XVIII. Dürer Verseny

Helyi forduló (2024. 11. 22.)

Megoldókulcs

E kategória

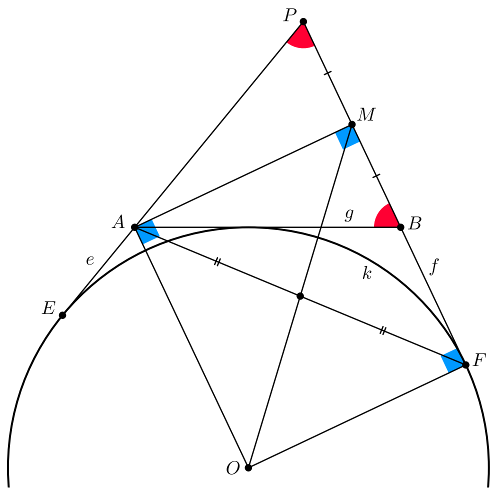
E1. Egy kriminalisztikai laborban rendelkezésünkre áll egy kétkarú mérleg, valamint nyolc, a tömegükkel címkézett mérősúly, melyek tömege $1, 2, \ldots, 8$ kg. Egy nyomozás során találtak egy aranytömböt, amely tömege megegyezik az egyik mérősúlyéval. Egy mérés során a kétkarú mérleg segítségével az aranytömböt összehasonlíthatjuk az egyik mérősúllyal. Egy ilyen mérés költsége a használt mérősúly tömegével egyenlő Dürer dollár. Legkevesebb hány Dürer dollárból határozható meg biztosan az aranytömb tömege? Adjatok meg olyan méréseket, melyekkel ennyi Dürer dollárból meghatározható, és indokoljátok is, hogy kevesebből miért nem lehet!
Például ha az aranytömböt a 2 kg-os súllyal hasonlítjuk össze, akkor ennek a mérésnek a költsége 2 Dürer dollár. A mérések függhetnek a korábbi mérések eredményeitől.

Megoldás: Legyen az első mérésünk az, hogy az 5 kg-os merősúllyal hasonlítjuk össze az aranytömb tömegét. Ha ennél nagyobb az arany tömege, akkor a 7 kg-os súllyal össszehasonlítva megállapíthatjuk az értékét. Ha kisebb mint 5 kg, akkor a 3 kg-os, majd az 1 kg-os súllyal való összehasonlítással tudjuk meghatározni. Ez összességében legfeljebb 12 dollárba kerül.

Belátjuk, hogy ennél olcsóbban nem lehet. Ha az első mérés során a 6 kg-ossal hasonlítjuk össze az aranytömböt, és az jön ki, hogy a tömb a nehezebb, akkor még össze kell hasonlítani vagy a 7 kg-ossal vagy a 8 kg-ossal, hogy meg tudjuk mondani a tömegét, de ez már legalább 13-ba kerül. Ha legalább 7 kg-os súllyal kezdünk, és azt kapjuk válasznak, hogy könnyebb az arany, akkor ha 5 vagy 6 kg-os az arany, ahhoz hogy el tudjuk dönteni melyik, az egyikkel össze kell hasonlítani, ami miatt ebben az esetben is kell legalább 12 dollár. Ha pedig az első mérés során a 4 kg-ossal vagy könnyebb súllyal hasonlítanánk össze, akkor ahhoz, hogy meg tudjuk különböztetni egymástól azt a két esetet, hogy az arany 5 kg-os vagy 6 kg-os, illetve azt a kettőt, hogy 7 kg-os vagy 8 kg-os, össze kell hasonltani a súlyt a számpárok egyikével, ezért legalább két mérés kell, melyek összesen legalább $5 + 7$-be kerülnek, így összesen legalább $1 + 5 + 7 = 13$-ba. Ezzel kész vagyunk a bizonyítással.

E2. Legyen k egy O középpontú kör és P egy pont k-n kívül. Legyenek a P-ből k-hoz húzott érintők e és f, ezek érintési pontjai rendre E és F. Legyen A egy pont a PE szakasz belsejében. Az A-ból k-hoz húzott érintők legyenek e és g. Jelölje B az f és g egyenesek metszéspontját. Tegyük fel, hogy az EPF szög hegyesszög, továbbá $PBA\sphericalangle = APB\sphericalangle$. Bizonyítsátok be, hogy a PB és AF szakaszok felezőpontjait összekötő egyenes átmegy O-n!

Megoldás: Jelölje M a PB szakasz felezőpontját. Mivel a feladat feltétele szerint az ABP háromszög egyenlőszárú, ebben a háromszögben az AM súlyvonal egyben magasságvonal és belső szögfelező is. A PF egyenes érinti a k kört, így $OF \perp PF$. Sőt, $OF \perp MF$, mert M rajta van a PF egyenesen. Még azt is vegyük észre, hogy az AO egyenes felezi az $EAB\sphericalangle$-et, mivel az AE, AB egyenesek érintik a k kört. Tehát az AO egyenes a $BAP\sphericalangle$ külső szögfelezője, amiről tudjuk, hogy merőleges az AM belső szögfelezőre. Az eddigiek alapján az $AMFO$ négyszögben az A, M, F csúcsoknál mind derékszögek vannak, azaz $AMFO$ téglalap. Mivel a téglalap átlói felezik egymást, így az AF szakasz felezőpontja egybeesik az OM szakasz felezőpontjával. Innen az állítás adódik.



E3. Az $a_1, a_2, \ldots$ és $b_1, b_2, \ldots$ pozitív egészekből álló végtelen sorozatokra teljesülnek az alábbi feltételek minden $i \geq 1$ esetén:

- ha $\text{lnko}(a_i, b_i) > 1$, akkor $a_{i+1} = \dfrac{a_i}{\text{lnko}(a_i, b_i)}$ és $b_{i+1} = \dfrac{b_i}{\text{lnko}(a_i, b_i)}$,
- ha pedig $\text{lnko}(a_i, b_i) = 1$, akkor $a_{i+1} = a_i + 1$ és $b_{i+1} = b_i + 2$.

Határozzátok meg az összes olyan (a_1, b_1) számpárt, melyre az $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots$ számpárokból álló végtelen sorozatban lesz olyan számpár, mely végtelen sokszor szerepel!

Az lnko(p, q) a p és q számok legnagyobb közös osztóját jelöli.

Megoldás: Legyen $b_1 = 2a_1 + c_1$ alakú, ahol c_1 egy egész szám. Továbbá minden i-re hasonlóan írjuk fel a b_i sorozat elemeit $b_i = 2a_i + c_i$ alakban. Ha valamilyen j-re a_j és b_j relatív prímek, akkor a szabályok szerint $a_{j+1} = a_j + 1$ és $b_{j+1} = b_j + 2$. Ha $b_j = 2a_j + c_j$, akkor $b_{j+1} = b_j + 2 = 2a_j + c_j + 2 = 2(a_j + 1) + c_j = 2a_{j+1} + c_j$. Így ezen lépések alkalmával $c_{j+1} = c_j$. Ha pedig valamilyen k-ra $\text{lnko}(a_k, b_k) > 1$, akkor a sorozatok következő tagjait a legnagyobb közös osztójukkal való leosztással kapjuk. Ekkor $b_k = 2a_k + c_k$ esetén $a_{k+1} = \frac{a_k}{\text{lnko}(a_k, b_k)}$ és $b_{k+1} = \frac{b_k}{\text{lnko}(a_k, b_k)}$, így $b_{k+1} = \frac{2a_k + c_k}{\text{lnko}(a_k, b_k)} = 2a_{k+1} + \frac{c_k}{\text{lnko}(a_k, b_k)}$, azaz $c_{k+1} = \frac{c_k}{\text{lnko}(a_k, b_k)}$. Mivel $\text{lnko}(a_k, b_k) > 1$, ezért ezen lépés után $0 < |c_{k+1}| < |c_k|$ (kivéve ha $c_k = 0$, mert akkor $c_{k+1} = 0$), de tudjuk, hogy c_{k+1} továbbra is egész, mivel b_{k+1} és $2a_{k+1}$ is az.

Ha c_1 nem nulla, akkor csak véges sokszor tudjuk leosztani 1-nél nagyobb egész értékekkel, különben egy idő után már nem lenne egész a c_i sorozat értéke. Ekkor lesz egy utolsó leosztás, azaz egy utolsó lépés, ami előtt $\text{lnko}(a_i, b_i) > 1$ teljesült. Ezután már mindig $\text{lnko}(a_i, b_i) = 1$, azaz innentől az $a_{i+1} = a_i + 1$ és $b_{i+1} = b_i + 2$ szabályok szerint folytatódnak a sorozatok. Ekkor nem lehet olyan számpár, ami végtelen sokszor szerepel, mivel véges hosszú rész után szigorúan monoton nőni fog mindkét sorozat. Ha pedig $c_1 = 0$, akkor $b_1 = 2a_1$, azaz vagy $a_1 = 1$ és $b_1 = 2$, vagy $a_2 = 1$ és $b_2 = 2$. Innentől az $(1, 2)$ és $(2, 4)$ számpárok ciklikusan fogják egymást követni, azaz végtelen sokszor szerepelnek majd a sorozatban. Tehát akkor és csak akkor lesz olyan számpár, amely végtelen sokszor szerepel, ha $b_1 = 2a_1$.

2. Megoldás: Vegyünk fel egy koordinátarendszert és ennek x tengelye jelölje az a_i sorozat értékeit, míg az y tengely a b_i sorozat értékeit. Jelöljük be a koordinátarendszerben minden i egészre a (a_i, b_i) pontot. Mivel a sorozatok elemei pozitív egészek, ezért minden bejelölt pont az első síknegyedbe esik. Vizsgáljuk a bejelölt pontok távolságát az $y = 2x$ egyenestől. Ha valamilyen k-ra $\text{lnko}(a_k, b_k) > 1$, akkor az origó és az (a_k, b_k) pont szakaszán van még rácspont, így a következő lépésben az ilyen rácspontok közül az origóhoz legközelebbit fogjuk kapni, hiszen ekkor $(a_{k+1}, b_{k+1}) = \left(\frac{a_k}{\text{lnko}(a_k, b_k)}, \frac{b_k}{\text{lnko}(a_k, b_k)}\right)$. Ha az (a_k, b_k) pont az $y = 2x$ egyenesre esett, akkor (a_{k+1}, b_{k+1}) is, ha viszont nem, akkor ez se fog ráesni az $y = 2x$ egyenesre, viszont szigorúan közelebb kerültünk ehhez (a távolság legalább feleződött). Ha pedig valamilyen j-re $\text{lnko}(a_j, b_j) = 1$, akkor $(a_{j+1}, b_{j+1}) = (a_j + 1, b_j + 2)$, így a következő pontot (a_j, b_j)-ből az $(1, 2)$ vektorral lépve kapjuk meg. Ez a vektor párhuzamos az $y = 2x$ egyenessel, így e során a távolság az egyenestől nem változik (ha eddig 0 volt, most is az marad).

Így ha az első pont nem az $y = 2x$ egyenesre esik, akkor nem is kerülhetünk erre rá. Mivel az $y = 2x$ egyenes racionális meredekségű, így létezik hozzá legközelebb eső rácspont. Így a távolságunk az egyenestől csak véges sokszor csökkenhetett (hiszen minden csökkenés során legalább feleződött ez), azaz egy idő után már csak ezzel az egyenessel párhuzamosan lépkedhetünk. Ebben az esetben tehát nem lesz olyan pont a síknegyedben, amelyet végtelen sokszor érintünk. Ha viszont az első pont ráesik az $y = 2x$ egyenesre, akkor az előző megoldáshoz hasonlóan a második számpártól az $(1, 2)$ és a $(2, 4)$ fog felváltva ismétlődni, azaz lesz olyan számpár a sorozatban, ami végtelen sokszor szerepel. Ismét beláttuk, hogy akkor és csak akkor lesz olyan számpár, amely végtelen sokszor szerepel, ha $b_1 = 2a_1$.

Megjegyzés: 1 és 2 helyett tetszőleges c, d egészekkel is igaz marad az állítás, azaz akkor és csak akkor lesz végtelenszer előforduló számpár, ha $b_1 = \frac{d}{c}a_1$.

E4. Adott egy n pozitív egész és egy $c > 1$ valós szám. A föld alatti Albrecht Bankot az imént kirabolták, az n rabló éppen most menekül el a helyszínről. A rablás előtt minden bűnöző elrejtett egy-egy robogót a felszínen különböző pontokban. A bankrablók épp most értek fel a felszínre, különböző kijáratokon keresztül. Azt figyelhetjük meg, hogy ha a bűnözők helyzeteit c-szeresére nagyítanánk a bank felszíni főbejáratából, akkor mindannyian éppen a saját robogójuknál lennének.

A bankrablók el szeretnének menekülni a robogókkal (nem feltétlenül a sajátjukkal), de mindegyik robogóra csak egy ember fér fel. A rendőrség úton van, ezért mindenkinek a legrövidebb úton kell elfutnia egy robogóhoz. Bizonyítsátok be, hogy a rablók összesen nem tehetnek meg kevesebb távolságot a robogókhoz futva, mint ha mindenki a saját robogóját választaná!

A bank főbejáratát, a rablókat és a robogókat pontszerűnek tekintjük, a terep teljesen sík.

Megoldás:

A megoldás során $d(X, Y)$ jelöli az X és Y pontok távolságát a síkon. Először fogalmazzuk át a feladatot a matematika nyelvére. Adott n pont a síkon, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, és legyen az A'_i az a pont $1 \leq i \leq n$ esetén, amit úgy kapunk, hogy A_i-t az origóból c-szeresére nagyítjuk. Azt kell belátni, hogy ha valahogyan párosítjuk az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontokat az $A'_1, A'_2, \ldots A'_n$ pontokkal, és nézzük a párba állított pontok távolságainak az összegét, akkor ez minimális, ha minden i-re A_i párja A'_i.

Gondoljuk meg először azt az esetet, amikor minden A_i pont rajta van egy O-ból induló ℓ félegyenesen. Állítsuk valahogy párba a pontokat, legyen A_i az egyik pont, aminek a párja A'_j. Ekkor a háromszögegyenlőtlenség szerint $d(O, A'_j) \leq d(O, A_i) + d(A_i, A'_j)$, amit átrendezve $d(A_i, A'_j) \geq d(O, A'_j) - d(O, A_i)$. Ezeket az összes párra összeadva azt kapjuk, hogy a keresett mennyiség, azaz a párokban a távolságok összege, legalább

$$\sum_{i=1}^{n} d(O, A'_i) - \sum_{i=1}^{n} d(O, A_i).$$

Azonban figyeljük meg, hogy ha minden A_i-t a hozzá tartozó A'_i-vel állítjuk párba, akkor éppen ennyi lesz a távolságok összege, így tényleg ebben az esetben lesz minimális az összeg.

Most térjünk rá az általános esetre, amikor a pontok nem biztos, hogy egy félegyenesen vannak, és valahogy párba vannak álltítva az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontok az $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ pontokkal. Az ötlet az, hogy vezessük vissza az állítást arra az esetre, amikor a pontok egy félegyenesre esnek. Legyenek $B_1, B_2, \ldots, B_n$ olyan pontok, amik mind az O-ból induló ℓ félegyenesre esnek, és $d(O, B_i) = d(O, A_i)$ minden i-re. Legyenek továbbá a $B'_1, B'_2, \ldots, B'_n$ pontok rendre a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ pontok c-szeresére nagyítottjai az O-ból. Azt fogjuk megmutatni, hogy ha az A_i pont párja A'_j, akkor $d(B_i, B'_j) \leq d(A_i, A'_j)$. Ez intuitívan azért van, mert az $OB_iB'_j$ elfajuló háromszög, és az $OA_iA'_j$ háromszög két oldalának hossza megegyezik, így a harmadik az elfajuló esetben lesz a legkisebb. Precízen

$$d(B_i, B'_j) = |d(O, B_i) - d(O, B'_j)| = |d(O, A_i) - d(O, A'_j)| \leq d(A_i, A'_j),$$

ahol az első egyenlőség amiatt van, mert O, B_i, B'_j egy egyenesre esnek, míg az utolsó az $OA_iA'_j$ háromszögben felírt háromszög-egyenlőtlenség következménye.

Azt bizonyítottuk tehát, hogy ha az A_i pontok helyett a B_i pontokat nézzük, és ugyanazt a párbaállítást, akkor a B_i pontokhoz tartozó párokban a távolságok összege legfeljebb akkora lesz, mint az A_i pontoknál vett párok távolságainak összege. Az utolsó kulcs észrevétel pedig az, hogy ha minden i-re A_i és A'_i egymás párja, akkor itt egyenlőség áll fenn, azaz

$$\sum_{i=1}^{n} d(B_i, B'_i) = \sum_{i=1}^{n} d(A_i, A'_i).$$

Ezt összerakva azzal, hogy a félegyenesen már megoldottuk a feladatot, azt kapjuk, hogy tetszőleges párosítás esetén az A_i és a párjaik távolságainak az összege legfeljebb akkora, mint az ugyanahhoz a párosításhoz tartozó B_i és párjaik összege. Ezt viszont alulról becsüli $\sum_{i=1}^{n} d(B_i, B_i')$, ami pedig egyenlő a $\sum_{i=1}^{n} d(A_i, A_i')$ összeggel, és ez éppen az a távoságösszeg, amikor minden A_i az A_i'-vel van párosítva. Ezzel beláttuk a feladat állítását.

E5. Egy pozitív egészekből álló (a, b) számpárt nevezzünk *kriminálisnak*, ha 10-es számrendszerben ugyanannyi jegyből állnak, továbbá négyzeteik különbségét megkaphatjuk úgy, hogy a két számot egymás után írjuk valamilyen sorrendben.
a) Határozzátok meg az összes olyan kriminális (a, b) számpárt, melyre a osztója b-nek!
b) Létezik-e relatív prímekből álló kriminális számpár?
Két szám relatív prím, ha a legnagyobb közös osztójuk 1.

Megoldás:

a) Legyen a és b jegyeinek száma k. Ekkor $k \geq 1$ és $10^{k-1} \leq a, b \leq 10^k$. Ha a mögé leírjuk b-t akkor $10^k \cdot a + b$-t kapunk, ha b mögé a-t, akkot pedig $10^k \cdot b + a$-t.

Vegyük észre, hogy $b^2 - a^2 < b^2 < 10^k \cdot b < 10^k \cdot b + a$, tehát az nem lehetséges, hogy $b^2 - a^2 = 10^k \cdot b + a$. (akkor sem, ha elhagyjuk azt a feltételt, hogy $a|b$).

Tehát csak azt az esetet kell vizsgálnunk, ha $b^2 - a^2 = 10^k \cdot a + b$. Mivel $a|b$, ezért valamilyen természetes ℓ-re $\ell \cdot a = b$. Mivel a-nak és b-nek ugyanannyi jegye van (és mindkettő pozitív), így $1 \leq \ell \leq 9$. Írjunk a korábbi képletben b helyére $\ell \cdot a$-t:

$$(\ell a)^2 - a^2 = a \cdot (10^k + \ell)$$

Ezt átrendezve:

$$a^2 \cdot (\ell^2 - 1) = a \cdot (10^k + \ell)$$

Vagyis

$$a \cdot (\ell^2 - 1) = 10^k + \ell$$

Vizsgáljuk meg ezt az egyenlőséget:

- Ha ℓ páratlan, akkor a bal oldal páros (mivel $\ell^2 - 1$-gyel szorzunk), a jobb oldal pedig páratlan (mivel egy páratlan és egy páros szám összege), ami ellentmondás. A további esetekben fel fogjuk tenni, hogy ℓ páros (azaz $2, 4, 6$, vagy 8).
- Ha $\ell = 2$, akkor $a = \frac{10^k+2}{2^2-1} = 333...334$ és $b = 2a = 666...668$ (ahol a számokban $k-1$ db 3-as, illetve 6-os jegy van). Az ilyen alakú (a, b) számpárok eleget tesznek a feladat feltételeinek.
- Ha $\ell > 2$ és $k > 1$, akkor a bal oldal legalább $15a$ (hiszen $4^2 - 1 = 15$), ami $a \geq 10^{k-1}$ miatt legalább $15 \cdot 10^{k-1} = 10^k + 5 \cdot 10^{k-1}$. A jobb oldal ($\ell \leq 9$ miatt) legfeljebb $10^k + 9$. Továbbá $k > 1$ miatt $10^k + 5 \cdot 10^{k-1} \geq 10^k + 5 \cdot 10^1 > 10^k + 9 \geq 10^k + \ell$, ami ellentmond a két oldal egyenlőségének.
- Ha $\ell > 4$ és $k = 1$, akkor a jobb oldal kisebb 20-nál, a bal viszont legalább $6^2 - 1 = 35$, ami ellentmond a két oldal egyenlőségének.
- $\ell = 4$ és $k = 1$ esetén pedig se az $(a, b) = (1, 4)$, se pedig az $(a, b) = (2, 8)$ nem lesz testvér számpár.

Tehát az összes ilyen testvér számpár: $a = 333...334$, $b = 666...668$, ahol a és b ugyanannyi jegyűek.

b) Tegyük fel, hogy a és b relatív prím testvérek. Megint eljutunk a $b^2 - a^2 = 10^k \cdot a + b$ egyenlőségig, ami átrendezve: $b(b-1) = a(10^k + a)$. Mivel a és b relatív prímek, $a \mid b - 1$, legyen $b = a \cdot \ell + 1$. Mivel a és b és k jegyűek, $1 \leq \ell \leq 9$. Ekkor az egyenletbe $b = a \cdot \ell + 1$-et helyettesítve és az **a)** részhez hasonlóan átrendezve:

$$a \cdot (\ell^2 - 1) = 10^k - \ell$$

- Páratlan ℓ esetén az **a)** részhez hasonlóan nincs megoldás, mivel a két oldal paritása különböző.

- Most, az **a)** résszel ellentétben, $\ell = 2$ esetén sincs megoldás, mivel $3 \nmid 10^k - 2$.
- $\ell > 3$ esetén pedig a bal oldal, szintén az **a)** részhez hasonlóan, legalább $15a$, ami $a \geq 10^{k-1}$ miatt legalább $15 \cdot 10^{k-1} > 10^k > 10^k - \ell$, ami ellenmond a két oldal egyenlőségének.

Tehát nem létezik relatív prímekből álló testvér számpár.