					E	
E			M	E						M
M	E				M					E

M_3 esetén a terület 28:



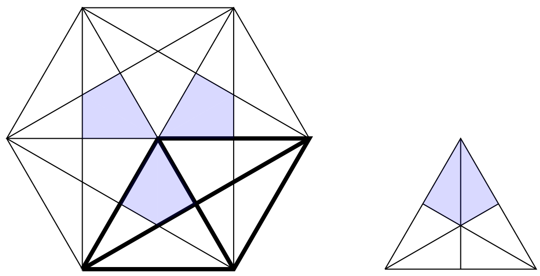
A legnagyobb szelet területe 28.

D-4. A 7 barátból ketten nem a szobákban alszanak, ez $\frac{7\cdot 6}{2} = 21$-féleképpen alakulhat. Ezután a maradék 5 ember elszállásolása a kérdés. 4 db kétfős szobába 5 embert úgy lehet elszállásolni (ha minden szobát használni kell), hogy mindbe kerül $1-1$ ember és az egyikbe még egy. Azt, hogy melyik két ember lakjon együtt az ötből $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$-féleképpen lehet meghatározni. A párost és a másik 3 személyt kell a 4 számozott szobába elhelyezni, ez $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$-féleképpen lehet megtenni, hiszen számít, hogy ki melyik szobába kerül. Összesen tehát a szobabeosztás $21\cdot 10\cdot 24 = 5040$-féle lehet.

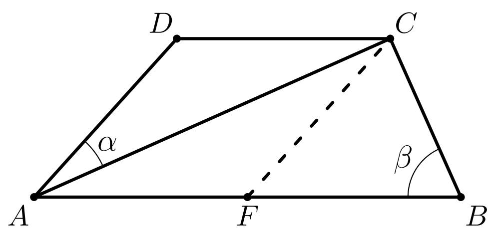
D-5. A szemközti csúcsokat összekötő átlók 6 szabályos háromszögre osztják a hatszöget, melyek területe hatoda a hatszögének. A további átlók két-két ilyen háromszöget vágnak ketté. A két háromszög rombuszt alkot $-$amiről tudjuk, hogy az átlói felezik egymást $-$ azaz a hatszög átlói a szabályos háromszögek súlyvonalai lesznek.

A kiszínezett részek területét számoljuk ki külön-külön. Minden színezett részt az egyik szabályos háromszög oldalai és két súlyvonala határolja. Tudjuk, hogy mindhárom súlyvonal berajzolása esetén a háromszöget hat egybevágó kis háromszögre osztjuk. Ezek területe a háromszög hatoda, azaz $144/6/6 = 4$. A színezett rész két ilyen kis háromszögből áll, azaz 8 egység méretű.

Tehát három kiszínezett rész területe összesen 24 egység.



D-6. CF párhuzamos AD-vel a feladat szövege szerint. Mivel $ABCD$ trapéz, ezért AF és DC is párhuzamos, tehát $AFCD$ paralelogramma, sőt rombusz, mert két szomszédos oldala egyenlő. Így $AF = FC = DC$ és szimmetria miatt $DAC\angle = CAF\angle = ACF\angle$. Mivel $FC = AF = FB$, így BCF egyenlőszárú háromszög, azaz $FBC\angle = BCF\angle$. Tudjuk, hogy $180° = CAF\angle + ACF\angle + FCB\angle + FBC\angle = 2\cdot(CAF\angle + FBC\angle) = 2\cdot(24° + FBC\angle)$, amiből $FBC\angle = 90° - 24° = 66°$ következik.



D-7. Az 1. és 2. egyenletből: $A + A \cdot B = A \cdot (B+1) = C = B^3 + 1$. Az ismert azonosság miatt $B^3 + 1 = (B+1) \cdot (B^2 - B + 1)$.

Tehát $A \cdot (B+1) = (B+1) \cdot (B^2 - B + 1)$. Mivel $B + 1 \neq 0$, így leoszthatunk vele: $B^2 - B + 1 = A$. A 2. egyenletből látszik, hogy a lehető legkisebb B esetén lesz C a legkisebb. Azaz a legkisebb B-t keressük, amire $B^2 - B + 1 = A \geq 24$. $B = 1, 2, 3, 4, 5$-re $A = 1, 3, 7, 13, 21 < 24$, de $B = 6$ esetén $A = 31 > 24$, így $C = 6^3 + 1 = 217$ lesz a megoldás.

D-8. Kezdjük a legnagyobb háromjegyűektől: a kilencessel kezdődőektől, azaz keressünk megfelelő számot 900 és 999 között.

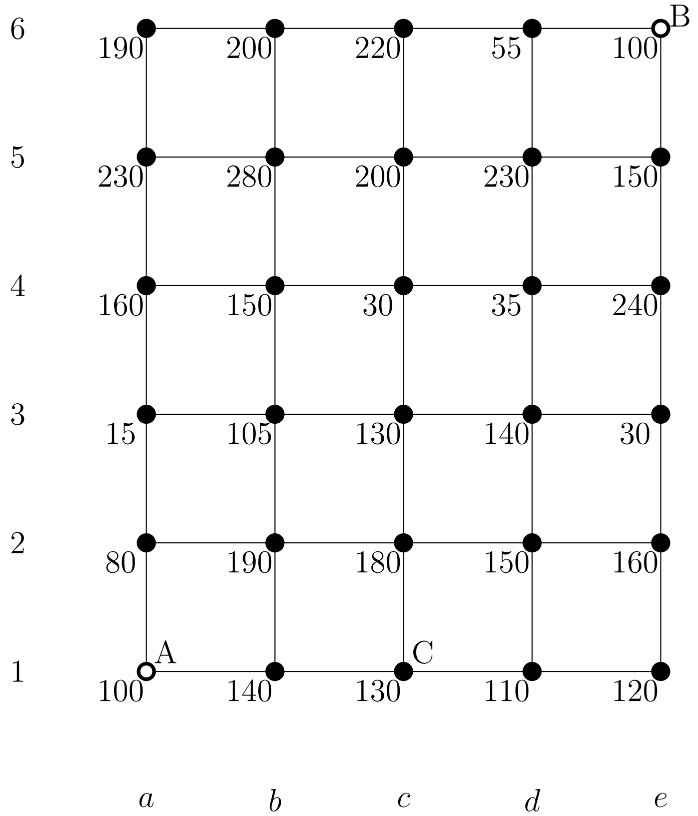
Először vizsgáljuk meg a 999 és 900 számokat. 999 osztható 9-cel, de 81-gyel már nem, így nem jó. 900 sem jó, hisz csak a 0 osztható 0-val.

A 901 és 998 közötti számok közül olyat keresünk, ami 9-cel osztható, hiszen 9 az egyik számjegye. A második két számjegy összegének 9-cel oszthatónak kell lennie (a kilences oszthatóság szabályai szerint). A két utolsó számjegy összege 1 és 17 közé esik, mivel a 900-at és a 999-et már kizártuk. Tehát csak olyan szám lehet megfelelő, aminek az utolsó két számjegyének összege 9. Emiatt a két számjegy közül az egyik páros, azaz a szám osztható 2-vel is. Tehát elég átnéznünk a 18-cal osztható számokat 901 és 998 között. Ezek a 990 (nem osztható 0-val), a 972 (nem osztható 7-tel), a 954 (nem osztható 5-tel), a 936 (nem osztható $9 \cdot 3 = 27$-tel) és a 918 (nem osztható 8-cal).

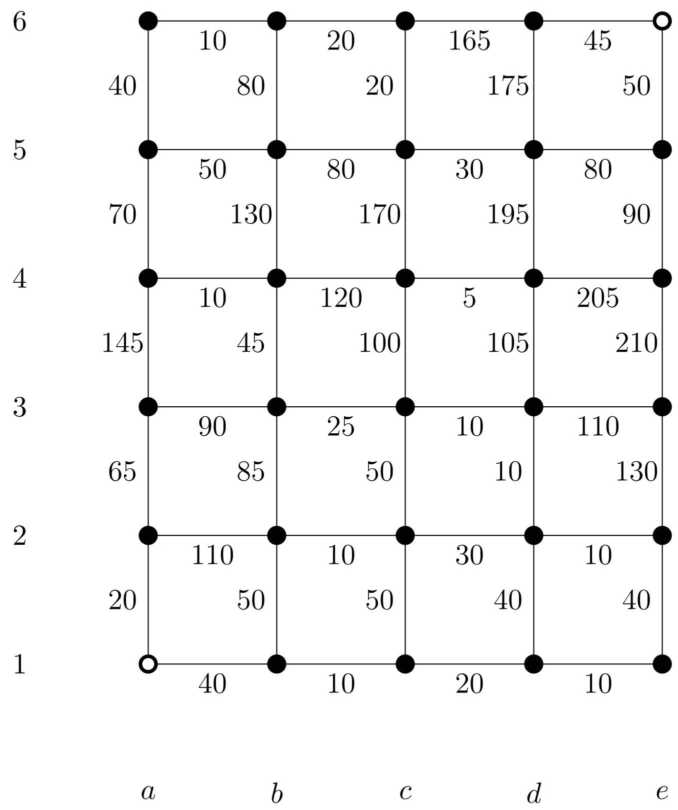
Térjünk át a 800 és 899 közé eső számokra. Itt a keresett számnak oszthatónak kell lennie 8-cal. Tehát a szám biztosan páros, azaz az utolsó számjegye páros. Ezért ahhoz, hogy a számjegyeinek szorzatával osztható legyen, a szám osztható 16-tal is.

Hét ilyen szám van, ezeket nézzük végig. 896 (nem osztható 9-cel), 880 (nem osztható 0-val), 864 (nem osztható $8 \cdot 2 \cdot 4 = 64$-gyel), 848 (csak 16-tal osztható), 832 (nem osztható 3-mal), $816 = 8 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 17$. Mivel a legnagyobbtól indulva ez az első megfelelő szám, így 816 a megoldás.

D-9. Betűzzük az oszlopokat és számozzuk a sorokat az ábra szerint, hogy minden kereszteződést elnevezhessünk. Így az A neve $a1$, a B neve $e6$, a C neve pedig $c1$ lesz.



Vegyük észre, hogy ha Zsuzsi az útja során x métert megy felfelé, akkor éppen ugyanennyit jön lefelé, hiszen végül ugyanolyan magasra érkezik, mint ahonnan indult. Tehát, ha Zsuzsi útja során minden utcára összeadjuk az emelkedés vagy lejtés abszolútértékét, akkor éppen a felfelé megtett távolság kétszeresét kapjuk. Írjuk rá ezeket az abszolútértékeket az utcákra. Egy út hossza legyen az általa használt utcákra írt számok összege. Itt keressük azt az utat $a1$-ből $e6$-ba, amelynek a hossza legkisebb (ezt legrövidebb útnak fogjuk nevezni).



Ehhez sorban az egyes kereszteződésekre számoljuk ki az $a1$-ből az adott kereszteződésbe vezető legrövidebb útvonal hosszát. Ezt megtehetjük úgy, hogy tekintjük az eddig már kiszámolt kereszteződések halmazát (kezdetben ez csak $a1$), és megnézzük a még nem kiszámolt szomszédaikba vezető legrövidebb utak hosszát. Ezeket egyszerűen úgy tudjuk megadni, hogy veszünk egy kiszámolt kereszteződést, és ennek értékéhez hozzáadjuk a közte és valamelyik (még nem kiszámolt) szomszédja között futó utca értékét. Ha egy kereszteződést több helyről is elérünk, akkor a legrövidebb utat választjuk. Miután ezt kiszámoltuk az összes szomszédos kereszteződésre, vegyük az értékeik közül a legkisebbet és amelyik kereszteződésbe ilyen hosszú úton el tudtunk jutni, azt vegyük hozzá a már kiszámolt kereszteződésekhez.

Például: kezdetben csak az $a0$ kereszteződés van kiszámolva, ennek értéke 0. Nézzük a szomszédait: $a2$-be elérünk 20 hosszú úton, míg $b1$-be 40 hosszú úton. Így az $a2$-t vesszük hozzá a kiszámolt kereszteződésekhez, 20 értékkel. Következő lépésben el tudunk jutni $a3$-ba $a2$-ből, ennek hossza az $a2$ távolságánál az $a2 - a3$ utca hosszával nagyobb, azaz $20 + 65 = 85$, $b2$-be is eljutunk $a2$-ből, $20 + 110 = 130$ hosszú úton, míg $a1$-ből $b1$-be 40 hosszú úton. Így $b1$ a következő kiszámolt csúcs. Következő lépésben $a2$-ből eljutunk $a3$-ba 85 hosszú úton, $b2$-be 130 hosszú úton, míg $b1$-ből eljutunk $b2$-be 90 hosszú úton, $b1$-ből $c1$-be 50 hosszú úton. Ekkor $b2$ távolsága a 130 és a 90 közül a kisebb, tehát a 90 lesz. Viszont a legkisebb úthosszat $c1$-nél kapjuk, így $c1$ értékét is kiszámoltuk, mely 50 lesz.

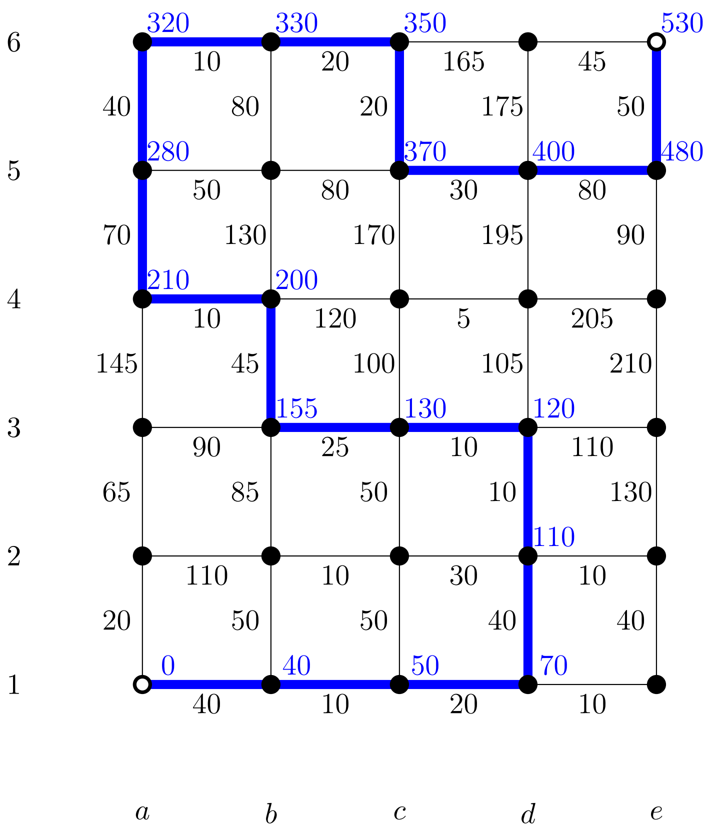
Ezt az eljárást folytatva az alábbi sorozatot kapjuk a kiszámolt csúcsokra:

$$a1 = 0, a2 = 20, b1 = 40, c1 = 50, d1 = 70, e1 = 80, a3 = 85, b2 = 90, c2 = 100, d2 = 110,$$

$$d3 = e2 = 120, c3 = 130, b3 = 155, b4 = 200, a4 = 210, d4 = 225, c4 = e3 = 230, a5 = 280,$$

$$a6 = 320, b6 = 330, c6 = b5 = 350, c5 = 370, d5 = 400, e4 = 440, e5 = 480, d6 = 515, e6 = 530.$$

Az út:



Így az emelkedés összesen $530 : 2 = 265$ méter.

Megjegyzés: Az eljárás helyességét is igazolhatjuk. Tegyük fel ugyanis, hogy valamelyik kereszteződést elérjük egy rövidebb úton. Nézzük meg azt a lépést, amikor ezt a kereszteződést kiszámoltuk. Ebben a lépésben a már kiszámolt kereszteződések szomszédai közül egy utcán keresztül ezt értük el a legrövidebb összúton. Ha nézzük azt az utat, ami ennél rövidebb, akkor az is valahol elhagyta a már kiszámolt kereszteződések halmazát egy élen, viszont akkor eddig a pontig már legalább olyan hosszú volt, mint amit az eljárás megadott. Tehát az eljárással minden kereszteződéshez a legrövidebb utat határoztuk meg.

D-10. A második bandának van nyerő stratégiája.

Miután az első banda kirabolt egy bankot, a kört "kiteríthetjük", azaz a bankokat felírhatjuk sorban, hogy a sor elején és a végén is a kirabolt bank legyen.

$$\otimes - \odot - \odot - \odot - \odot - \odot - \odot - \odot - \odot - \otimes$$

Az ábrán pirossal jelöljük azokat a bankokat, amiket már nem lehet kirabolni, vagy azért mert már valaki kirabolta őket, vagy mert mindkét szomszédjukat kirabolták. A többi bank zöld színű.

Következőnek mi lépünk. Válasszuk a balról harmadik zöld bankot. Ezután az állás a következő:

$$\otimes - \odot - \odot - \otimes - \odot - \odot - \odot - \odot - \odot - \otimes$$

Vizsgáljuk meg, hogy melyik bankot választhatja ezután a másik banda.

A eset: Ha az első kettő zöld bank valamelyikét rabolja ki, akkor marad öt szomszédos bank.

$$A1) \quad \otimes - \otimes - \otimes - \otimes - \odot - \odot - \odot - \odot - \odot - \otimes$$

Ezután válasszuk ki valamelyik szélső bankot, ekkor 4 szomszédos bank marad.

$$A2) \qquad \otimes - \otimes - \otimes - \otimes - \odot - \odot - \odot - \odot - \otimes - \otimes$$

Ha a másik banda valamelyik szélső bankot rabolja ki, akkor mi válasszuk a megmaradó háromból a középsőt. Ha a másik banda valamelyik középső bankot rabolja ki, akkor válasszuk bármelyiket a két megmaradó zöld bankból. Így mindkét esetben mi raboljuk ki az utolsó bankot, azaz megnyertük a játékot.

B eset: A másik banda az öt szomszédos zöld bank közül valamelyik szélsőt rabolja ki. Ekkor marad kettő és négy zöld bank egymás mellett.

$$B1) \qquad \otimes - \odot - \odot - \otimes - \otimes - \odot - \odot - \odot - \odot - \otimes$$

Válasszuk ki a két szomszédos zöld bank egyikét. Ezután négy egymás melletti zöld bank marad.

$$B2) \qquad \otimes - \otimes - \otimes - \otimes - \otimes - \odot - \odot - \odot - \odot - \otimes$$

Fent beláttuk, hogy ha négy szomszédos bank marad és a másik banda következik, akkor mi nyerjük a játékot. Így ezzel az esettel is végeztünk.

C eset: A másik banda az öt szomszédos zöld bank közül a másodikat vagy negyediket választja. A szimmetria miatt mindkét eset ugyanúgy működik, azaz feltehetjük, hogy a másodikat rabolták ki.

Ekkor marad kettő és három zöld bank egymás mellett.

$$C1) \qquad \otimes - \odot - \odot - \otimes - \otimes - \otimes - \odot - \odot - \odot - \otimes$$

Válasszuk ki a három szomszédos zöld bankból valamelyik szélsőt. Ezután két-két szomszédos zöld bank marad.

$$C2) \qquad \otimes - \odot - \odot - \otimes - \otimes - \otimes - \odot - \odot - \otimes - \otimes$$

Két egymás melletti zöld bankból bármelyiket kiválasztják, akkor a másikat sem lehet többé választani, hisz mindkét szomszédját kirabolták. Azaz minden bankpárból pontosan az egyik bankot lehet kirabolni. Mivel két pár van és a másik banda jön, ezért miénk lesz az utolsó bank.

D eset: A másik banda az öt szomszédos zöld bank közül a középsőt választja.

Ekkor marad három szomszédos zöld bankpár.

$$D1) \qquad \otimes - \odot - \odot - \otimes - \odot - \odot - \otimes - \odot - \odot - \otimes$$

Minden bankpárból pontosan az egyik bankot lehet kirabolni, azaz ha három bankpár van, és mi jövünk, akkor az utolsó bankpár is ránk marad. Tehát a mi bandánk rabolhat utoljára.