XVIII.
Dürer Verseny
Online forduló (2024. 10. 21.)
Megoldások

E kategória

Válaszok

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
10	2	18	217	66	18	5	816	265

Részletes megoldások

E-1. Lássuk be, hogy semelyik malacka sem olvashat el több, mint 2 könyvet. Tegyük fel, hogy van aki elolvas 3 könyvet. A három könyvből legalább kettő 90 perc hosszú, azaz $30+90+90=210$ percet tölt olvasással. Ez nem lehetséges, hiszen csak 180 perc telik el 2 és 5 óra között. Tehát minden kismalac legfeljebb 2 könyvet olvas el.

Ez meg is valósítható az ábrán látható módon:

	2 óra			5 óra
1. kismalac	1. könyv		2. könyv	
2. kismalac	2. könyv		3. könyv	
3. kismalac	3. könyv		4. könyv	
4. kismalac	4. könyv		5. könyv	
5. kismalac	5. könyv		1. könyv	

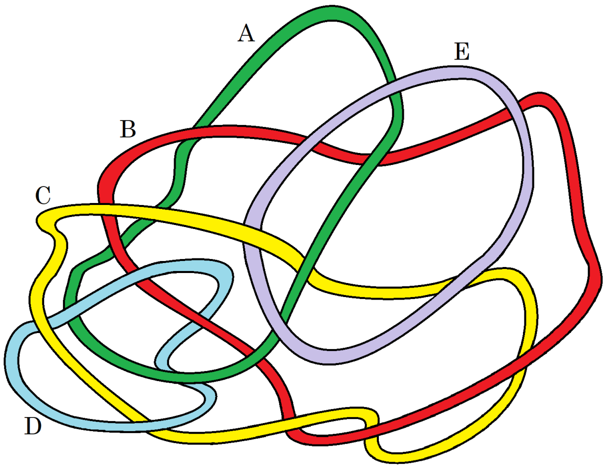
Azaz a leírt számok összege legfeljebb 10.

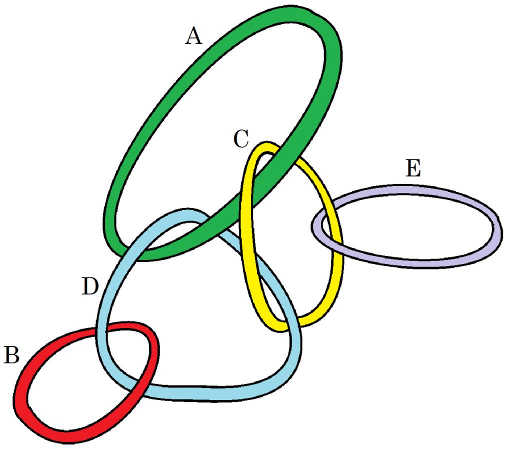
E-2. Az ábrán 5 nyaklánc van, melyeket nevezzünk A, B, C, D, E-nek az ábra szerint.

Az A, C és D láncok páronként összekulcsolódtak. Tehát ebből a háromból legalább kettő csatját ki kell nyitnia Pistinek, hogy szétszedje őket. Tehát a válasz legalább 2.

Az E nyaklánc a C-be és a B lánc a D-be van belefűzve. Így ahhoz, hogy ezeket is különválaszthassa, az E és C, és a B és D láncok csatjai közül egyet-egyet ki kell nyitnia.

Tehát a C és D csatjainak kinyitásával minden nyaklánc visszatehető a dobozába, így 2 a válasz.





E-3. Legyen az az x. kilométer, amikor Peti ivott. Ekkor x osztható 4-gyel. Tudjuk, hogy következőnek az $x+3$. kilométer kezdetekor ivott Zoli. Tehát $x+3$ osztható 5-tel. Ezekből következik, hogy $x+8$ osztható 4-gyel és 5-tel is, azaz osztható 20-szal. Így $x+8=20$, 40 vagy 60. $x+8=80$ már nem lehetséges, mert az $x+3$. kilométernél a fiúk még bicikliztek, azaz $x+3 \leq 72$. Emiatt x lehetséges értékei: 12, 32, 52.

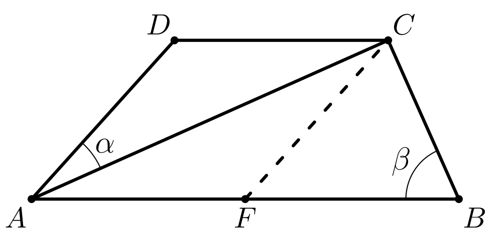
A feladat szövegéből azt is tudjuk, hogy x-től $x+3$-ig semelyik szám nem osztható 7-tel, hiszen Marci nem vette elő a kulacsát Zoli előtt vagy vele együtt. Emiatt $x=12$, $x=32$ kiesik, hisz 7 osztja $12+2=14$-et és $32+3=35$-öt.

Tehát Zoli az $52+3=55$. kilométer elején ivott. Innentől még $72-55+1=18$ kilométer volt hátra, hiszen még az 55. kilométert is végigtekerték a fiúk.

E-4. Az 1. és 2. egyenletből: $A + A \cdot B = A \cdot (B+1) = C = B^3 + 1$. Az ismert azonosság miatt $B^3 + 1 = (B+1) \cdot (B^2 - B + 1)$.

Tehát $A \cdot (B+1) = (B+1) \cdot (B^2 - B + 1)$. Mivel $B + 1 \neq 0$, így leoszthatunk vele: $B^2 - B + 1 = A$. A 2. egyenletből látszik, hogy a lehető legkisebb B esetén lesz C a legkisebb. Azaz a legkisebb B-t keressük, amire $B^2 - B + 1 = A \geq 24$. $B = 1, 2, 3, 4, 5$-re $A = 1, 3, 7, 13, 21 < 24$, de $B = 6$ esetén $A = 31 > 24$, így $C = 6^3 + 1 = 217$ lesz a megoldás.

E-5. CF párhuzamos AD-vel a feladat szövege szerint. Mivel $ABCD$ trapéz, ezért AF és DC is párhuzamos, tehát $AFCD$ paralelogramma, sőt rombusz, mert két szomszédos oldala egyenlő. Így $AF = FC = DC$ és szimmetria miatt $DAC\angle = CAF\angle = ACF\angle$. Mivel $FC = AF = FB$, így BCF egyenlőszárú háromszög, azaz $FBC\angle = BCF\angle$. Tudjuk, hogy $180° = CAF\angle + ACF\angle + FCB\angle + FBC\angle = 2 \cdot (CAF\angle + FBC\angle) = 2 \cdot (24° + FBC\angle)$, amiből $FBC\angle = 90° - 24° = 66°$ következik.



E-6. Két vádló-kör lesz a bagoly jegyzetében az ábra szerint. A gyanúsítást nyíllal jelöljük.

$$
\begin{tikzcd}
\text{róka} \arrow[d] & \text{nyúl} \arrow[l] \\
\text{egér} \arrow[r] & \text{sólyom} \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\text{medve} \arrow[dd] & \\
 & \text{őz} \arrow[ul] \\
\text{farkas} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Ha egy körön valaki bevádol valakit, az a másik kör állatainak vallomását nem befolyásolja, ezért elég külön-külön a két körön megnézni, hogy hányféle lehet a gyanúsítottak száma és összeszorozni.

Nézzük a 4 hosszú kört. Tegyük fel, hogy az első megkérdezett az egér (ha más az első, az a szimmetria miatt ugyanígy fog működni). A sólyom biztosan gyanúsított lesz és a válasza nem fontos, tehát a nyúl biztos nem lesz gyanúsított és a vallomása számít. Ezért ha a nyúl a róka előtt lesz kikérdezve, akkor a róka és a sólyom lesz a bagoly listáján. Az egér nem kerül fel a listára, mert a róka gyanúsítása már nem számít. Tehát ekkor két (nem szomszédos) gyanúsított lesz a körben, ami attól függően, hogy kit kérdeztünk először, kétféle lehet: sólyom és róka vagy egér és nyuszi.

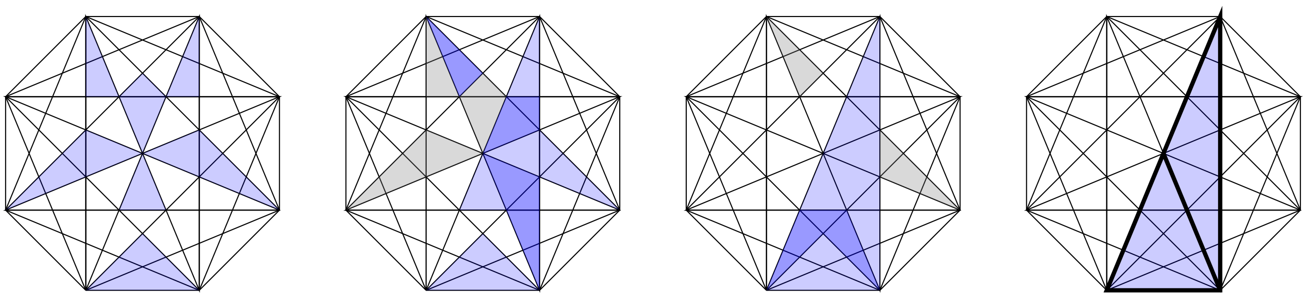
Ha a rókát kérdezzük a nyúl előtt, ő ugyan bevádolja az egeret, de neki a vallomását már figyelembe vettük, így a sólyom a listán marad és felkerül mellé az egér. A bagoly a rókát is felírja, mert a nyuszi meggyanúsítja és az ő vallomását figyelembe veszi a bagoly. Ekkor tehát három gyanúsított lesz, és egy marad ki, tehát négyféle lehet a vádlottak listája. Attól függően, hogy kit kérdeztünk először, mind a négy eset elő is fordul.

Tehát összesen erről a körről $2 + 4 = 6$-féle gyanúsított csoport készülhet.

Hasonlóan a három hosszú körön, ha a farkas tesz vallomást először, akkor az őz válasza nem érdekes, tehát a medve válasza számít. Így a medve nem lesz gyanúsított, de a farkas igen. Tehát innen mindig ketten leszek gyanúsítva, ami háromféleképpen fordulhat elő.

A két körben összesen tehát $6 \cdot 3 = 18$-féle lehet a gyanúsítottak listája.

E-7. Rendezzük át az ábrát úgy, hogy veszünk néhány színezett részt és helyettük ezekkel egybevágó részeket színezünk ki. Azok az alakzatok, amik egymás tükörképei vagy elforgatottjai egybevágóak. Használjuk ki, hogy a nyolcszög forgásszimmetrikus és van 8 szimmetriatengelye.



A nyolcszöget a szemközti csúcsokat összekötő átlók nyolc egybevágó kis háromszögre bontják. Az átrendezés után kapott kiszínezett háromszög alapja épp a nyolcszög egy oldala, a magassága kétszer akkora, mint egy kis háromszög magassága. Azaz a kiszínezett háromszög területe kétszerese egy kis háromszögének, tehát $\frac{1}{4}$-e a nyolcszög területének. Így a válasz $1 + 4 = 5$.

E-8. Kezdjük a legnagyobb háromjegyűektől: a kilencessel kezdődőektől, azaz keressünk megfelelő számot 900 és 999 között.

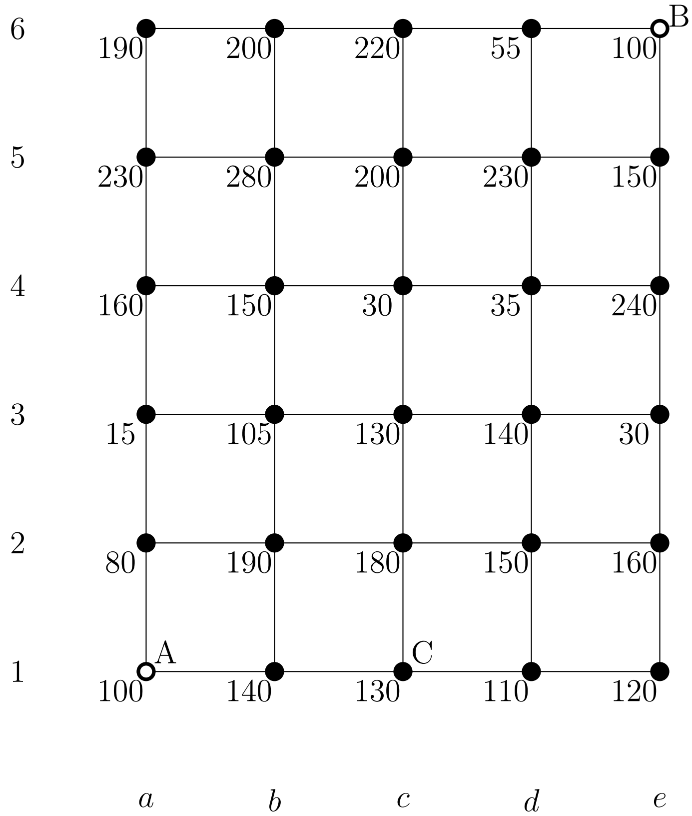
Először vizsgáljuk meg a 999 és 900 számokat. 999 osztható 9-cel, de 81-gyel már nem, így nem jó. 900 sem jó, hisz csak a 0 osztható 0-val.

A 901 és 998 közötti számok közül olyat keresünk, ami 9-cel osztható, hiszen 9 az egyik számjegye. A második két számjegy összegének 9-cel oszthatónak kell lennie (a kilences oszthatóság szabályai szerint). A két utolsó számjegy összege 1 és 17 közé esik, mivel a 900-at és a 999-et már kizártuk. Tehát csak olyan szám lehet megfelelő, aminek az utolsó két számjegyének összege 9. Emiatt a két számjegy közül az egyik páros, azaz a szám osztható 2-vel is. Tehát elég átnéznünk a 18-cal osztható számokat 901 és 998 között. Ezek a 990 (nem osztható 0-val), a 972 (nem osztható 7-tel), a 954 (nem osztható 5-tel), a 936 (nem osztható $9 \cdot 3 = 27$-tel) és a 918 (nem osztható 8-cal).

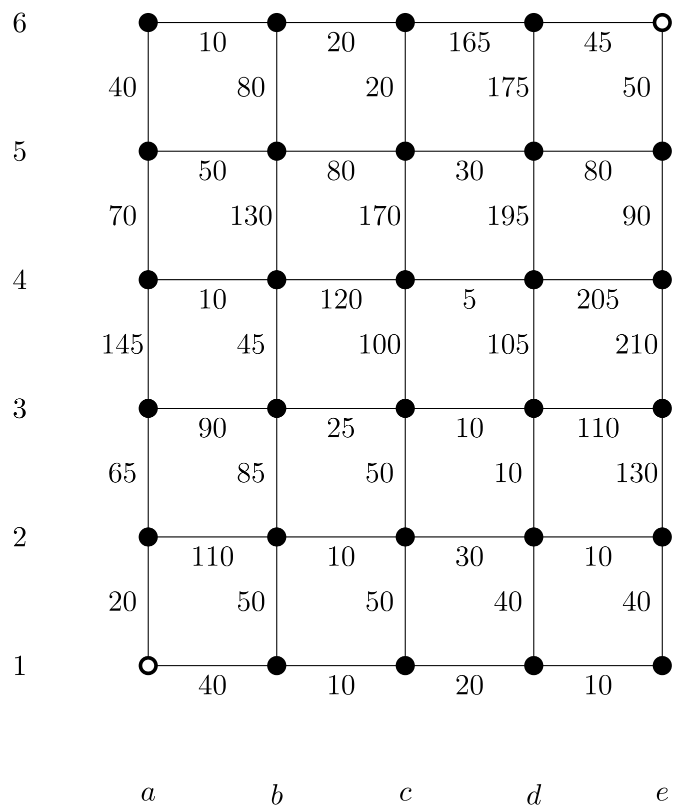
Térjünk át a 800 és 899 közé eső számokra. Itt a keresett számnak oszthatónak kell lennie 8-cal. Tehát a szám biztosan páros, azaz az utolsó számjegye páros. Ezért ahhoz, hogy a számjegyeinek szorzatával osztható legyen, a szám osztható 16-tal is.

Hét ilyen szám van, ezeket nézzük végig. 896 (nem osztható 9-cel), 880 (nem osztható 0-val), 864 (nem osztható $8 \cdot 2 \cdot 4 = 64$-gyel), 848 (csak 16-tal osztható), 832 (nem osztható 3-mal), $816 = 8 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 17$. Mivel a legnagyobbtól indulva ez az első megfelelő szám, így 816 a megoldás.

E-9. Betűzzük az oszlopokat és számozzuk a sorokat az ábra szerint, hogy minden kereszteződést elnevezhessünk. Így az A neve $a1$, a B neve $e6$, a C neve pedig $c1$ lesz.



Vegyük észre, hogy ha Zsuzsi az útja során x métert megy felfelé, akkor éppen ugyanennyit jön lefelé, hiszen végül ugyanolyan magasra érkezik, mint ahonnan indult. Tehát, ha Zsuzsi útja során minden utcára összeadjuk az emelkedés vagy lejtés abszolútértékét, akkor éppen a felfelé megtett távolság kétszeresét kapjuk. Írjuk rá ezeket az abszolútértékeket az utcákra. Egy út hossza legyen az általa használt utcákra írt számok összege. Itt keressük azt az utat $a1$-ből $e6$-ba, amelynek a hossza legkisebb (ezt legrövidebb útnak fogjuk nevezni).



Ehhez sorban az egyes kereszteződésekre számoljuk ki az $a1$-ből az adott kereszteződésbe vezető legrövidebb útvonal hosszát. Ezt megtehetjük úgy, hogy tekintjük az eddig már kiszámolt kereszteződések halmazát (kezdetben ez csak $a1$), és megnézzük a még nem kiszámolt szomszédaikba vezető legrövidebb utak hosszát. Ezeket egyszerűen úgy tudjuk megadni, hogy veszünk egy kiszámolt kereszteződést, és ennek értékéhez hozzáadjuk a közte és valamelyik (még nem kiszámolt) szomszédja között futó utca értékét. Ha egy kereszteződést több helyről is elérünk, akkor a legrövidebb utat választjuk. Miután ezt kiszámoltuk az összes szomszédos kereszteződésre, vegyük az értékeik közül a legkisebbet és amelyik kereszteződésbe ilyen hosszú úton el tudtunk jutni, azt vegyük hozzá a már kiszámolt kereszteződésekhez.

Például: kezdetben csak az $a0$ kereszteződés van kiszámolva, ennek értéke 0. Nézzük a szomszédait: $a2$-be elérünk 20 hosszú úton, míg $b1$-be 40 hosszú úton. Így az $a2$-t vesszük hozzá a kiszámolt kereszteződésekhez, 20 értékkel. Következő lépésben el tudunk jutni $a3$-ba $a2$-ből, ennek hossza az $a2$ távolságánál az $a2 - a3$ utca hosszával nagyobb, azaz $20 + 65 = 85$, $b2$-be is eljutunk $a2$-ből, $20 + 110 = 130$ hosszú úton, míg $a1$-ből $b1$-be 40 hosszú úton. Így $b1$ a következő kiszámolt csúcs. Következő lépésben $a2$-ből eljutunk $a3$-ba 85 hosszú úton, $b2$-be 130 hosszú úton, míg $b1$-ből eljutunk $b2$-be 90 hosszú úton, $b1$-ből $c1$-be 50 hosszú úton. Ekkor $b2$ távolsága a 130 és a 90 közül a kisebb, tehát a 90 lesz. Viszont a legkisebb úthosszat $c1$-nél kapjuk, így $c1$ értékét is kiszámoltuk, mely 50 lesz.

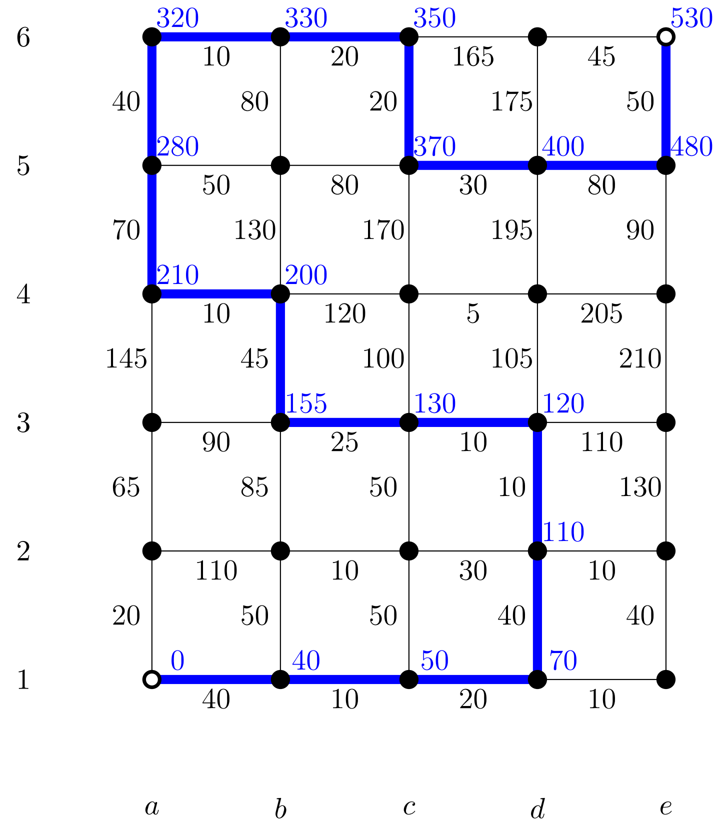
Ezt az eljárást folytatva az alábbi sorozatot kapjuk a kiszámolt csúcsokra:

$$a1 = 0, a2 = 20, b1 = 40, c1 = 50, d1 = 70, e1 = 80, a3 = 85, b2 = 90, c2 = 100, d2 = 110,$$

$$d3 = e2 = 120, c3 = 130, b3 = 155, b4 = 200, a4 = 210, d4 = 225, c4 = e3 = 230, a5 = 280,$$

$$a6 = 320, b6 = 330, c6 = b5 = 350, c5 = 370, d5 = 400, e4 = 440, e5 = 480, d6 = 515, e6 = 530.$$

Az út:



Így az emelkedés összesen $530 : 2 = 265$ méter.

Megjegyzés: Az eljárás helyességét is igazolhatjuk. Tegyük fel ugyanis, hogy valamelyik kereszteződést elérjük egy rövidebb úton. Nézzük meg azt a lépést, amikor ezt a kereszteződést kiszámoltuk. Ebben a lépésben a már kiszámolt kereszteződések szomszédai közül egy utcán keresztül ezt értük el a legrövidebb összúton. Ha nézzük azt az utat, ami ennél rövidebb, akkor az is valahol elhagyta a már kiszámolt kereszteződések halmazát egy élen, viszont akkor eddig a pontig már legalább olyan hosszú volt, mint amit az eljárás megadott. Tehát az eljárással minden kereszteződéshez a legrövidebb utat határoztuk meg.

E-10. Először vizsgáljuk meg azokat az eseteket, ahol páros számú bank van. Ilyenkor az ábra középpontosan szimmetrikus, minden banknak van egy párja: az a bank, ami a körben szemben van vele. Páros számú bankra mindig a második bandának van nyerő stratégiája. A stratégia a következő: mindig tükrözzük az ellenfél lépését. Tehát, ha a másik banda kirabolt egy bankot, akkor raboljuk ki a vele szemben lévőt. Ezt mindig megtehetjük, hiszen a másik banda akkor tudta kirabolni az adott bankot, ha legalább az egyik szomszédja még érintetlen. Mivel mindig tükröztük a másik lépését, ezért az érintetlen bankkal szemben érintetlen van. Tehát a választott (másik banda által kirabolttal szemközti) bank egyik szomszédja érintetlen, azaz szabályosan kiválaszthattuk.

Így mi rabolhatunk utoljára, hiszen minden alkalommal tudunk válaszolni a másik banda lépésére (ha a másik banda talál kirabolható bankot, akkor mi is, mert a szemközti is kirabolható).

Nézzük meg azokat az eseteket, ahol páratlan bank van.

Ha három bank van, akkor a második bandának van nyerő stratégiája. Bármelyik bankot is választja az első banda, marad két szomszédos kirabolható bank. Ezek bármelyikét kirabolva a másodiknak már mindkét szomszédját kirabolták, tehát nem lehet több bankot választani. Így a második banda nyert, hisz ők választottak utoljára.

Ha öt bank van akkor az első bandának van nyerő stratégiája. Miután az első banda kirabolt egy bankot, a kört "kiteríthetjük", azaz a bankokat felírhatjuk sorban, hogy a sor elején és a végén is a kirabolt bank legyen.

Az ábrán pirossal jelöljük azokat a bankokat, amiket már nem lehet kirabolni, vagy azért mert már valaki kirabolta őket, vagy mert mindkét szomszédjukat kirabolták. A többi, kirabolható bank zöld színű.

Ekkor négy szomszédos zöld bank marad. Ha a másik banda valamelyik szélső bankot rabolja ki, akkor mi válasszuk a megmaradó háromból a középsőt. Ha a másik banda valamelyik középső bankot rabolja ki, akkor válasszuk bármelyiket a két megmaradó zöld bankból. Így mindkét esetben mi raboljuk ki az utolsó bankot, azaz megnyertük a játékot.

Hét, illetve kilenc bank esetén a stratégia $C - 10.$, illetve $D - 10.$ feladat megoldásában szerepel.