XVIII. Dürer Verseny

Helyi forduló (2024. 11. 22.)

Megoldókulcs

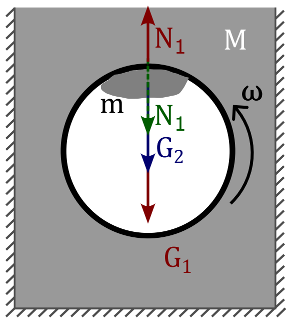
F kategória

1. feladat

Elsőként tekintsük át az állórészre ható erőket! Függőlegesen lefelé hat a nehézségi erő, melynek nagysága $G_1 = Mg$. A forgó- és az állórész között fellép egy kényszererő, ennek nagysága legyen N_1. Az előzőeken kívül a talaj és az állórész között is fellép nyomóerő, azonban az elemelkedés határhelyzetében ennek értéke éppen zérus, tehát annak feltétele, hogy az állórész ne emelkedjen el a talajtól:

$$Mg \geq N_1. \tag{1.1}$$

Vizsgáljuk meg a forgórészre ható erőket is! Itt is fellép a nehézségi erő, melynek nagysága $G_2 = mg$. Megjelenik továbbá a korábban említett N_1 nyomóerő ellenereje. A kis test forgását mindvégig ez a két erő biztosítja, melyből már könnyedén meggondolható, hogy a kritikus helyzet az lesz, mikor a forgórész tömegközéppontja éppen a pályája tetején helyezkedik el, ugyanis az állórészre ható N_1 nyomóerő ekkor fog függőlegesen felfelé hatni (1.1. ábra).



1.1. ábra. Az álló- és forgórészre ható erők a határhelyzetben.

Írjuk fel ebben a helyzetben a dinamika alapegyenletét a forgórészre:

$$\sum F = G_2 + N_1 = ma_{\mathrm{cp}} = md\omega^2, \tag{1.2}$$

ezt N_1-re rendezve:

$$N_1 = md\omega^2 - mg. \tag{1.3}$$

A kapott eredményt behelyettesítve az (1.1)-es egyenletbe:

$$Mg \geq md\omega^2 - mg. \tag{1.4}$$

Innen a mosógép állórészének tömegére kapott feltétel:

$$\boxed{M \geq \frac{md\omega^2}{g} - m}. \tag{1.5}$$

2. feladat

Vizsgáljuk meg először a hosszanti rostok által létrehozott pumpát! Ebben az esetben a pumpa magassága könnyen kifejezhető a kis izomrostok hosszával:

$$h = n_1 d, \tag{2.1}$$

ahol n_1 az egymás fölött lévő rostok száma. Ebből a pumpa össztérfogata:

$$V_1 = R^2 \pi n_1 d. \tag{2.2}$$

A pumpák áramerőssége megegyezik az egységnyi idő alatt kilökött térfogattal, így az első pumpa áramerőssége a következő:

$$I_1 = \frac{\Delta V_1}{\Delta t} = \frac{V_1' - V_1}{\Delta t} = \frac{R^2 \pi n_1 \lambda d - R^2 \pi n_1 d}{\Delta t} = \frac{R^2 \pi n_1 d}{\Delta t} (\lambda - 1), \tag{2.3}$$

felhasználva a (2.1) felírást:

$$I_1 = \frac{R^2 \pi h}{\Delta t} (\lambda - 1). \tag{2.4}$$

Körkörös rostok esetén a pumpa magassága nem változik az összehúzódáskor, viszont a keresztmetszete igen. Hasonlóan az előző esethez, itt a pumpa sugara fejezhető ki a kis d hosszúságú rostok segítségével:

$$R = \frac{n_2 d}{2\pi}, \tag{2.5}$$

ahol n_2 a kerület mentén egymás mellett lévő rostok száma. Ebből a pumpa össztérfogata:

$$V_2 = \frac{n_2^2 d^2 h}{4\pi}. \tag{2.6}$$

A fenti kifejezés időbeli változása megadja a pumpa áramerősségét:

$$I_2 = \frac{\Delta V_2}{\Delta t} = \frac{V_2' - V_2}{\Delta t} = \frac{n_2^2 (\lambda d)^2 h - n_2^2 d^2 h}{4\pi \Delta t} = \frac{n_2^2 d^2 h}{4\pi \Delta t} \left(\lambda^2 - 1\right), \tag{2.7}$$

ahova beírva a (2.5) kifejezést:

$$I_2 = \frac{R^2 \pi h}{\Delta t} \left(\lambda^2 - 1\right). \tag{2.8}$$

Elosztva egymással a (2.8) és (2.4) egyenleteket megkapjuk a két pumpa áramerősségének arányát:

$$\boxed{\frac{I_2}{I_1} = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda - 1} = \frac{(\lambda - 1)(\lambda + 1)}{\lambda - 1} = \lambda + 1}. \tag{2.9}$$

3. feladat

Tekintsük azt a pillanatot, amikor már mind az n robbanás megtörtént, és a rakéta sebessége 0. Mivel a rakétára semmilyen külső hatás nem hat a gravitáción kívül, így a robbanások időzítésétől függetlenül a felszállástól kezdve egészen eddig a pillanatig minden esetben ugyanannyi idő telik el. Gondoljuk meg, hogy minden másodpercben g-vel csökken a rakéta sebessége, és összesen nv_0-al tudjuk növelni azt. Mivel a kritikus pillanatig a sebességvektor sosem mutatott lefelé, így a robbanások idejétől függetlenül eddig a pillanatig

$$T = \frac{nv_0}{g} \tag{3.1}$$

idő telt el. Sőt, szintén emiatt az is igaz, hogy éppen ebben a pillanatban van a rakéta pályájának legmagasabb pontján, hiszen eddig sosem zuhant, innentől pedig csak zuhanni fog.

(a)

Ha a rakéta mozgása során egy tetszőleges időpontban megnöveljük v_0-al a sebességét, akkor utána minden pillanatban v_0-al lesz nagyobb a sebessége, ahhoz képest, mint ha nem növeltük volna meg. Ennek oka, hogy a rakétát csak a gravitáció lassítja konstans g-vel. Ez alapján felírhatjuk a rakéta legfelső darabjának (mely az utolsó robbanás után a rakétát alkotja) elmozdulását az idő függvényében:

$$r(t) = \sum_{i=1}^{n} (t - t_i)v_0 - g/2t^2, \tag{3.2}$$

ahol t_i az i. robbantás pillanata. Látható, hogy ha t_i-t megváltoztatjuk, például kicseréljük t_i'-re (ahol $t_i' < t_i$) akkor az elmozdulás $r'(t) - r(t) = v_0(t_i - t_i')$-vel fog nőni, tehát ha egy robbanást hamarabb használunk el, akkor utána minden pillanatban magasabban lesz a rakéta. Ez természetesen a formális leírás előtt is következett a fent elmondottakból. Mi $r(T)$-t szeretnénk maximalizálni, ezért minden robbanást érdemes a lehető leghamarabbra időzíteni, ami a $t = 0$ időpontban van. Tehát **mind az n robbanást rögtön a $t = 0$ pillanatban kell elhasználni**.

(b)

Most $r(T)$-t minimalizálni szeretnénk azzal a fontos megkötéssel, hogy a rakéta sosem mozoghat lefelé. Az előző gondolatmenetből az is következik, hogy minél később robbantunk, annál kevesebb ideig fog a rakéta v_0-al nagyobb sebességgel menni, így alacsonyabbra ér fel. Ez formálisan is látható: ha $r(t)$ képletében t_i-t lecseréljük t_i'-re, ahol már $t_i' > t_i$, akkor az elmozdulás $r'(t) - r(t) = v_0(t_i - t_i')$-vel változik, ami egy negatív mennyiség, tehát csökken. Így érdemes a lehető legkésőbb robbantani, viszont arra vigyázni kell, hogy a rakéta sebességvektora sose mutasson lefelé, amennyiben tudunk még robbantani. Így **mindig pont arra a pillanatra kell robbantásokat időzíteni, amikor a rakéta sebessége éppen 0**.

4. feladat

A labdának kezdetben csak helyzeti energiája van, ez

$$E_0 = mgH. \tag{4.1}$$

Ez az energia egészen az első pattanásig megmarad, viszont utána már csak ennek a 90%-ával, azaz 0,9-szeresével rendelkezik a labda, mint mechanikai energia. A második pattanás után az addigi mechanikai energiának szintén csak a 0,9-szerese marad meg, és így tovább. Tehát felírhatjuk, hogy az i. pattanás után a megmaradt energia (ami nem alakult hővé):

$$E_\mathrm{m}(i) = (0{,}9)^i E_0. \tag{4.2}$$

A labda akkor nem tud már $H/2$ magasra visszapattanni, ha az E_m nagyságú mechanikai energiájára a következő egyenlőtlenség igaz:

$$E_\mathrm{m} < mgH/2. \tag{4.3}$$

Felhasználva, hogy E_m az i. pattanás után éppen $E_\mathrm{m}(i)$ a (4.2) és (4.3) összefüggések alapján meg tudjuk mondani, hogy hány pattanás múlva nem éri el a kívánt magasságot. A legkisebb i, amire

$$(0{,}9)^i E_0 < mgH/2 \tag{4.4}$$

teljesül, lesz a megoldás. Ebbe az egyenlőtlenségbe $E_0 = mgH$-t helyettesítve:

$$(0{,}9)^i mgH < mgH/2, \tag{4.5}$$

tehát a kritikus i-re:

$$(0{,}9)^i < 1/2. \tag{4.6}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a legkisebb i, amire ez teljesül

$$i = \left\lceil \frac{-1}{\log_2 0{,}9} \right\rceil = 7. \tag{4.7}$$

Ismerve a visszapattanások számát a labda melegítésére fordítódott energia mennyisége már számítható:

$$Q = E_0 - E_\mathrm{m}(7) = mgH - (0{,}9)^7 mgH = \left(1 - (0{,}9)^7\right) mgH. \tag{4.8}$$

Innen a keresett új hőmérséklet:

$$\boxed{T_7 = T_0 + \frac{Q}{cm} = T_0 + \frac{\left(1 - (0{,}9)^7\right) gH}{c} \approx T_0 + 0{,}52\,\frac{gH}{c}}. \tag{4.9}$$

5. feladat

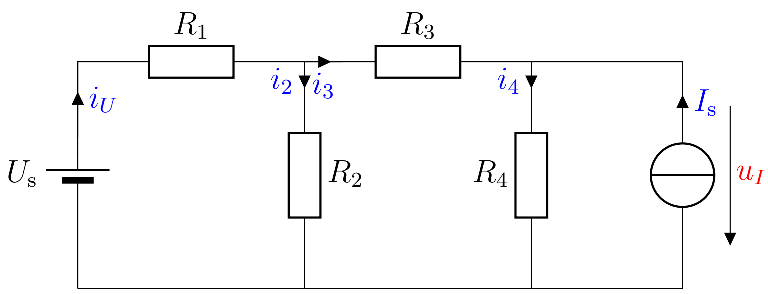
A feladat megoldásához több úton is eljuthatunk. A következőkben két módszert mutatunk be, melyeknél egyaránt kihasználtuk, hogy zárt rendszerben az ellenállások által adott időegység alatt felvett energia megegyezik a források által leadott energiával, azaz az ellenállások összteljesítményének, valamint a források összteljesítményének előjeles összege zérus. Ebben a megfogalmazásban a feltett kérdés tulajdonképpen a források összteljesítményére vonatkozik.

Első megoldás - Kirchhoff-törvények alkalmazása

A keresett összteljesítmény a két forrás teljesítményének összege:

$$P = U_s \cdot i_U + I_s \cdot u_I, \tag{5.1}$$

ahol i_U a feszültségforráson átfolyó áram erőssége, u_I pedig az áramforráson eső feszültség. A továbbiakban az áramkör egyes ágaiban folyó áramerősségeket jelöljük az 5.1. ábra szerint.



5.1. ábra. Az egyes ágakban folyó áramok, mint ismeretlenek jelölése.

Az ábrán is látható, hogy 5 ismeretlenünk van, így 5 egyenletet kell felírnunk. A felső két csomópontra Kirchhoff csomóponti törvényéből:

$$i_U - i_2 - i_3 = 0, \tag{5.2}$$

$$I_s + i_3 - i_4 = 0. \tag{5.3}$$

A 3 hurokra Kirchhoff huroktörvényét alkalmazva:

$$U_s - R \cdot i_U - 2R \cdot i_2 = 0, \tag{5.4}$$

$$2R \cdot i_2 - 2R \cdot i_4 - R \cdot i_3 = 0, \tag{5.5}$$

$$-u_I + 2R \cdot i_4 = 0. \tag{5.6}$$

i_2-t az (5.4) egyenletből i_4-t az (5.6) egyenletből kifejezve:

$$i_2 = \frac{U_s}{2R} - \frac{i_U}{2}, \tag{5.7}$$

$$i_4 = \frac{u_I}{2R}. \tag{5.8}$$

Ezeket behelyettesítve az (5.2), (5.3) és (5.5) egyenletekbe az alábbi 3 egyenletet kapjuk:

$$\frac{3i_U}{2} - \frac{U_s}{2R} - i_3 = 0, \tag{5.9}$$

$$I_s + i_3 - \frac{u_I}{2R} = 0, \tag{5.10}$$

$$U_s - R \cdot i_U - u_I - R \cdot i_3 = 0. \tag{5.11}$$

Fejezzük ki i_3-t az (5.10) egyenletből:

$$i_3 = \frac{u_I}{2R} - I_\mathrm{s}, \tag{5.12}$$

majd helyettesítsük be az (5.9)-be és (5.11)-be:

$$\frac{3i_U}{2} - \frac{U_\mathrm{s}}{2R} - \frac{u_I}{2R} + I_\mathrm{s} = 0, \tag{5.13}$$

$$U_\mathrm{s} - R \cdot i_U - \frac{3u_I}{2R} + R \cdot I_\mathrm{s} = 0. \tag{5.14}$$

Az (5.14)-ből i_U-t kifejezve:

$$i_U = -\frac{3u_I}{2R} + I_\mathrm{s} + \frac{U_\mathrm{s}}{R}, \tag{5.15}$$

visszahelyettesítve az (5.13)-ba:

$$-\frac{9u_I}{4R} + \frac{3I_\mathrm{s}}{2} + \frac{3U_\mathrm{s}}{2R} - \frac{U_\mathrm{s}}{2R} - \frac{u_I}{2R} + I_\mathrm{s} = 0, \tag{5.16}$$

végül rendezve u_I-re:

$$u_I = \frac{4U_\mathrm{s}}{11} + \frac{10R \cdot I_\mathrm{s}}{11}. \tag{5.17}$$

Visszahelyettesítve az (5.15) egyenletbe megkapjuk i_U értékét is U_s, valamint I_s függvényében:

$$i_U = -\frac{6U_\mathrm{s}}{11R} - \frac{15I_\mathrm{s}}{11} + I_\mathrm{s} + \frac{U_\mathrm{s}}{R}, \tag{5.18}$$

elvégezve az egyszerűsítéseket:

$$i_U = \frac{5U_\mathrm{s}}{11R} - \frac{4I_\mathrm{s}}{11}. \tag{5.19}$$

A keresett összteljesítmény az (5.1) egyenlet alapján:

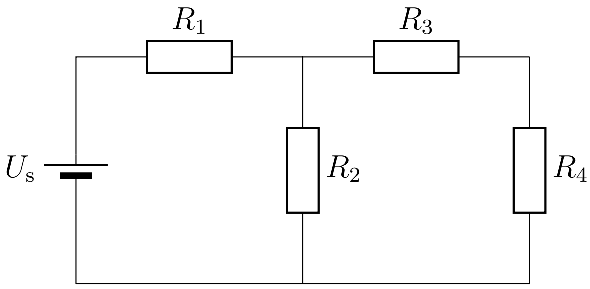
$$P = \frac{5U_\mathrm{s}}{11R} \cdot U_\mathrm{s} - \frac{4I_\mathrm{s}}{11} \cdot U_\mathrm{s} + \frac{4U_\mathrm{s}}{11} \cdot I_\mathrm{s} + \frac{10R \cdot I_\mathrm{s}}{11} \cdot I_\mathrm{s} = \frac{5U_\mathrm{s}^2}{11R} + \frac{10R \cdot I_\mathrm{s}^2}{11}, \tag{5.20}$$

összevonva

$$\boxed{P = \frac{5U_\mathrm{s}^2}{11R} + \frac{10R \cdot I_\mathrm{s}^2}{11}}. \tag{5.21}$$

Második megoldás - Szuperpozíció

Használjuk ki a hálózat linearitását. Ekkor az eredeti kapcsolás előáll két leegyszerűsített hálózat szuperpozíciójaként, ahol az egyes hálózatok már egyforrásos kapcsolások. A módszer elve szerint amikor az egyik forrást vizsgáljuk, a többi forrást dezaktivizálni kell. Ez annyit jelent, hogy a feszültségforrást egy nulla feszültségű komponenssel, azaz rövidzárral, míg az áramforrást egy nulla áramú komponenssel, azaz szakadással helyettesítjük. Elsőként vizsgáljuk a dezaktivizált áramforrás melletti egyszerűsített kapcsolást (5.2. ábra):



5.2. ábra. Kapcsolás dezaktivizált áramforrás esetén.

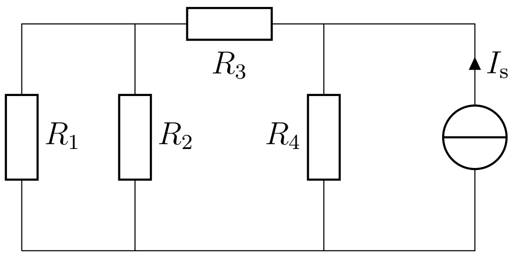
Általános esetben az ellenállások eredője:

$$R_{e1} = R_1 + R_2 \times (R_3 + R_4) = R_1 + \frac{R_2R_3 + R_2R_4}{R_2 + R_3 + R_4}, \tag{5.22}$$

a feladatban megadott R értékekkel:

$$R_{e1} = R + 2R \times (R + 2R) = R + \frac{2R \cdot 3R}{2R + 3R} = \frac{11R}{5}. \tag{5.23}$$

Most vizsgáljuk a kapcsolást dezaktivizált feszültségforrás mellett (5.3. ábra):



5.3. ábra. Kapcsolás dezaktivizált feszültségforrás esetén.

Az eredő ellenállás értéke általános esetben:

$$R_{e2} = (R_1 \times R_2 + R_3) \times R_4 = \frac{R_1R_2R_4 + R_2R_3R_4 + R_1R_3R_4}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_1R_4 + R_2R_3 + R_2R_4}, \tag{5.24}$$

a feladatban megadott R értékekkel:

$$R_{e2} = (R \times 2R + R) \times 2R = \frac{(R \cdot 2R/(R + 2R) + R) \cdot 2R}{R \cdot 2R/(R + 2R) + 3R} = \frac{10R}{11}. \tag{5.25}$$

A korábban kifejtett magyarázat alapján a keresett összteljesítmény:

$$P = U_s \cdot \frac{U_s}{R_{e1}} + I_s \cdot I_s \cdot R_{e2}, \tag{5.26}$$

behelyettesítve:

$$\boxed{P = \frac{5U_s^2}{11R} + \frac{10R \cdot I_s^2}{11}}. \tag{5.27}$$