XVIII.

Dürer Verseny

Helyi forduló (2024. 11. 22.)

Megoldókulcs

E+ kategória

E+1. Az $a_1, a_2, \dots$ és $b_1, b_2, \dots$ pozitív egészekből álló végtelen sorozatokra teljesülnek az alábbi feltételek minden $i \geq 1$ esetén:

- ha $\text{lnko}(a_i, b_i) > 1$, akkor $a_{i+1} = \dfrac{a_i}{\text{lnko}(a_i, b_i)}$ és $b_{i+1} = \dfrac{b_i}{\text{lnko}(a_i, b_i)}$,
- ha pedig $\text{lnko}(a_i, b_i) = 1$, akkor $a_{i+1} = a_i + 1$ és $b_{i+1} = b_i + 2$.

Határozzátok meg az összes olyan (a_1, b_1) számpárt, melyre az $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots$ számpárokból álló végtelen sorozatban lesz olyan számpár, mely végtelen sokszor szerepel!

Az $\text{lnko}(p, q)$ a p és q számok legnagyobb közös osztóját jelöli.

Megoldás: Legyen $b_1 = 2a_1 + c_1$ alakú, ahol c_1 egy egész szám. Továbbá minden i-re hasonlóan írjuk fel a b_i sorozat elemeit $b_i = 2a_i + c_i$ alakban. Ha valamilyen j-re a_j és b_j relatív prímek, akkor a szabályok szerint $a_{j+1} = a_j + 1$ és $b_{j+1} = b_j + 2$. Ha $b_j = 2a_j + c_j$, akkor $b_{j+1} = b_j + 2 = 2a_j + c_j + 2 = 2(a_j + 1) + c_j = 2a_{j+1} + c_j$. Így ezen lépések alkalmával $c_{j+1} = c_j$. Ha pedig valamilyen k-ra $\text{lnko}(a_k, b_k) > 1$, akkor a sorozatok következő tagjait a legnagyobb közös osztójukkal való leosztással kapjuk. Ekkor $b_k = 2a_k + c_k$ esetén $a_{k+1} = \frac{a_k}{\text{lnko}(a_k,b_k)}$ és $b_{k+1} = \frac{b_k}{\text{lnko}(a_k,b_k)}$, így $b_{k+1} = \frac{2a_k+c_k}{\text{lnko}(a_k,b_k)} = 2a_{k+1} + \frac{c_k}{\text{lnko}(a_k,b_k)}$, azaz $c_{k+1} = \frac{c_k}{\text{lnko}(a_k,b_k)}$. Mivel $\text{lnko}(a_k, b_k) > 1$, ezért ezen lépés után $0 < |c_{k+1}| < |c_k|$ (kivéve ha $c_k = 0$, mert akkor $c_{k+1} = 0$), de tudjuk, hogy c_{k+1} továbbra is egész, mivel b_{k+1} és $2a_{k+1}$ is az.

Ha c_1 nem nulla, akkor csak véges sokszor tudjuk leosztani 1-nél nagyobb egész értékekkel, különben egy idő után már nem lenne egész a c_i sorozat értéke. Ekkor lesz egy utolsó leosztás, azaz egy utolsó lépés, ami előtt $\text{lnko}(a_i, b_i) > 1$ teljesült. Ezután már mindig $\text{lnko}(a_i, b_i) = 1$, azaz innentől az $a_{i+1} = a_i + 1$ és $b_{i+1} = b_i + 2$ szabályok szerint folytatódnak a sorozatok. Ekkor nem lehet olyan számpár, ami végtelen sokszor szerepel, mivel véges hosszú rész után szigorúan monoton nőni fog mindkét sorozat. Ha pedig $c_1 = 0$, akkor $b_1 = 2a_1$, azaz vagy $a_1 = 1$ és $b_1 = 2$, vagy $a_2 = 1$ és $b_2 = 2$. Innentől az $(1, 2)$ és $(2, 4)$ számpárok ciklikusan fogják egymást követni, azaz végtelen sokszor szerepelnek majd a sorozatban. Tehát akkor és csak akkor lesz olyan számpár, amely végtelen sokszor szerepel, ha $b_1 = 2a_1$.

2. Megoldás: Vegyünk fel egy koordinátarendszert és ennek x tengelye jelölje az a_i sorozat értékeit, míg az y tengely a b_i sorozat értékeit. Jelöljük be a koordinátarendszerben minden i egészre a (a_i, b_i) pontot. Mivel a sorozatok elemei pozitív egészek, ezért minden bejelölt pont az első síknegyedbe esik. Vizsgáljuk a bejelölt pontok távolságát az $y = 2x$ egyenestől. Ha valamilyen k-ra $\text{lnko}(a_k, b_k) > 1$, akkor az origó és az (a_k, b_k) pont szakaszán van még rácspont, így a következő lépésben az ilyen rácspontok közül az origóhoz legközelebbit fogjuk kapni, hiszen ekkor $(a_{k+1}, b_{k+1}) = \left(\frac{a_k}{\text{lnko}(a_k,b_k)}, \frac{b_k}{\text{lnko}(a_k,b_k)}\right)$. Ha az (a_k, b_k) pont az $y = 2x$ egyenesre esett, akkor (a_{k+1}, b_{k+1}) is, ha viszont nem, akkor ez se fog ráesni az $y = 2x$ egyenesre, viszont szigorúan közelebb kerültünk ehhez (a távolság legalább feleződött). Ha pedig valamilyen j-re $\text{lnko}(a_j, b_j) = 1$, akkor $(a_{j+1}, b_{j+1}) = (a_j + 1, b_j + 2)$, így a következő pontot (a_j, b_j)-ből az $(1, 2)$ vektorral lépve kapjuk meg. Ez a vektor párhuzamos az $y = 2x$ egyenessel, így e során a távolság az egyenestől nem változik (ha eddig 0 volt, most is az marad).

Így ha az első pont nem az $y = 2x$ egyenesre esik, akkor nem is kerülhetünk erre rá. Mivel az $y = 2x$ egyenes racionális meredekségű, így létezik hozzá legközelebb eső rácspont. Így a távolságunk az egyenestől csak véges sokszor csökkenhetett (hiszen minden csökkenés során legalább feleződött ez), azaz egy idő után már csak ezzel az egyenessel párhuzamosan lépkedhetünk. Ebben az esetben tehát nem lesz olyan pont a síknegyedben, amelyet végtelen sokszor érintünk. Ha viszont az első pont ráesik az $y = 2x$ egyenesre, akkor az előző megoldáshoz hasonlóan a második számpártól az $(1, 2)$ és a $(2, 4)$ fog felváltva ismétlődni, azaz lesz olyan számpár a sorozatban, ami végtelen sokszor szerepel. Ismét beláttuk, hogy akkor és csak akkor lesz olyan számpár, amely végtelen sokszor szerepel, ha $b_1 = 2a_1$.

Megjegyzés: 1 és 2 helyett tetszőleges c, d egészekkel is igaz marad az állítás, azaz akkor és csak akkor lesz végtelenszer előforduló számpár, ha $b_1 = \frac{d}{c}a_1$.

E+2. Adott egy n pozitív egész és egy $c > 1$ valós szám. A föld alatti Albrecht Bankot az imént kirabolták, az n rabló éppen most menekül el a helyszínről. A rablás előtt minden bűnöző elrejtett egy-egy robogót a felszínen különböző pontokban. A bankrablók épp most értek fel a felszínre, különböző kijáratokon keresztül. Azt figyelhetjük meg, hogy ha a bűnözők helyzeteit c-szeresére nagyítanánk a bank felszíni főbejáratából, akkor mindannyian éppen a saját robogójuknál lennének.

A bankrablók el szeretnének menekülni a robogókkal (nem feltétlenül a sajátjukkal), de mindegyik robogóra csak egy ember fér fel. A rendőrség úton van, ezért mindenkinek a legrövidebb úton kell elfutnia egy robogóhoz. Bizonyítsátok be, hogy a rablók összesen nem tehetnek meg kevesebb távolságot a robogókhoz futva, mint ha mindenki a saját robogóját választaná!

A bank főbejáratát, a rablókat és a robogókat pontszerűnek tekintjük, a terep teljesen sík.

Megoldás:

A megoldás során $d(X,Y)$ jelöli az X és Y pontok távolságát a síkon. Először fogalmazzuk át a feladatot a matematika nyelvére. Adott n pont a síkon, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, és legyen az A_i' az a pont $1 \leq i \leq n$ esetén, amit úgy kapunk, hogy A_i-t az origóból c-szeresére nagyítjuk. Azt kell belátni, hogy ha valahogyan párosítjuk az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontokat az $A_1', A_2', \ldots A_n'$ pontokkal, és nézzük a párba állított pontok távolságainak az összegét, akkor ez minimális, ha minden i-re A_i párja A_i'.

Gondoljuk meg először azt az esetet, amikor minden A_i pont rajta van egy O-ból induló ℓ félegyenesen. Állítsuk valahogy párba a pontokat, legyen A_i az egyik pont, aminek a párja A_j'. Ekkor a háromszögegyenlőtlenség szerint $d(O, A_j') \leq d(O, A_i) + d(A_i, A_j')$, amit átrendezve $d(A_i, A_j') \geq d(O, A_j') - d(O, A_i)$. Ezeket az összes párra összeadva azt kapjuk, hogy a keresett mennyiség, azaz a párokban a távolságok összege, legalább

$$\sum_{i=1}^{n} d(O, A_i') - \sum_{i=1}^{n} d(O, A_i).$$

Azonban figyeljük meg, hogy ha minden A_i-t a hozzá tartozó A_i'-vel állítjuk párba, akkor éppen ennyi lesz a távolságok összege, így tényleg ebben az esetben lesz minimális az összeg.

Most térjünk rá az általános esetre, amikor a pontok nem biztos, hogy egy félegyenesen vannak, és valahogy párba vannak álltítva az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontok az $A_1', A_2', \ldots, A_n'$ pontokkal. Az ötlet az, hogy vezessük vissza az állítást arra az esetre, amikor a pontok egy félegyenesre esnek. Legyenek $B_1, B_2, \ldots, B_n$ olyan pontok, amik mind az O-ból induló ℓ félegyenesre esnek, és $d(O, B_i) = d(O, A_i)$ minden i-re. Legyenek továbbá a $B_1', B_2', \ldots, B_n'$ pontok rendre a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ pontok c-szeresére nagyítottjai az O-ból. Azt fogjuk megmutatni, hogy ha az A_i pont párja A_j', akkor $d(B_i, B_j') \leq d(A_i, A_j')$. Ez intuitívan azért van, mert az OB_iB_j' elfajuló háromszög, és az OA_iA_j' háromszög két oldalának hossza megegyezik, így a harmadik az elfajuló esetben lesz a legkisebb. Precízen

$$d(B_i, B_j') = |d(O, B_i) - d(O, B_j')| = |d(O, A_i) - d(O, A_j')| \leq d(A_i, A_j'),$$

ahol az első egyenlőség amiatt van, mert O, B_i, B_j' egy egyenesre esnek, míg az utolsó az OA_iA_j' háromszögben felírt háromszög-egyenlőtlenség következménye.

Azt bizonyítottuk tehát, hogy ha az A_i pontok helyett a B_i pontokat nézzük, és ugyanazt a párbaállítást, akkor a B_i pontokhoz tartozó párokban a távolságok összege legfeljebb akkora lesz, mint az A_i pontoknál vett párok távolságainak összege. Az utolsó kulcs észrevétel pedig az, hogy ha minden i-re A_i és A_i' egymás párja, akkor itt egyenlőség áll fenn, azaz

$$\sum_{i=1}^{n} d(B_i, B_i') = \sum_{i=1}^{n} d(A_i, A_i').$$

Ezt összerakva azzal, hogy a félegyenesen már megoldottuk a feladatot, azt kapjuk, hogy tetszőleges párosítás esetén az A_i és a párjaik távolságainak az összege legfeljebb akkora, mint az ugyanahhoz a párosításhoz tartozó B_i és párjaik összege. Ezt viszont alulról becsüli $\sum_{i=1}^{n} d(B_i, B_i')$, ami pedig egyenlő a $\sum_{i=1}^{n} d(A_i, A_i')$ összeggel, és ez éppen az a távoságösszeg, amikor minden A_i az A_i'-vel van párosítva. Ezzel beláttuk a feladat állítását.

E+3. Jelölje $\mathbb{P}$ a valós együtthatós egyváltozós polinomok halmazát, ahol minden polinom változója x. Határozzátok meg az összes olyan $F\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ függvényt, melyre tetszőleges $p, q \in \mathbb{P}$ polinomok esetén

$$F(p+q) = F(p) + F(q) \qquad \text{és} \qquad F(p(q)) = (F(p))(q) \cdot F(q).$$

Itt $p(q)$ azt a polinomot jelöli, melyet úgy kapunk, hogy a p polinom változójába behelyettesítjük a q polinomot. Hasonlóan, $(F(p))(q)$ azt a polinomot jelöli, melyet úgy kapunk, hogy az $F(p)$ polinom változójába behelyettesítjük a q polinomot.

Megoldás: Belátjuk, hogy csak az $F \equiv 0$ és az $F(p) = p'$ függvények teljesítik a feladat feltételeit, ahol p' a p polinom *deriváltját* jelöli. Azaz, ha $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, akkor $F(p) = p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$.

Jelöljük minden $p \in \mathbb{P}$ polinom fokát $\deg(p)$-vel. Jelölje $\mathbf{I}(p,q)$ az $F(p) + F(q) = F(p+q)$ feltételt, míg $\mathbf{II}(p,q)$ az $F(p(q)) = F(p)(q) \cdot F(q)$ feltételt.

Most legyen $p(x) \equiv c$, ahol $c \in \mathbb{R}$, és $\deg(q) > 1$. Tekintsük $\mathbf{II}(p,q)$-t. Ekkor $p(q(x)) = c$, vagyis $F(p) = F(p)(q) \cdot F(q)$. Belátjuk, hogy $F(p)$ konstans. Tegyük fel indirekt módon, hogy $\deg(F(p)) > 0$. Ekkor $\deg(F(p)(q)) > \deg(F(p))$, így $F(q) \equiv 0$, hiszen $\deg(F(p)) = \deg(F(p)(q) \cdot F(q)) = \deg(F(p)(q)) + \deg(F(q))$. Emiatt $F(p) = F(p)(q) \cdot 0 \equiv 0$, tehát $F(p)$ foka nem lehet pozitív, ami ellentmondás. Így $F(p) \equiv c^*$ valamely $c^* \in \mathbb{R}$-re. Legyen most q tetszőleges polinom, akár konstans is. Ekkor $\mathbf{II}(p,q)$ szerint $c^* = F(p) = F(p)(q)F(q) = c^* F(q)$, tehát $c^* = 0$, vagy $F(q) \equiv 1$ minden $q \in \mathbb{P}$-re. Ha $F(q) \equiv 1$ minden $q \in \mathbb{P}$-re, akkor q-t a konstans 0 polinomnak választva $\mathbf{I}(q,q)$ szerint $2 = F(q \equiv 0) + F(q \equiv 0) = F(q \equiv 0) = 1$, ami ellentmondás. Azaz $F(p) \equiv 0$, ha p konstans.

Tekintsük most $\mathbf{II}(p, q(x) = x)$-t. Azt kapjuk, hogy $F(p) = F(p) \cdot F(q)$, így ha van olyan p, amire $F(p) \neq 0$, akkor $F(q) \equiv 1$; különben $F(q) \equiv 0$ minden $q \in \mathbb{R}$-re, ami könnyen ellenőrizhető, hogy valóban egy megoldás.

A továbbiakban tehát feltehetjük, hogy $F(x) \equiv 1$. Tekintsük most a $\mathbf{II}\left(p(x) = ax, q(x) = \frac{1}{a}x\right)$ feltételt. Eszerint $1 = F(x) = F(p(q)) = F(p)(q)F(q)$, tehát $F(q)$ konstans, és q tetszőleges lineáris polinom lehet, amelynek 0 a konstans tagja.

Legyen $p(x) = ax$, $q(x) = bx$, és tekintsük az $\mathbf{I}(p,q)$ és $\mathbf{II}(p,q)$ állításokat.

$$F(p) + F(q) = F(p + q = (a+b)x),$$

$$F(abx) = F(p(q)) = F(p) \cdot F(q),$$

mert $F(p)$ konstans. Most legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre $g(a) = F(p(x) = ax)(0)$. Erre a fenti egyenletek alapján teljesül, hogy

$$g(a) + g(b) = g(a+b),$$

és

$$g(ab) = g(a)g(b),$$

mivel $F(p)$ és $F(q)$ konstans. Ismert, hogy egy ilyen függvény vagy $g(a) = a$, vagy $g(a) = 0$ minden a-ra. Tehát $F(p(x) = ax) \equiv a$, vagy $F(p(x) = ax) \equiv 0$. Mivel azonban $F(p(x) = x) = x$, ezért $F(p(x) = ax) \equiv a$.

Ekkor tetszőleges $b \in \mathbb{R}$-re

$$F(p(x) = ax + b) = F(p_1(x) = ax) + F(p_2(x) = b) = F(p_1(x) = ax) \equiv a.$$

Most vizsgáljuk $F(p(x) = ax)$ és egy tetszőleges $q(x)$ polinom kapcsolatát a $\mathbf{II}(p,q)$-ból. Az állítás szerint

$$F(aq) = aF(q).$$

Lássuk be a polinomok fokára vonatkozó teljes indukcióval, hogy $F(p) = p'$, ahol p' a p polinom deriváltja.

Ha $\deg(p) < 2$, akkor a fentiek szerint $F(p) = p'$. Az indukciós lépés: Tegyük fel, hogy ha $\deg(p) \leq n-1$, akkor $F(p) = p'$. Most igazolni fogjuk, hogy $F(p) = p'$ $\deg(p) = n$-re is. Legyen $p(x) = x^n$, $q(x) = x+1$, és tekintsük a $\mathbf{II}(p,q)$-t. Eszerint

$$F((x+1)^n) = F(x^n)(x+1).$$

A binomiális tételt felhasználva $(x+1)^n = x^n + nx^{n-1} + \ldots + 1$, tehát

$$F((x+1)^n) = F(x^n) + F((x+1)^n - x^n).$$

Mivel $(x+1)^n - x^n$-ben a legmagasabb fokú tag n-nél kisebb, az indukciós feltevés szerint

$$F((x+1)^n - x^n) = ((x+1)^n - x^n)' = n(x+1)^{n-1} - nx^{n-1}.$$

Ezért

$$F(x^n)(x+1) = F(x^n) + n(x+1)^{n-1} - nx^{n-1}.$$

Legyen $p(x) = F(x^n) - nx^{n-1}$. Ekkor

$$p(x+1) + n(x+1)^{n-1} = F(x^n)(x+1) = F(x^n) + n(x+1)^{n-1} - nx^{n-1}.$$

Így:

$$p(x+1) = p(x),$$

amiből következik, hogy $p(x)$ periodikus függvény. Mivel $p(x)$ polinom, csak konstans lehet, vagyis $p(x) \equiv c$ valamely $c \in \mathbb{R}$-re. Ez azt jelenti, hogy

$$F(x^n) = nx^{n-1} + c.$$

Végül vizsgáljuk meg c-t! Legyen $p(x) = x^n$, $q_1(x) = ax$, és $q_2(x) = \sqrt[n]{a}x$, ahol $a \in \mathbb{R}$. Tekintsük a $\mathbf{II}(q_1, p)$ és $\mathbf{II}(p, q_2)$-t:

$$a(nx^{n-1} + c) = F(q_1(p)) = F(p(q_2)) = \Big(n\left(\sqrt[n]{a}x\right)^{n-1} + c\Big) \cdot \sqrt[n]{a}.$$

Ebből

$$a(nx^{n-1} + c) = anx^{n-1} + c\sqrt[n]{a},$$

ami akkor teljesül, ha $c = 0$. Tehát

$$F(x^n) = nx^{n-1}.$$

Ezzel beláttuk, hogy ha $\deg(p) = n$, és $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, akkor

$$F(p) = \sum_{i=0}^n a_i F(x^i) = \sum_{i=0}^n a_i(ix^{i-1}) = p'(x).$$

Ezzel pedig kész lettünk.

E+4. Adottak az n és k pozitív egész számok, melyekre $n \geq k$. Egy $n \times n$-es táblázat minden mezőjébe írtunk egy egész számot úgy, hogy minden sorba és oszlopba legfeljebb k különböző szám került. Legfeljebb hány különböző szám szerepelhet a táblázatban?
A választ n és k függvényében adjátok meg!

Megoldás: A válasz $(k-1)n + \lfloor \frac{n}{n-k+1} \rfloor$, ahol $\lfloor x \rfloor$ az x valós szám egészrészét jelöli. Fogalmazzuk át a feladatot egy ekvivalens kérdésre! A $K_{n,n}$ teljes páros gráf éleire számokat írtunk úgy, hogy minden csúcsból legfeljebb k féle számot tartalmazó él indul ki. Legfeljebb hány különböző számot írtunk az élekre?

Először mutatunk egy példát amikor be lehet írni ennyiféle számot. Jól ismert, hogy bármely $\ell \leq m$ pozitív egész számokra létezik ℓ-reguláris páros gráf amiben mindkét csúcshalmazban pontosan m csúcs szerepel. Legyen $G_1 = K_{n-k+1,n-k+1}$ és G_2 egy $n-k+1$-reguláris páros gráf $m = n - \left(\lfloor \frac{n}{n-k+1} \rfloor - 1 \right)(n-k+1) \geq n-k+1$ csúccsal. Ekkor $K_{n,n}$-ben elhelyzhető $\left(\lfloor \frac{n}{n-k+1} \rfloor - 1 \right)$ csúcsdiszjunkt másolata G_1-nek és még egy szintén csúcsdiszjunkt másolata G_2-nek. Ekkor $K_{n,n}$ összes csúcsa pontosan az egyik ilyen gráfban szerepel. Mindegyik berajzolt gráfhoz válasszunk ki különböző számot és írjuk rá az összes élére, majd a $K_{n,n}$ maradék élére mind különböző számokat helyezzünk el. Ekkor minden csúcsból pontosan k féle számot tartalmazó él indul ki, valamint $(k-1)n + \lfloor \frac{n}{n-k+1} \rfloor$ féle számot használtunk.

Most belátjuk hogy mindig legfeljebb ennyi szám szerepelhet a táblázatban. Tegyük fel, hogy a maximális konstrukcióban van $n(k-1)+a$ különböző szám a táblázatban, tudjuk a korábbi példa miatt, hogy $a \geq 0$. Ekkor nézzük végig felülről lefele, hogy hány új elem van abban az adott sorban, amit korábbi sorokban még nem láttunk. Skatulya-elv miatt, legalább a darab olyan sor lesz, ahol k új elemet találtunk, hiszen mindegyik sorban legfeljebb k elem lehet, válasszunk ki a darab ilyen sort és hívjuk ezeknek a soroknak a halmazát A-nak. Ekkor ha tekintjük A-t, akkor ezekben a sorokban összesen $a \cdot k$-féle különböző szám szerepel, és ha bármelyik oszloppal elmetszük A-t, akkor pontosan a különböző számot látunk. Ezért minden oszlopban A-n kívül legfeljebb $(k-a)$-féle különböző szám szerepelhet. Ezért meg tudjuk kétféleképpen számolni, hogy hány féle szám van összesen az egész táblázatban. A fenti gondolatmenetben az A sorait nézve van $a \cdot k$ különböző szám, valamint az n oszlop mindegyikében legfeljebb $k-a$ új szám, ez összesen legfeljebb $a \cdot k + n(k-a)$ különböző szám. Viszont pontosan $n(k-1)+a$ szám van, ezért felírható a következő egyenlőtlenség, amit tovább alakítunk.

$$\begin{aligned} a \cdot k + n(k-a) &\geq n \cdot (k-1) + a \\ n &\geq a \cdot (n-k+1) \\ \frac{n}{n-k+1} &\geq a \end{aligned}$$

Mivel a csak egész lehet, ezért beláttuk, hogy legfeljebb $(k-1)n + \lfloor \frac{n}{n-k+1} \rfloor$ különböző szám lehet a táblázatban.

E+5. A síkot hézagmentesen lefedtük egybevágó sokszögekkel úgy, hogy ha két sokszögnek van közös pontja, akkor az mindkettőnek a kerületén van. A fedésben minden sokszög belsejét fehérre, kerületét feketére színeztük. A sík kapott színezését jelöljük $\mathcal{S}$-sel, a fedésében használt sokszöget jelöljük $\mathcal{P}$-vel.

A síknak egy egybevágósági transzformációját nevezzük *kriminálisnak*, ha nem változtat $\mathcal{S}$-en, azaz a sík színezésén. Tudjuk, hogy léteznek olyan $0^\circ < \alpha, \beta, \gamma < 360^\circ$ szögek és különböző X, Y, Z pontok, melyekre az XYZ háromszögnek van 30°-os belső szöge, továbbá az X középpontú α szögű, az Y középpontú β szögű és a Z középpontú γ szögű forgatások mind kriminálisak.

a) Lehetséges-e, hogy $\mathcal{S}$-nek és $\mathcal{P}$-nek sincs sem tengelyes, sem középpontos szimmetriája?

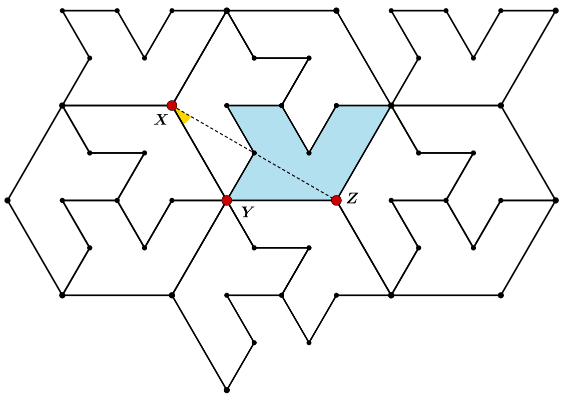
b) Az összes lehetséges $\mathcal{S}$ színezést figyelembe véve határozzátok meg $\alpha + \beta + \gamma$ lehetséges értékeit!

c) Mutassatok példát olyan $\mathcal{S}$-re, melyre létezik kriminális csúsztatva tükrözés, de nem létezik kriminális tengelyes tükrözés! Bizonyítsátok be, hogy minden ilyen példa esetén $\alpha = \beta = \gamma$ teljesül!

A csúsztatva tükrözés egy tengelyes tükrözés és egy eltolás egymásutánja, melyben az eltolási vektor és a tükrözési tengely párhuzamosak. A forgatások definíció szerint óramutató járásával ellentétes irányúak.

Megoldás: Először is vezessünk be jelöléseket: ρ_O^ϕ jelölje az O középpontú ϕ szögű forgatást, $\tau_{\mathbf{v}}$ jelölje a $\mathbf{v}$ vektorral való eltolást, illetve σ_e és σ_E jelölje rendre az e egyenesre és az E pontra való tükrözést. Az O pontot ϕ-középnek hívjuk, ha ρ_O^ϕ kriminális. Rögtön észrevehetjük, hogy kriminális transzformációk kompozíciója is kriminális, sőt egy kriminális transzformációt egy másik kriminális transzformáció kriminálisba visz (például ha ρ_D^δ, ρ_E^ϵ kriminálisak, akkor $\rho^\epsilon_{\rho_D^\delta(E)}$ is az.) Továbbá $\circ$-el fogjuk jelölni transzformációk kompozícióját, és $t_1 \circ t_2$ alatt azt értjük, hogy először t_2-t, aztán t_1-et végezzük el.

a) Lehetséges. Lásd az alábbi példát, melyben először a síkot lefedtük szabályos hatszögekkel, majd azokat egyesével felbontottuk három-három egybevágó, sehogysem szimmetrikus sokszögre:



Természetesen egy szabályos hatszög három egymást követő csúcsa egy olyan háromszöget alkot, melynek két szöge is 30°, továbbá mindhárom csúcsa 120°-közép.

b) Néhány lemmára lesz szükségünk.

1. Lemma. Adott a síkon két különböző pont, D és E, illetve két szög, δ és ϵ. Legyen $d = \rho_D^{-\delta/2}(DE)$ és $e = \rho_E^{\epsilon/2}(DE)$. Ekkor

- ha $\delta + \epsilon \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, akkor $\rho_E^\epsilon \circ \rho_D^\delta = \rho_O^{\delta+\epsilon}$, ahol $O = d \cap e$;
- ha $\delta + \epsilon \equiv 0 \pmod{2\pi}$, azaz $d \parallel e$, akkor $\rho_E^\epsilon \circ \rho_D^\delta = \tau^2$, ahol τ az az eltolás, ami d-t e-be viszi.

Bizonyítás. Felhasználva a forgatás felírását két tükrözés kompozíciójaként,

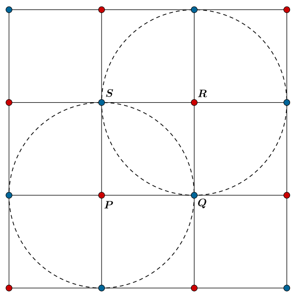
$$\rho_E^\epsilon \circ \rho_D^\delta = (\sigma_e \circ \sigma_{DE}) \circ (\sigma_{DE} \circ \sigma_f) = \sigma_e \circ \sigma_d.$$

2. Lemma. Ha O egy ϕ-közép, akkor $\phi \in \{60°, 90°, 120°, 180°, 240°, 270°, 300°\}$.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy ρ_X^α (vagy ρ_Y^β ha $O = X$ teljesülne) O-t egy másik ϕ-középbe viszi. Ha O' az egyik legközelebbi ϕ-közép O-hoz (van ilyen, mert egy pont környezetében csak véges sok ϕ-közép lehet, hiszen mindegyik sokszöget sokszögbe visz, így csúcsot is csúcsba), akkor az O pont O' körüli elforgatottja is ϕ-közép lesz, ennek messzebb kell lennie O-tól, mint O'. Mivel nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van, ez azt jelenti, hogy 60°-nál kisebb szöget nem generálhat ki a ϕ többszöröseinek sorozata modulo 360°, amiből az állítás adódik.

3. Lemma. Az α, β, γ egyike sem 90° vagy 270°.

Bizonyítás. Mivel $3 \cdot 270° \equiv 90° \pmod{360°}$, elég belátni, hogy nem létezhet 90°-közép a síkon. Indirekten tegyük fel, hogy P egy 90°-közép. Ekkor nem létezhet 60°- vagy 120°-közép, hiszen a kompozíciója olyan szögű kriminális forgatást eredményezne, melynek forgatási szöge ellentmondana a 2. Lemmának. Tehát a síkon minden közép 90°- vagy 180°-közép (akár mindkettő). Jelölje Q az egyik legközelebbi közepet P-hez. (Ilyen ismét azért létezik, mert bármely körben csak véges sok közép lehet.) Ha most Q egy 90°-közép lenne, akkor az 1. Lemma miatt a $\rho_P^{90°} \circ \rho_Q^{90°}$ egy olyan kriminális 180°-os forgatást eredményezne, melynek középpontja rajta van a PQ átmérőjű körön, ellentmondva $|PQ|$ minimalitásának. Tehát Q egy 180°-közép. Ezt elforgatva P körül 90°-kal, 180°-kal és 270°-kal újabb 180°-közepeket kapunk. Hasonlóan, P-t tükrözve a 180°-közepekre újabb 90°-közepeket kapunk. Könnyen látszik, hogy így egy négyzetrács rácspontjait kapjuk meg: minden pont 180°-közép, illetve ha sakktábla-szerűen színezzük ki a rácspontokat, akkor az egyik színű rácspontok még 90°-közepek is. Létezhet-e más, a rácspontoktól különböző közép? Nem, ugyanis benne lenne valamelyik *egység* rácsnégyzetben (az ábrán $PQRS$), de a négyzet 90°-közép csúcsaitól messzebb kell, hogy legyen, mint $|PQ|$, ami nem lehet, mert a 90°-közepek középpontú $|PQ|$ sugarú körök lefedik a négyzetet. Most használjuk ki, hogy az XYZ rácsháromszögnek van 30°-os szöge. Ez azt jelenti, hogy két rácsegyenes bezárt szöge 30°, azaz ha a két rácsegyenes meredeksége rendre x és y, akkor

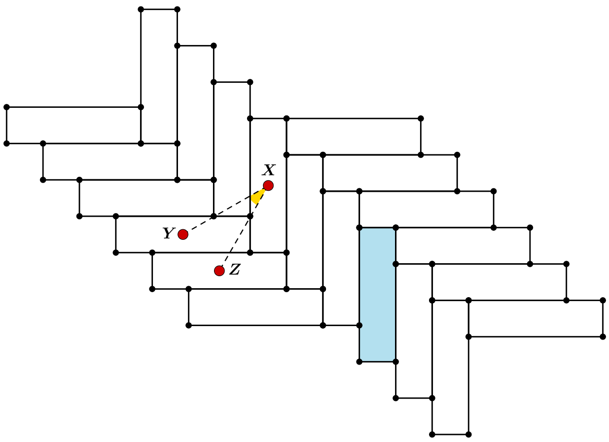


$$\tan(30°) = \tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}.$$

Ez viszont nyilván nem lehet, mert $\tan x$ és $\tan y$ racionálisak (hiszen rácsegyenesek), míg $\tan(30°) = 1/\sqrt{3}$ irracionális.

Összefoglalva, α, β, γ mind $c \cdot 60°$ alakú, ahol $1 \leq c \leq 5$ egész. Ekkor $\alpha + \beta + \gamma$ csak $C \cdot 60°$ alakú értékeket vehet fel, ahol $3 \leq C \leq 15$ egész. Ezek mind lehetségesek, például ha szabályos háromszögekkel fedjük le a síkot, és az X, Y, Z pontokat egy $30° - 30° - 120°$ háromszög csúcsainak választjuk (és itt minden csúcs egy 60°-közép).

c) Kezdjük a példával.

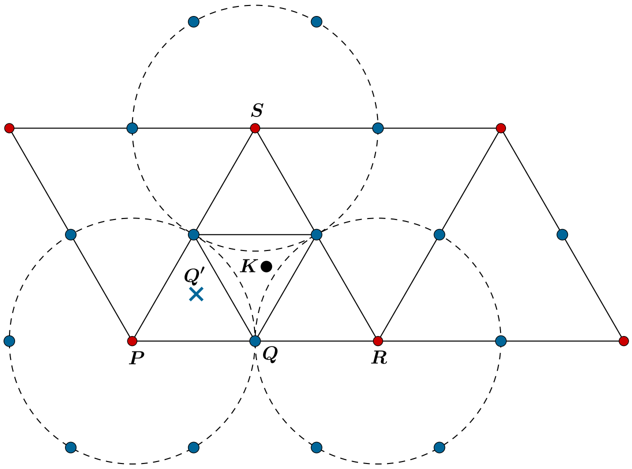


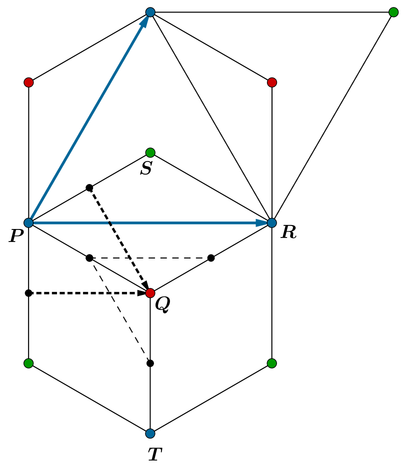
Itt X, Y, Z egy-egy téglalap középpontját jelöli. Világos, hogy ezek mind 180°-közepek, és a téglalapok oldalainak arányait megfelelően megválasztva elérhetjük, hogy X-nél 30° legyen.

Most lássuk be, hogy ilyenkor $\alpha = \beta = \gamma = 180°$. A **3. Lemmának** köszönhetően csak két esetnél kell belátni, hogy egy kriminális csúsztatva tükrözés létezéséből adódik kriminális tengely tükrözés létezése.

Első eset: létezik 60°-közép. Jelöljön P egy 60°-et és Q a hozzá legközelebbi közepet. Q nem lehet 120°-közép, különben a 1. Lemma miatt $\rho_P^{60°} \circ \rho_Q^{120°}$ egy olyan 180°-os forgatás lenne, amelynek középpontja rajta lenne a PQ átmérőjű körön, ellentmondva $|PQ|$ minimalitásának. Tehát Q egy 180°-közép. Most Q-t P körül 60°-kal, 120°-kal, $\ldots$, 300°-kal elforgatva más 180°-közepeket kapunk. Ha pedig a 60°-közepeket tükrözzük a 180°-közepekre, akkor újabb 60°-közepeket kapunk. Ezekkel a lépésekkel egy szabályos háromszögrácsot kapunk, melynek rácspontjai 180°-közepek, továbbá minden második rácspont 60°-közép is. Azt állítjuk, hogy az így keletkezett 60°-közepek háromszögrácsán kívül nem létezhet más 60°-közép. Ugyanis ha K ilyen lenne, akkor benne van valamelyik egység szabályos háromszögben, legyen ez mondjuk PRS. Ekkor K a háromszög középvonali háromszögében lesz benne (sőt még azon belül sem akárhol), mert a $|PQ|$ távolság minimális, azaz nem lehet benne a P, R, S középpontú $|PQ|$ sugarú körökben. Viszont ekkor Q-nak a K-körüli $-60°$-os elforgatottja egy olyan Q' pont lesz, ami 180°-közép és közelebb lesz P-hez, mint Q, ami ellentmondás.

Így a 60°-közepek pont ez ennek a háromszögrácsnak a csúcsai. Vegyük észre, hogy $\tau_{\overrightarrow{PR}}$ is kriminális, mert ez éppen $\rho_Q^{180°} \circ \rho_P^{180°}$. Hasonlóan $\tau_{\overrightarrow{PS}}$ is az, így a szabályos háromszögrácsban bármely két pontot egymásba lehet vinni kriminális eltolással. De ha egy csúsztatva tükrözés kriminális, akkor ezt a rácsot önmagába viszi. Tegyük fel, hogy P képe P'. Ekkor $\tau_{\overrightarrow{P'P}}$-vel komponálva a csúsztatva tükrözést, egy irányításváltó kriminális egybevágóságot kapunk, melynek P fixpontja, azaz tengelyes tükrözés. Ezzel találtunk kriminális tengelyes tükrözést.





Második eset: nem létezik 60°-közép, de létezik 120°-közép. Most minden közép 120°-közép (mert 180°-közép eredményezne 60°-közepet). Legyen P egy 120°-közép és jelölje Q a hozzá egyik legközelebbi közepet. Most a 120°-os forgatások megint egy szabályos háromszögrácsot eredményeznek, melyeknek csúcsai a 120°-közepek. Megint nem lehet más közép, hiszen benne lenne valamelyik kis egység háromszögben, ellentmondva a minimalitásnak. Most viszont nem lesz minden eltolás kriminális. Észrevehetjük, hogy $\rho_P^{120^\circ} \circ \rho_Q^{-120^\circ}$ olyan eltolást eredményez, melynek eltolási vektora pont egy $60^\circ - 120^\circ$ rombusz hosszabbik átlója. Tehát három olyan szabályos háromszögrács diszjunkt úniója, melyekben külön-külön az élek kriminális eltolási vektorok. Avagy mondhatnánk azt is, hogy felbontottuk a háromszögrácsot három olyan alrácsra, melyben azonos alrácsban lévő pontokat egymásba tudjuk vinni kriminális eltolásokkal.

Mivel a csúsztatva tükrözés a teljes rácsot önmagába viszi (hiszen kriminális), P-t is valamelyik rácspontba viszi. Most ha $PQRS$ egy minimális $60^\circ - 120^\circ$ rombusz, akkor $P - R$ egy alrácsban van, míg Q, S egy-egy ettől és egymástól különböző alrácsban van. Így megfelelő eltolással komponálva a csúsztatva tükrözést kapunk egy olyan csúsztatva tükrözést, ami P-t vagy önmagába, vagy Q-ba, vagy S-be viszi. Ha P-be viszi, akkor van egy fixpont, azaz találtunk egy tengelyes tükrözést. A másik két eset szimmetrikus (forgatással), azaz feltehetjük, hogy P képe Q. Használjuk ki, hogy egy csúsztatva tükrözést kétszer alkalmazva egy eltolást kapunk, melynek eltolási vektora kétszerese a csúsztatva tükrözés eltolási vektorának. Ezért Q biztosan olyan pontba fog menni, ami egy alrácsban van P-vel. (Ehhez gondoljuk végig, hogy különböző alrácspontok közötti vektor nem adhat kriminális eltolást, hiszen akkor azt beszorozva egy megfelelő forgatással új közepet kapnánk.) Továbbá a távolságtartás miatt Q a körülötte lévő kis szabályos hatszög valamelyik csúcsába fog menni. Az előző gondolatmenet miatt ez az ábra jelöléseivel P, R, vagy T. Ha P lenne, akkor már a csúsztatva tükrözés eleve tengelyes tükrözés lenne, amivel kész lennénk. Ha viszont R vagy T lenne, akkor könnyen látszik, hogy a csúsztatva tükrözés tengelye rendre a PQR vagy a PQT háromszög Q-hoz tartozó középvonala lenne (hiszen egy csúsztatva tükrözés tengelye felezi egy pont és a képét összekötő szakaszt), amiből az következne mindkét esetben, hogy az eltolási vektor a Q alrácsában egy-egy minimális vektor fele lenne, ami ellentmondás.