XVIII. Dürer Verseny

Helyi forduló (2024. 11. 22.)

Feladatsor

E kategória

---

1. Egy kriminalisztikai laborban rendelkezésünkre áll egy kétkarú mérleg, valamint nyolc, a tömegükkel címkézett mérősúly, melyek tömege $1, 2, \ldots, 8$ kg. Egy nyomozás során találtak egy aranytömböt, amely tömege megegyezik az egyik mérősúlyéval. Egy mérés során a kétkarú mérleg segítségével az aranytömböt összehasonlíthatjuk az egyik mérősúllyal. Egy ilyen mérés költsége a használt mérősúly tömegével egyenlő Dürer dollár. Legkevesebb hány Dürer dollárból határozható meg biztosan az aranytömb tömege? Adjatok meg olyan méréseket, melyekkel ennyi Dürer dollárból meghatározható, és indokoljátok is, hogy kevesebből miért nem lehet!
Például ha az aranytömböt a 2 kg-os súllyal hasonlítjuk össze, akkor ennek a mérésnek a költsége 2 *Dürer dollár. A mérések függhetnek a korábbi mérések eredményeitől.*

2. Legyen k egy O középpontú kör és P egy pont k-n kívül. Legyenek a P-ből k-hoz húzott érintők e és f, ezek érintési pontjai rendre E és F. Legyen A egy pont a PE szakasz belsejében. Az A-ból k-hoz húzott érintők legyenek e és g. Jelölje B az f és g egyenesek metszéspontját. Tegyük fel, hogy az EPF szög hegyesszög, továbbá $PBA\sphericalangle = APB\sphericalangle$. Bizonyítsátok be, hogy a PB és AF szakaszok felezőpontjait összekötő egyenes átmegy O-n!

3. Az $a_1, a_2, \ldots$ és $b_1, b_2, \ldots$ pozitív egészekből álló végtelen sorozatokra teljesülnek az alábbi feltételek minden $i \geq 1$ esetén:

- ha $\operatorname{lnko}(a_i, b_i) > 1$, akkor $a_{i+1} = \dfrac{a_i}{\operatorname{lnko}(a_i, b_i)}$ és $b_{i+1} = \dfrac{b_i}{\operatorname{lnko}(a_i, b_i)}$,
- ha pedig $\operatorname{lnko}(a_i, b_i) = 1$, akkor $a_{i+1} = a_i + 1$ és $b_{i+1} = b_i + 2$.

Határozzátok meg az összes olyan (a_1, b_1) számpárt, melyre az $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots$ számpárokból álló végtelen sorozatban lesz olyan számpár, mely végtelen sokszor szerepel!
Az lnko(p, q) a p és q számok legnagyobb közös osztóját jelöli.

4. Adott egy n pozitív egész és egy $c > 1$ valós szám. A föld alatti Albrecht Bankot az imént kirabolták, az n rabló éppen most menekül el a helyszínről. A rablás előtt minden bűnöző elrejtett egy-egy robogót a felszínen különböző pontokban. A bankrablók épp most értek fel a felszínre, különböző kijáratokon keresztül. Azt figyelhetjük meg, hogy ha a bűnözők helyzeteit c-szeresére nagyítanánk a bank felszíni főbejáratából, akkor mindannyian éppen a saját robogójuknál lennének.

A bankrablók el szeretnének menekülni a robogókkal (nem feltétlenül a sajátjukkal), de mindegyik robogóra csak egy ember fér fel. A rendőrség úton van, ezért mindenkinek a legrövidebb úton kell elfutnia egy robogóhoz. Bizonyítsátok be, hogy a rablók összesen nem tehetnek meg kevesebb távolságot a robogókhoz futva, mint ha mindenki a saját robogóját választaná!
A bank főbejáratát, a rablókat és a robogókat pontszerűnek tekintjük, a terep teljesen sík.

5. Egy pozitív egészekből álló (a, b) számpárt nevezzünk *kriminálisnak*, ha 10-es számrendszerben ugyanannyi jegyből állnak, továbbá négyzeteik különbségét megkaphatjuk úgy, hogy a két számot egymás után írjuk valamilyen sorrendben.
a) Határozzátok meg az összes olyan kriminális (a, b) számpárt, melyre a osztója b-nek!
b) Létezik-e relatív prímekből álló kriminális számpár?
Két szám relatív prím, ha a legnagyobb közös osztójuk 1.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája és a feladat száma.
Minden helyes és megfelelően indokolt feladatmegoldás 12 pontot ér. Összesen 60 pont szerezhető.
A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánunk!

A XVIII. Dürer Verseny szervezői