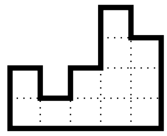
XVIII. Dürer Verseny

Helyi forduló (2024. 11. 22.)

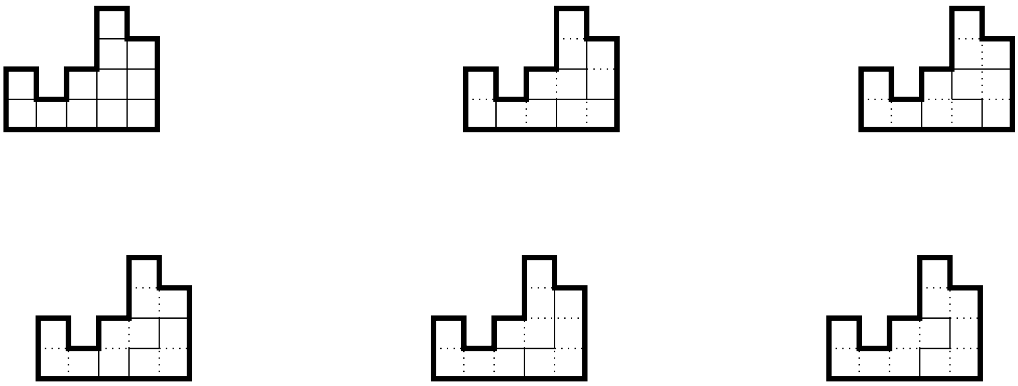
Megoldókulcs

D kategória

D1. Bontsátok fel a jobb oldali alakzatot a rácsvonalak mentén legalább két darab egybevágó sokszögre! Adjatok meg a Válaszlapon minél több felbontási lehetőséget!



Megoldás:



Az alakzat területe 12 egység. Mivel a rácsvonalak mentén vágjuk részekre, ezért a részek területe egész szám. Tehát minden, a feladat feltételeinek megfelelő sokszög területe osztója 12-nek. Mivel legalább 2 egybevágó sokszögre kell bontanunk, a sokszög területe legfeljebb az alakzat területének fele, azaz 6 lehet. Így a sokszög területe 1, 2, 3, 4 vagy 6 lehet.

Megmutatjuk, hogy a fenti ábrákon szereplő konstrukciókon kívül más megoldás nem lehetséges. Jelölje P a bal szélső oszlop legfelső négyzetét. Ha ezt egy legfeljebb 4 területű sokszöggel szeretnénk lefedni, annak az alakja egyértelmű. Ezt kihasználva a megmaradó alakzatot csak az ábrán látható módokon bonthatjuk fel.

Ebből látszik az is, hogy amikor két 6 területű sokszögre bontjuk az alakzatot, akkor az egyiknek tartalmaznia kell a 4 területű P-t fedő L-alakú sokszöget, amivel az 5. megoldásban fedjük az alakzatot.

Így már csak azt kell megnéznünk, hogy az L-alakú sokszöget melyik két négyzettel egészítsük ki, hogy egy 6 területű szöget kapjunk. A megoldásként mutatott sokszögön kívül minden 6 területű P-t tartalmazó sokszög tartalmazza a legalsó sor 4. négyzetét, így van benne egy 4×1 méretű téglalap, viszont ha ezt a vízszintes téglalapot kiszedjük az alakzatból, akkor a maradékban nem lesz sem 4×1 -es, sem 1×4 -es téglalap, így tehát nem osztható fel ilyen sokszögekre. Ezzel beláttuk, hogy csak a mutatott 6 módon lehet egybevágó sokszögekkel egybevágó sokszögekre osztani az alakzatot rácsvonalak mentén.

D2. Zsuzsi az alábbi ábrán lévő számjegyeket kiegészítette egy 11 jegyű számmá úgy, hogy a vonalakra írt még néhány számjegyet. A kapott számban bármely két szomszédos számjegyre igaz, hogy

- az egyik számjegy a másik kétszerese, vagy
- a két számjegy 1-gyel tér el egymástól.

Mi a lehető legnagyobb szám, amit Zsuzsi kaphatott? Adjatok meg a Válaszlapon egy minél nagyobb eredményt!
Zsuzsi nem feltétlenül írt minden vonalra számjegyet. Például kaphatta a 43678424563 *számot, ahogyan ezt a Válaszlapon lévő ábra is mutatja, de ez nem a legnagyobb lehetőség.*

______ 6 ______ 7 ______ 2 ______ 6 ______

Megoldás: Rövid válasz: A lehető legnagyobb szám a 98767843236. Belátjuk, hogy ennél nem kaphatott nagyobb számot Zsuzsi.

Az a cél, hogy a szám minél nagyobb legyen, ezért Zsuzsi azt szeretné, hogy kilencessel kezdődjön. Ekkor feltehetjük, hogy eredetileg öt megadott szám van: 9, 6, 7, 2, 6.

Vizsgáljuk meg, mit írhatott Zsuzsi a vonalakra, most azokat a megoldásokat nézve, amelyek a lehető legkevesebb, vagy ennél eggyel több jegyet tartalmaznak.

- 9 és 6 között: vagy két számjegyet ír be, 9876, vagy hármat, 98456, vagy legalább 4 számjegyet tud Zsuzsi ide írni.
- 6 és 7 között: hagyhatja üresen, rakhat 2 számjegyet (pl. 6767), de pontosan 1 számjegyet nem tud rakni.
- 7 és 2 között: legalább két jegyet be kell szúrnia. Lehet 7842, 78432, vagy lehet, hogy legalább 4 jegyet szúr be, vagy hogy 6 következik a 7 után. Az utóbbi opciónál mindig jobban megéri, ha ugyanannyi jegyet ír ide, de 8 követi a 7-et.
- 2 és 6 között: lehet 236 vagy 2456 ha legfeljebb két számjegyet rak ide.
- 6 után: hagyhatja üresen, vagy rakhat akármennyi számjegyet.

Összesen 11 jegyű a szám, 5 számjegy már meg van adva (a 9-essel együtt), így 6 szabadon felhasználható számjegy maradt. Mivel 9 és 6 között szüksége van legalább kettő, 7 és 2 között is legalább kettő, 2 és 6 között pedig legalább egy számjegyre, ezért a 6 és 7 közötti vonalat biztosan üresen kell hagynia. Még egy számjegy maradt, amit a vonalra írhatott.

Lehetséges opciók:

- Az utolsó 6 után kerül a plusz számjegy: 987**67**84**2**3**6**7,
- A 7 és 2 közé kerül egy harmadik jegy: 987**67**843**2**3**6**,
- A 2 és 6 közé kerül egy második jegy: 987**67**84**2**45**6**,
- A 9 és 6 közé kerül egy harmadik jegy: 9845**67**84**2**3**6**.

Ezeket a lehetőségeket összehasonlítva a legnagyobb szám a 98767843236.

D3. Ádámnak van öt szabályos dobókockája. Ezekkel több körben dobott, mindig feljegyezve az öt dobott szám összegét és szorzatát. Ádám észrevette, hogy a második körtől kezdve minden körben

- az összeg kisebb volt, mint az azt megelőző körben, és
- a szorzat nagyobb volt, mint az azt megelőző körben.

Legfeljebb hány körig dobhatott Ádám? A Válaszlapon adjatok meg egy minél több körből álló dobássorozatot, mely megfelel a feltételeknek! Körönként írjátok le az összeget (Ö) és a szorzatot (Sz) is!
Egy szabályos dobókocka lapjain 1-től 6-ig szerepelnek a számok.

Megoldás:

Öt hosszú kockadobás elérhető:

Dobás sorszáma	1.	2.	3.	4.	5.	Összeg	Szorzat
1.	6	6	6	1	1	20	216
2.	6	6	4	2	1	19	288
3.	5	5	4	3	1	18	300
4.	5	4	4	2	2	17	320
5.	4	3	3	3	3	16	324

Most pedig megmutatjuk, hogy ennél hosszabb dobássorozat nem lehetséges. Készítsünk egy táblázatot arról, hogy egy adott összeg esetén mi a lehetséges minimális és maximális szorzat. (A számtani-mértani közepek közti egyenlőtleség következményei miatt, adott összeg esetén akkor a legnagyobb szorzat, amikor a számok közel azonosak, a legkisebb pedig akkor, amikor a számok közt minél nagyobb a különbség, azaz egy szám kivételével minden szám 1-es vagy 6-os.)

Összeg	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Min szorzat	1	2	3	4	5	6	12	18	24	30	36	72	108	144	180
Max szorzat	1	2	4	8	16	32	48	72	108	162	243	324	432	576	768

Összeg	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Min szorzat	216	432	648	864	1080	1296	2592	3888	5184	6480	7776
Max szorzat	1024	1280	1600	2000	2500	3125	3750	4500	5400	6480	7776

Hat hosszú sorozat csak úgy állhat elő, hogy x összeg esetén a maximális szorzat nagyobb, mint $x+5$ esetén a minimális szorzat. Ez egyedül $x=15$-re fordul elő, $x=15$-re a maximális szorzat 243, $x+5=20$-ra pedig a minimális szorzat 216. Ez alapján a 15 és 20 közti összegekre 216 és 243 közti szorzatot kéne kapnunk. Mivel a dobott számok mind 1 és 6 közé esnek, így a szorzatukban minden prímtényező kisebb 7-nél. Azonban a 216 és 243 között csak a 216, 225, 240 és 243 olyan számok, amikben csak 2, 3 és 5 prímtényező van, vagyis 6 hosszú sorozat nem létezik.

D4. Egy szövegszerkesztő programban kezdetben egy lábnyom jel szerepel, amit szeretnénk megsokszorozni. Sajnos hekkertámadás áldozata lett a gépünk, és csak két funkció működik: a Másolás és a Beillesztés, ráadásul mindkettő 1 Dürer dollárba kerül használatonként. A Másolás funkció használatakor kijelölhetünk egy vagy több egymás utáni jelet a meglévők közül, és a gép megjegyzi azok darabszámát. A Beillesztés funkció használatakor annyi új lábnyom jelet tesz hozzá a gép a jelsorozathoz, amennyit a legutóbbi Másolásnál kijelöltünk. Ha még nem Másoltunk, akkor nem használhatjuk a Beillesztést. Legkevesebb hány Dürer dollárt kell fizetnünk, ha:

a) a célunk pontosan 77 lábnyom jelet kapni?

b) a célunk pontosan 100 lábnyom jelet kapni?

Mindkét résznél a Válaszlapon adjatok meg egy minél kevesebb Dürer dollárba kerülő lépéssorozatot! Minden oszlopba egy lépést írjatok. Oszloponként írjátok le a használt funkció kezdőbetűjét, majd hogy hány jelet jelöltök ki (Másolásnál) vagy illesztetek be (Beillesztésnél), majd pedig azt, hogy ezután hány jel lett összesen!

Az alábbi példában szereplő lépéssorozatban először a kezdeti egy jelet Másoljuk, majd háromszor Beillesztjük, ilyen módon négy jelet kapva. Majd a kapott négy jel közül hármat Másolunk és azt Beillesztjük, így végül hét jel lesz. Ez a lépéssorozat 6 lépésből áll, így 6 Dürer dollárt kellene fizetnünk érte.

Funkció	M	B	B	B	M	B
Kijelölt/beillesztett jelek	1	1	1	1	3	3
Összes jelek	1	2	3	4	4	7

Megoldás: a) Ha 77 lábnyom jelet szeretnénk, ez 12 Dürer dollárból elérhető

Funkció	M	B	B	M	B	B	M	B	B	M	B	B
Kijelölt/beillesztett jelek	1	1	1	3	3	3	9	9	9	25	25	25
Összes jelek	1	2	3	3	6	9	9	18	27	27	52	77

b) Ha 100 lábnyom jelet szeretnénk, ez 13 Dürer dollárból elérhető

Funkció	M	B	B	B	M	B	B	M	B	B	M	B	B
Kijelölt/beillesztett jelek	1	1	1	1	4	4	4	12	12	12	32	32	32
Összes jelek	1	2	3	4	4	8	12	12	24	36	36	68	100

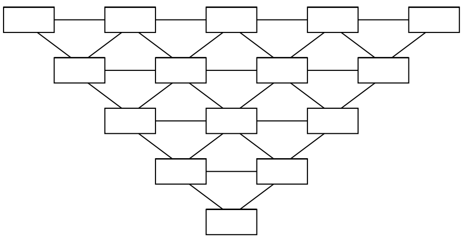
A bizonyítást, hogy kevesebb lépésben nem megoldható, később közöljük.

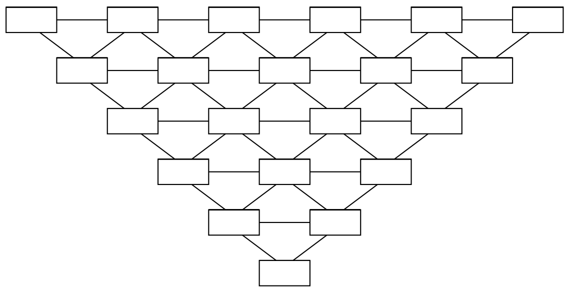
D5. Egy kriminalisztikai laborban rendelkezésünkre áll egy kétkarú mérleg, valamint nyolc, a tömegükkel címkézett mérősúly, melyek tömege $1, 2, \ldots, 8$ kg. Egy nyomozás során találtak egy aranytömböt, amely tömege megegyezik az egyik mérősúlyéval. Egy mérés során a kétkarú mérleg segítségével az aranytömböt összehasonlíthatjuk az egyik mérősúllyal. Egy ilyen mérés költsége a használt mérősúly tömegével egyenlő Dürer dollár. Legkevesebb hány Dürer dollárból határozható meg biztosan az aranytömb tömege? Adjatok meg olyan méréseket, melyekkel ennyi Dürer dollárból meghatározható, és indokoljátok is, hogy kevesebből miért nem lehet!
Például ha az aranytömböt a 2 kg-os súllyal hasonlítjuk össze, akkor ennek a mérésnek a költsége 2 Dürer dollár. A mérések függhetnek a korábbi mérések eredményeitől.

Megoldás: Legyen az első mérésünk az, hogy az 5 kg-os merősúllyal hasonlítjuk össze az aranytömb tömegét. Ha ennél nagyobb az arany tömege, akkor a 7 kg-os súllyal össszehasonlítva megállapíthatjuk az értékét. Ha kisebb mint 5 kg, akkor a 3 kg-os, majd az 1 kg-os súllyal való összehasonlítással tudjuk meghatározni. Ez összességében legfeljebb 12 dollárba kerül.

Belátjuk, hogy ennél olcsóbban nem lehet. Ha az első mérés során a 6 kg-ossal hasonlítjuk össze az aranytömböt, és az jön ki, hogy a tömb a nehezebb, akkor még össze kell hasonlítani vagy a 7 kg-ossal vagy a 8 kg-ossal, hogy meg tudjuk mondani a tömegét, de ez már legalább 13-ba kerül. Ha legalább 7 kg-os súllyal kezdünk, és azt kapjuk válasznak, hogy könnyebb az arany, akkor ha 5 vagy 6 kg-os az arany, ahhoz hogy el tudjuk dönteni melyik, az egyikkel össze kell hasonlítani, ami miatt ebben az esetben is kell legalább 12 dollár. Ha pedig az első mérés során a 4 kg-ossal vagy könnyebb súllyal hasonlítanánk össze, akkor ahhoz, hogy meg tudjuk különböztetni egymástól azt a két esetet, hogy az arany 5 kg-os vagy 6 kg-os, illetve azt a kettőt, hogy 7 kg-os vagy 8 kg-os, össze kell hasonltani a súlyt a számpárok egyikével, ezért legalább két mérés kell, melyek összesen legalább $5 + 7$-be kerülnek, így összesen legalább $1 + 5 + 7 = 13$-ba. Ezzel kész vagyunk a bizonyítással.

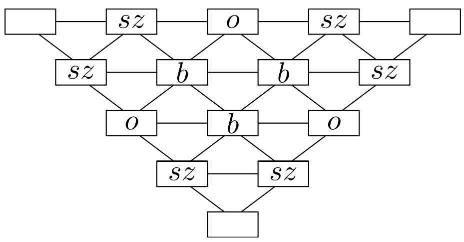
D6. **a)** Van egy olyan 15 elemű dominókészletünk, ahol az összes dominó mindkét felén az $1, 2, 3, 4, 5$ számok valamelyike szerepel. Nincs két olyan dominó, melyeken ugyanazok a számok találhatók. Le tudjuk-e helyezni a dominókat a bal oldali ábrán látható téglalapokra úgy, hogy bármely két szomszédos téglalapon lévő dominónak az egyik száma megegyezzen?
b) Mi a helyzet, ha a jobb oldali ábrára szeretnénk ugyanígy lehelyezni egy 21 elemű készletet, melyben a dominókon az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számok szerepelhetnek, és továbbra sincs két olyan dominó, melyeken ugyanazok a számok találhatók?
Az ábrákon azok a téglalapok szomszédosak, melyeket szakasz köt össze.



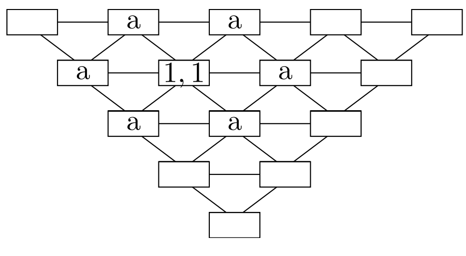


Megoldás: a) Nevezzük duplának azokat a dominókat, amiken két egyforma szám van. Ezekből 5 van, ezért bármilyen lerakásban lesz olyan dupla, ami nem a háromszög egyik sarkába kerül. Tegyük fel, hogy ez a dupla az $(1, 1)$ dominó. Ezt a dominót háromféle helyre tehetjük le:

- egy *belső* mezőre
- egy *oldalfelező* mezőre
- egy *szélső* mezőre.

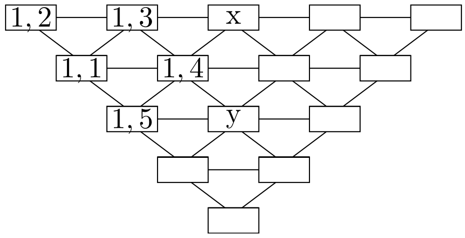


A következő ábrán b-vel jelölt mezők a *belső* mezők, az o-val jelöltek az *oldalfelező* mezők, az sz-szel jelöltek a *szélső* mezők.



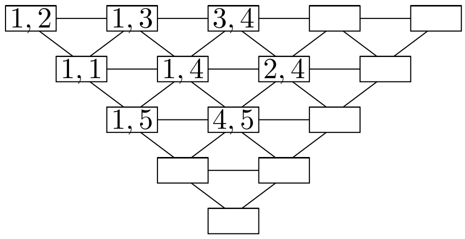
Először nézzük meg azt az esetet, amikor az $(1, 1)$ egy *belső* mezőre kerül. Ekkor 6 mező lesz szomszédos vele (az ábrán a-val jelölve), viszont ezek mindegyikén kell lennie egy 1-esnek. Ilyen dominóból viszont csak 4 maradt, így nem kaphatunk szabályos kirakást.

Következőnek nézzük azt az esetet, amikor az $(1, 1)$ egy *szélső* mezőben van. Ekkor ő 4 másik téglalappal szomszédos, így az $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)$ dominók ezekbe a téglalapokba kerülnek.



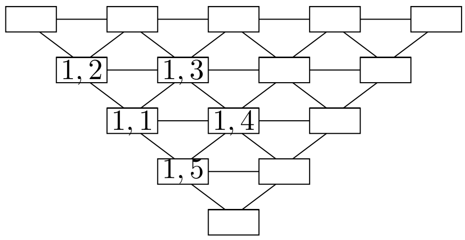
Az ábrán x-el jelölt mezőbe, csak olyan dominó kerülhet amin van 4, hiszen szomszédos $(1, 4)$-gyel és elhasználtunk minden olyan dominót, amin szerepel 1. Hasonlóan x szomszédos $(1, 3)$-mal, ezért az ide kerülő dominón szerepel 3, így az x helyére csak a $(3, 4)$ kerülhet. Ugyanezzel a gondolatmenettel azt kapjuk, hogy y helyére csak $(4, 5)$ kerülhet.

Nézzük meg azt az üres téglalapot, ami szomszédos x-szel és y-nal is. Az ide kerülő dominón is lennie kell 4-nek, hiszen szomszédos $(1, 4)$-el. Ez a dominó nem lehet a $(4, 4)$, hiszen az előző esetben láttuk, hogy dupla nem kerülhet középre, így csak a $(2, 4)$ kerülhet ebbe a téglalapba, így az alábbi ábrát kapjuk:

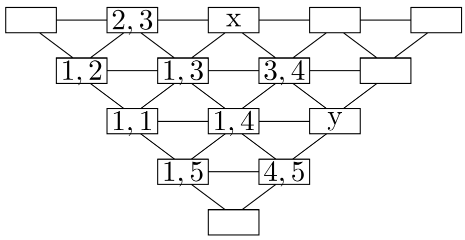


Az egyetlen 4-et tartalmazó dominó, amit még nem raktunk le a $(4, 4)$, ezt viszont már nem is tudjuk szabályosan lerakni, hiszen minden szabad téglalapnak van még ki nem töltött szomszédja, amibe így már nem kerülhet 4-et tartalmazó dominó. Ezzel beláttuk, hogy ha kezdetben egy duplát egy *szélső* mezőre teszünk, akkor nem kaphatunk szabályos lerakást.

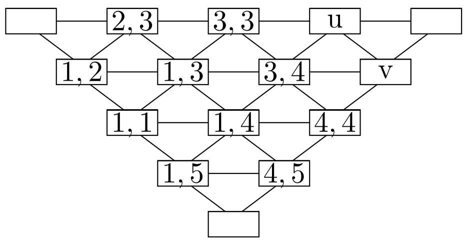
Az utolsó lehetséges eset az, ha az $(1, 1)$ egy *oldalfelező* mezőn van. Ekkor a szomszédait az előző esethez hasonlóan berajzolva a következő ábrát kapjuk:



Az előző esethez hasonlóan itt is néhány helyre egyértelműen meg van határozva, hogy mi kerülhet. Kezdjük el a lerakást, úgy, hogy minden lépésben olyan dominót rakunk le, ami máshová nem kerülhet. Így eljutunk a következő ábrához:



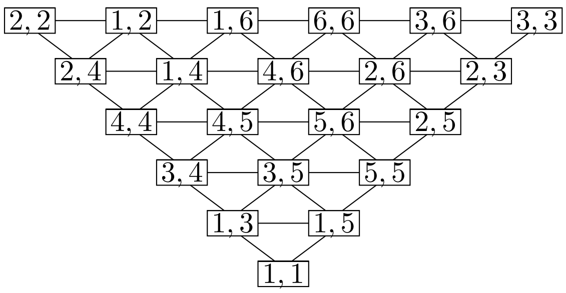
Az x dominó szomszédos $(1, 3)$-mal, így ide csak $(3, 3)$ vagy $(3, 5)$ kerülhet. Ha x helyére $(3, 5)$ kerülne, akkor a $(3, 3)$-at már egyik szabad mezőre sem tudnánk letenni, így x helyére muszáj $(3, 3)$-at tennünk. Hasonlóan y helyére a $(4, 4)$-et kell tennünk.



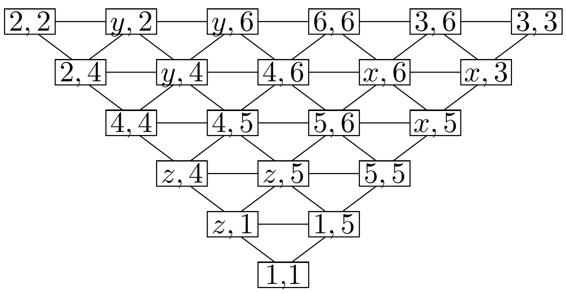
Látható, hogy u helyére mindenképp $(3, 5)$-nek kell kerülnie, v helyére pedig $(2, 4)$-nek, hiszen a még rendelkezésre állók közül egy másik dominó sem passzolna a szomszédaikhoz. Vegyük észre, hogy ez már nem egy szabályos lerakás, hiszen $(3, 5)$ és $(2, 4)$ szomszédos, de nincs olyan szám, ami mindkettőn szerepel, így ebben az esetben sem létezik szabályos lerakás.

Ezzel beláttuk hogy egyik esetben sem létezik szabályos lerakás, tehát nem lehet a feladat kérésének megfelelően lerakni a dominókat.

b) Mutatunk egy lerakást, amiben bármely két szomszédos dominónak az egyik száma megegyezik. Egy helyes lerakás:



Hogyan konstruálhatunk meg egy jó lerakást? Az a) feladatrészből az az intuitív megfigyelés adódhat, hogy a duplák helyzetére érdemes fókuszálni és ezeket előnyös minél távolabb tenni egymástól. Ez persze nem biztos, hogy igaz minden helyes konstrukcióra, de a mi esetünkben egy jó kiindulást ad. A duplákat rakjuk le a konstrukcióban szereplő helyükre, és írjuk be az $(1,5), (2,4), (3,6)$, dominókat az egyértelműen meghatározott helyükre. Emellett legyen $(x,3)$ a $(3,3)$ ismeretlen szomszédja, $(y,2)$ a $(2,2)$ ismeretlen szomszédja, $(z,1)$ pedig az $(1,1)$ ismeretlen szomszédja. Ekkor némi gondolkodás után a következő ábrát kapjuk:



Vegyük észre, hogy x csak 2 lehet, hiszen a változók csak az $\{1,2,3\}$ halmaz elemei lehetnek, és $x=3$ vagy $x=1$ esetén valamelyik dominó kétszer szerepelne, így $x=2$. Hasonlóan $y=1$ és $z=3$, ezzel pedig meg is kaptuk a teljes lerakást.

D7. Legyen k egy O középpontú kör és P egy pont k-n kívül. Legyenek a P-ből k-hoz húzott érintők e és f, ezek érintési pontjai rendre E és F. Legyen A egy pont a PE szakasz belsejében. Az A-ból k-hoz húzott érintők legyenek e és g. Jelölje B az f és g egyenesek metszéspontját. Tegyük fel, hogy az EPF szög hegyesszög, továbbá $PBA\sphericalangle = APB\sphericalangle$. Bizonyítsátok be, hogy a PB és AF szakaszok felezőpontjait összekötő egyenes átmegy O-n!

Megoldás: Jelölje M a PB szakasz felezőpontját. Mivel a feladat feltétele szerint az ABP háromszög egyenlőszárú, ebben a háromszögben az AM súlyvonal egyben magasságvonal és belső szögfelező is. A PF egyenes érinti a k kört, így $OF \perp PF$. Sőt, $OF \perp MF$, mert M rajta van a PF egyenesen. Még azt is vegyük észre, hogy az AO egyenes felezi az $EAB\sphericalangle$-et, mivel az AE, AB egyenesek érintik a k kört. Tehát az AO egyenes a $BAP\sphericalangle$ külső szögfelezője, amiről tudjuk, hogy merőleges az AM belső szögfelezőre. Az eddigiek alapján az $AMFO$ négyszögben az A, M, F csúcsoknál mind derékszögek vannak, azaz $AMFO$ téglalap. Mivel a téglalap átlói felezik egymást, így az AF szakasz felezőpontja egybeesik az OM szakasz felezőpontjával. Innen az állítás adódik.