XVIII. Dürer Verseny

Helyi forduló (2024. 11. 22.)

Feladatsor

F+ kategória

Figyelem! *A teljes pontszám eléréséhez nem elegendő a megoldások számszerű közlése, levezetés és a logikai lépések szöveges indoklása is szükséges (pl. „Newton III. törvénye alapján...")!*

1. feladat (15 pont)

Egy koranyári napon Tamás épp a kertben játszott, amikor hirtelen eleredt az eső. Mivel nem szeretett volna megázni, elkezdett azon gondolkozni, hogy milyen állandó v nagyságú sebességgel kellene a tőle s távolságra lévő ajtó felé futnia, hogy összességében a legkevesebb eső érje, mielőtt beér a házba. Tamás végül arra jutott, hogy mindegy, milyen gyorsan megy, hiszen minél gyorsabban fut, annál hamarabb célba ér, viszont annál több esőt kap szemből. Ha pedig lassan megy, akkor kevesebb esőt kap szemből, cserébe viszont több ideig fog ázni.

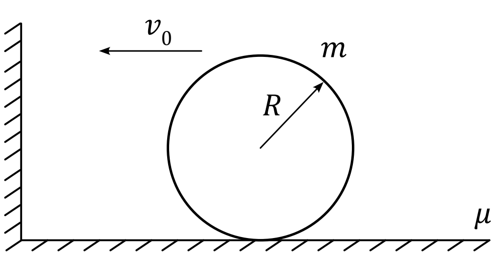
(a) Helyes volt-e Tamás gondolatmenete? Tegyük fel, hogy az eső függőlegesen esik v_1 nagyságú sebességgel úgy, hogy minden pillanatban egyenletesen ϱ [darab/m^3] sűrűséggel oszlik el. Felülnézetből Tamás keresztmetszete A_1, szemből és hátulról pedig egyaránt A_2. Mekkora v nagyságú sebességgel fusson egyenesen az ajtó felé, hogy a lehető legkevesebb eső érje (szemből és felülről összesen)?

(b) Mi a helyzet akkor, ha $\boldsymbol{v_1}$ vektor a vízszintessel α szöget zár be, és pont szemből Tamás felé mutat (azaz $\boldsymbol{v_1}$ vízszintes komponense azonos irányú az ajtót Tamással összekötő félegyenessel)?

(c) Milyen eredményt kapunk akkor, ha $\boldsymbol{v_1}$ szintén α szöget zár be a vízszintessel, viszont ezúttal pont hátulról mutat Tamás felé (azaz a vízszintes komponens azonos irányú a Tamást az ajtóval összekötő félegyenessel)?

2. feladat (22 pont)

Tekintsünk egy R sugarú, m tömegű, homogén tömegeloszlású korongot. Kezdetben a korong tisztán gördül egy függőleges, tökéletesen sima fal felé v_0 sebességgel, ahogyan az *ábra* is mutatja. A vízszintes talaj és a korong között a csúszási és tapadási súrlódási együttható μ. Mekkorának válasszuk a fallal történő ütközésre jellemző $0 < k < 1$ ütközési számot, ha azt szeretnénk, hogy a korong pontosan kétszer ütközzön a fallal?



3. feladat (22 pont)

A Düránusz bolygón olyan rakétákat használnak a környezetvédelem jegyében, amelyek nem üzemanyaggal működnek, hanem a lendületmegmaradást használják ki. Ezek a rakéták ugyanis bármikor két egyenlő tömegű részre tudnak robbanni. Ha a robbanás előtt a rakéta $\boldsymbol{v}$ sebességgel repült, akkor utána az egyik darab $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v_0}$-lal, a másik pedig $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v_0}$-lal fog haladni, ahol $\boldsymbol{v_0}$ és $\boldsymbol{v}$ vektorok függőleges irányúak. A két darab közül mindig csak a felső tud tovább osztódni, ezt tekintjük a rakétának. A következő űrmisszió során egy olyan rakétát fognak kipróbálni, amely maximum n-szer tud kettérobbanni. Egy nagyon okos ember elárulta a tudósoknak, hogy a rakéta még így sem tud kijutni az űrbe, és rá végig g nagyságú gravitációs gyorsulás fog hatni, ezen kívül minden külső hatás elhanyagolható. Hogyan időzítsék a robbanásokat a tudósok annak érdekében, hogy

(a) a rakéta a lehető legtöbb ideig maradjon a levegőben?

(b) a rakéta a lehető legkevesebb ideig maradjon a levegőben?

A levegőben töltött idő mindkét esetben azt az időt jelenti, amely az első, indító robbantástól számítva eltelt addig a pillanatig, amikor a rakéta mind az n robbanás felhasználása után a földre érkezik. A biztonság érdekében a rakéta $\boldsymbol{v}$ sebessége minden időpillanatban függőleges irányú vagy $\boldsymbol{0}$), és a robbantásokat úgy kell időzíteni, hogy sose érje el a talajt lefelé mutató sebességgel, amennyiben még ketté tud robbanni. Továbbá, ha a rakéta 0 nagyságú sebességgel éri el a talajt, de még ketté tud robbanni, akkor rögtön ketté kell robbannia.
Megjegyzés: A rakéta csak úgy tud elindulni a talajról, hogy kettérobban. Ilyenkor, és az összes többi robbanás után is, az alsó rész viselkedését hagyjuk figyelmen kívül, az nem befolyásolja a repülést.

4. feladat (17 pont)

Bernoulli egy nap felettébb érdekes jelenségre lett figyelmes, így aznap megfeledkezve szeretett egyenlőségeiről és egyenlőtlenségeiről, inkább ennek tanulmányozására fordította idejét. Azt vette észre, hogy ha megpöccint egy feldőlt borosüveg nyakában könnyen mozgó, légmentesen záró dugót, az periodikus mozgást végez. Ezt nyomban meg is írta Düréliának, aki szintén kipróbálta a kísérletet saját bolygóján, a Düránuszon. A Düránusz légköre annak ellenére, hogy tisztán kétatomos gázból áll, mégis nagyban eltér a földitől, hiszen köztudottan ideális hővezető. Ugyanezzel a tulajdonsággal bír a düránuszi borosüvegek fala, ez biztosítja a tökéletes hőmérsékletű bort Düránusz szerte. Mikor Bernoulli és Dürélia összehasonlította a két bolygón tapasztalható rezgések frekvenciáit meglepődve tapasztalták, hogy azok különböznek. Adjuk meg a két rezgés frekvenciájának arányát!
Útmutatás: A megoldás során szükség esetén felhasználhatjuk az alábbi közelítést:
$(1+x)^n \approx 1+nx$, amennyiben $|x| \ll 1$.

5. feladat (24 pont)

Egy mindentől végtelen távol lévő vékony, szigetelő körlapra koncentrikusan ráragasztunk egy r sugarú, I nagyságú árammal átjárt körvezetőt, valamint egy $R \gg r$ sugarú egyenletes töltéseloszlással rendelkező, Q össztöltésű szigetelő körgyűrűt. Határozzuk meg az I nagyságú áram megszakítása után a rendszer szögsebességét, ha a tehetetlenségi nyomatéka Θ.
Megjegyzés: A feladat megoldása során a sugárzási effektusokat tekintsük elhanyagolhatónak, azaz használjunk kvázistacionárius közelítést.

Használható segédeszközök: író- és rajzolóeszközök, számológép, függvénytáblázat.
A feladatok megoldására 180 perc áll a csapatok rendelkezésére.
Sikeres versenyzést kívánnak:

a szervezők