XVIII. Dürer Verseny

Helyi forduló (2024. 11. 22.)

Feladatsor

E+ kategória

---

1. Az $a_1, a_2, \dots$ és $b_1, b_2, \dots$ pozitív egészekből álló végtelen sorozatokra teljesülnek az alábbi feltételek minden $i \geq 1$ esetén:

- ha $\operatorname{lnko}(a_i, b_i) > 1$, akkor $a_{i+1} = \dfrac{a_i}{\operatorname{lnko}(a_i, b_i)}$ és $b_{i+1} = \dfrac{b_i}{\operatorname{lnko}(a_i, b_i)}$,
- ha pedig $\operatorname{lnko}(a_i, b_i) = 1$, akkor $a_{i+1} = a_i + 1$ és $b_{i+1} = b_i + 2$.

Határozzátok meg az összes olyan (a_1, b_1) számpárt, melyre az $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots$ számpárokból álló végtelen sorozatban lesz olyan számpár, mely végtelen sokszor szerepel!
Az lnko(p, q) a p és q számok legnagyobb közös osztóját jelöli.

2. Adott egy n pozitív egész és egy $c > 1$ valós szám. A föld alatti Albrecht Bankot az imént kirabolták, az n rabló éppen most menekül el a helyszínről. A rablás előtt minden bűnöző elrejtett egy-egy robogót a felszínen különböző pontokban. A bankrablók épp most értek fel a felszínre, különböző kijáratokon keresztül. Azt figyelhetjük meg, hogy ha a bűnözők helyzeteit c-szeresére nagyítanánk a bank felszíni főbejáratából, akkor mindannyian éppen a saját robogójuknál lennének.

A bankrablók el szeretnének menekülni a robogókkal (nem feltétlenül a sajátjukkal), de mindegyik robogóra csak egy ember fér fel. A rendőrség úton van, ezért mindenkinek a legrövidebb úton kell elfutnia egy robogóhoz. Bizonyítsátok be, hogy a rablók összesen nem tehetnek meg kevesebb távolságot a robogókhoz futva, mint ha mindenki a saját robogóját választaná!
A bank főbejáratát, a rablókat és a robogókat pontszerűnek tekintjük, a terep teljesen sík.

3. Jelölje $\mathbb{P}$ a valós együtthatós egyváltozós polinomok halmazát, ahol minden polinom változója x. Határozzátok meg az összes olyan $F\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ függvényt, melyre tetszőleges $p, q \in \mathbb{P}$ polinomok esetén

$$F(p+q) = F(p) + F(q) \qquad \text{és} \qquad F(p(q)) = (F(p))(q) \cdot F(q).$$

Itt $p(q)$ azt a polinomot jelöli, melyet úgy kapunk, hogy a p polinom változójába behelyettesítjük a q polinomot. Hasonlóan, $(F(p))(q)$ azt a polinomot jelöli, melyet úgy kapunk, hogy az $F(p)$ polinom változójába behelyettesítjük a q polinomot.

4. Adottak az n és k pozitív egész számok, melyekre $n \geq k$. Egy $n \times n$-es táblázat minden mezőjébe írtunk egy egész számot úgy, hogy minden sorba és oszlopba legfeljebb k különböző szám került. Legfeljebb hány különböző szám szerepelhet a táblázatban?
A választ n és k függvényében adjátok meg!

5. A síkot hézagmentesen lefedtük egybevágó sokszögekkel úgy, hogy ha két sokszögnek van közös pontja, akkor az mindkettőnek a kerületén van. A fedésben minden sokszög belsejét fehérre, kerületét feketére színeztük. A sík kapott színezését jelöljük $\mathcal{S}$-sel, a fedésében használt sokszöget jelöljük $\mathcal{P}$-vel.

A síknak egy egybevágósági transzformációját nevezzük *kriminálisnak*, ha nem változtat $\mathcal{S}$-en, azaz a sík színezésén. Tudjuk, hogy léteznek olyan $0^\circ < \alpha, \beta, \gamma < 360^\circ$ szögek és különböző X, Y, Z pontok, melyekre az XYZ háromszögnek van 30°-os belső szöge, továbbá az X középpontú α szögű, az Y középpontú β szögű és a Z középpontú γ szögű forgatások mind kriminálisak.
a) Lehetséges-e, hogy $\mathcal{S}$-nek és $\mathcal{P}$-nek sincs sem tengelyes, sem középpontos szimmetriája?
b) Az összes lehetséges $\mathcal{S}$ színezést figyelembe véve határozzátok meg $\alpha + \beta + \gamma$ lehetséges értékeit!
c) Mutassatok példát olyan $\mathcal{S}$-re, melyre létezik kriminális csúsztatva tükrözés, de nem létezik kriminális tengelyes tükrözés! Bizonyítsátok be, hogy minden ilyen példa esetén $\alpha = \beta = \gamma$ teljesül!
A csúsztatva tükrözés egy tengelyes tükrözés és egy eltolás egymásutánja, melyben az eltolási vektor és a tükrözési tengely párhuzamosak. A forgatások definíció szerint óramutató járásával ellentétes irányúak.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája és a feladat száma.
Minden helyes és megfelelően indokolt feladatmegoldás 12 pontot ér. Összesen 60 pont szerezhető.
A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánunk!

A XVIII. Dürer Verseny szervezői