XVIII.
Dürer Verseny
Helyi forduló (2024. 11. 22.)
Megoldókulcs

F+ kategória

1. feladat

(a)

Tamás gondolatmenete nem volt helyes, hiszen v nagyságától függetlenül szemből mindenképpen

$$E_2 = sA_2\varrho \tag{1.1}$$

esőt kap. A fejére esett eső mennyisége viszont függ v-től:

$$E_1 = tv_1A_1\varrho = \frac{s}{v}v_1A_1\varrho. \tag{1.2}$$

Látható, hogy minél nagyobb v, annál kisebb E_1, tehát **minél gyorsabban fut Tamás**, összességében **annál kevesebb esőt kap**.

(b)

Ebben az esetben az előbb elmondott gondolat halmozottan igaz. Jelölje $\boldsymbol{v_1}$ vízszintes komponensét $\boldsymbol{v_x}$, ekkor a szemből kapott eső mennyisége:

$$E_2 = (v + v_x)tA_2\varrho = \left(1 + \frac{v_x}{v}\right)sA_2\varrho, \tag{1.3}$$

tehát ez is csökken v növelésével. Ha $\boldsymbol{v_y}$ jelöli $\boldsymbol{v_1}$ függőleges komponensét, akkor a felülről kapott eső mennyisége az előzőhöz hasonlóan:

$$E_1 = \frac{s}{v}v_yA_1\varrho. \tag{1.4}$$

Tehát itt is igaz, hogy **minél gyorsabban fut Tamás, annál kevesebb eső esik rá** összesen.

(c)

Jelölje továbbra is $\boldsymbol{v_1}$ két komponensét $\boldsymbol{v_x}$ és $\boldsymbol{v_y}$. Két esetet különböztetünk meg egymástól: amikor $v \le v_x$, és amikor $v > v_x$. Az első esetben a felülről kapott eső mennyiségét (1.4) írja le, tehát v-vel fordítottan arányos. Szemből itt nem esik eső Tamásra, viszont hátulról igen, kivéve, ha $v = v_x$, hiszen ekkor éppen „együtt fut” az esővel. Mivel kezdeti feltételezésünk alapján most $v \le v_x$, így a két korábbi megfigyelést egybevetve azt kapjuk, hogy $v = v_x$ az optimális sebesség az első esetben. Ebből viszont már következik, hogy a legjobb megoldásra mindenképpen $v \ge v_x$ igaz, így elég ezt az esetet részletesen vizsgálni. A felülről kapott esőt természetesen továbbra is (1.4) írja le. Azonban vegyük észre, hogy itt már Tamás „lefutja” az esőt, így szemből fog kapni

$$E_2 = (v - v_x)tA_2\varrho = \left(1 - \frac{v_x}{v}\right)sA_2\varrho \tag{1.5}$$

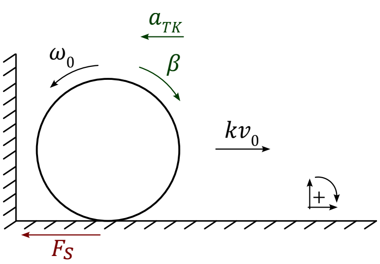
mennyiségű vizet. Ez a kifejezés annál nagyobb, minél nagyobb v (persze nem nőhet a végtelenségig). Így itt az összes kapott eső:

$$E_1 + E_2 = \frac{s}{v}v_yA_1\varrho + \left(1 - \frac{v_x}{v}\right)sA_2\varrho = \frac{1}{v}s\varrho(v_yA_1 - v_xA_2) + sA_2\varrho, \tag{1.6}$$

ezt a kifejezést kell minimalizálni. Az összeg második tagja nem függ v-től, így elég az első tagot minimalizálni. Ez viszonylag egyszerűen megtehető a következő három eset vizsgálatával. Amennyiben a zárójelben szereplő kifejezés pozitív, az első tag akkor minimális, ha $v \to \infty$. Ha a zárójelben szereplő kifejezés negatív, a minimum elérése érdekében az $1/v$ kifejezést kell maximalizálni. Ezt úgy tehetjük meg (a kiinduló feltételezést figyelembe véve), hogy $v = v_x$. Ha pedig a zárójelben szereplő kifejezés értéke 0, akkor Tamás sebessége nem számít (mindaddig, amíg legalább v_x-szel fut). **Tehát, ha $v_y A_1 > v_x A_2$, akkor $v \to \infty$; ha $v_y A_1 < v_x A_2$, akkor $v = v_x$; ha pedig $v_y A_1 = v_x A_2$, akkor bármilyen $v \geq v_x$ az optimális sebesség**.

2. feladat

A korong kezdetben tisztán gördül, ebből következik, hogy tömegközéppontja körül $\omega_0 = v_0/R$ szögsebességgel forog, miközben v_0 sebességgel halad a fal felé. Mivel a fal tökéletesen sima, így az ütközés során a korong szögsebessége változatlan marad, míg a tömegközéppont sebessége ellentétes irányú lesz, nagysága pedig az eredeti sebesség k-szorosa. Az előzőekből következik, hogy az ütközés után a korong „csúszva forog”, és a későbbi mozgás során a talaj által kifejtett súrlódási erő fogja ismét tiszta gördülésre kényszeríteni.



2.1. ábra. Korong az ütközés utáni pillanatban.

A 2.1. ábra jelöléseit használva írjuk fel a korong mozgásegyenleteit a fallal való ütközést követően!
A dinamika alapegyenlete vízszintes irányban:

$$F_\mathrm{S} = ma_\mathrm{TK}, \tag{2.1}$$

továbbá a forgómozgás alapegyenlete:

$$F_\mathrm{S} R = \Theta\beta = \frac{1}{2} mR^2\beta. \tag{2.2}$$

Ezeket felhasználva a korong tömegközéppontjának gyorsulása és a szöggyorsulás a következő:

$$a_\mathrm{TK} = \frac{F_\mathrm{S}}{m}, \qquad \beta = \frac{2F_\mathrm{S}}{Rm}. \tag{2.3}$$

Innen a sebesség és szögsebesség időfüggése (az ábra koordináta-rendszerét használva):

$$v_{\mathrm{TK}}(t) = kv_0 - a_{\mathrm{TK}}t, \qquad \omega(t) = -\omega_0 + \beta t. \tag{2.4}$$

A korong tömegközéppontjának sebessége addig fog csökkenni, míg ismét tisztán nem gördül, hiszen a csúszási súrlódási erő eddig képes hatni a testre. Ezt követően a tapadási súrlódás fog működni, mely azonban munkát nem végez, így a sebesség nem változik tovább. A tiszta gördülés feltétele:

$$v_{\mathrm{TK}}(t) = R\omega(t), \tag{2.5}$$

ahonnan a (2.2) és (2.3) egyenleteket felhasználva a tiszta gördülésig eltelt idő az ütközést követően:

$$kv_0 - \frac{F_{\mathrm{S}}}{m}t_{\mathrm{tg}} = -R\omega_0 + \frac{2F_{\mathrm{S}}}{m}t_{\mathrm{tg}} = -v_0 + \frac{2F_{\mathrm{S}}}{m}t_{\mathrm{tg}} \implies t_{\mathrm{tg}} = (k+1)\frac{mv_0}{3F_{\mathrm{S}}}. \tag{2.6}$$

Ekkor a test sebessége a következő:

$$v_{\mathrm{TK}}(t_{\mathrm{tg}}) = v_1 = kv_0 - (k+1)\frac{v_0}{3} = \frac{2k-1}{3}v_0. \tag{2.7}$$

A fenti egyenletből látható, hogy amennyiben $k \geq 1/2$, akkor $v_1 \geq 0$, azaz a korong az ütközést követő tiszta gördüléses szakasz megkezdésekor továbbra is távolodik a faltól (vagy határesetben éppen megáll), így második ütközés nem következhet be.
Tehát második ütközés bekövetkezése csak akkor lehetséges, ha $k < 1/2$. Ekkor két esetet különböztethetünk meg:

1) Az első eset az, amikor a korong a tiszta gördülés állapotának elérése előtt ér vissza a falhoz. Ennek feltétele, hogy a kv_0 kezdősebességgel és a_{TK} gyorsulással mozgó korong falhoz való visszaérkezési t_0 ideje kisebb legyen, mint a fentiekben kiszámított t_{tg} idő:

$$t_0 = \frac{2kv_0}{a_{\mathrm{TK}}} = 2k\frac{mv_0}{F_{\mathrm{S}}} < t_{\mathrm{tg}} = (k+1)\frac{mv_0}{3F_{\mathrm{S}}}, \tag{2.8}$$

   melyből az adódik, hogy $k < 1/5$.

   Ebben az esetben a korong éppen kv_0 sebességgel fog a falnak ütközni (hiszen a két ütközés között a korong ugyanannyi ideig lassult, illetve gyorsult), vagyis a visszapattanás sebessége k^2v_0. A szögsebességet közvetlenül a második ütközés után a (2.4) egyenletből (2.3) és (2.8) felhasználásával kaphatjuk meg:

$$\omega(t_0) = -\omega_0 + \beta t_0 = -\omega_0 + 4k\omega_0 = (4k-1)\omega_0. \tag{2.9}$$

   Ebben az esetben a tiszta gördülés eléréséhez szükséges idő a második ütközést követően:

$$v_{\mathrm{TK}}(t'_{\mathrm{tg}}) = R\omega(t'_{\mathrm{tg}}), \tag{2.10}$$

részletezve, valamint felhasználva a tömegközéppontí sebesség és szögsebesség közötti összefüggést tiszta gördülés esetén:

$$k^2 v_0 - \frac{F_\mathrm{S}}{m} t'_\mathrm{tg} = (4k-1)v_0 + \frac{2F_\mathrm{S}}{m} t'_\mathrm{tg} \implies t'_\mathrm{tg} = (k^2 - 4k + 1)\,\frac{m v_0}{3F_\mathrm{S}}. \tag{2.11}$$

Ekkor a test sebessége:

$$v_\mathrm{TK}(t'_\mathrm{tg}) = v_2 = k^2 v_0 - (k^2 - 4k + 1)\frac{v_0}{3} = \frac{1}{3}(2k^2 + 4k - 1)v_0. \tag{2.12}$$

Amennyiben az így kapott sebesség pozitív, a harmadik ütközés nem következik be, hiszen a korong az ütközést követően mindvégig távolodni fog a faltól. A fenti kifejezés két tartományon pozitív:

$$k < \frac{-2-\sqrt{6}}{2} \approx -2,22, \tag{2.13}$$

vagy

$$k > \frac{-2+\sqrt{6}}{2} \approx 0,22. \tag{2.14}$$

A kapott két eredmény közül azonban egyik sem lehetséges, mivel az első fizikailag értelmetlen, a második feltétel pedig ellentmond a kiinduló feltevésnek, miszerint $k < 1/5 = 0,2$. Tehát ebben az esetben biztosan 2-nél több ütközés fog létrejönni.

2) A második eset ($1/5 \le k < 1/2$) az, amikor a korong a tiszta gördülés állapotában ér vissza a falhoz, ekkor a második ütközés előtti pillanatban sebességének nagysága:

$$|v_1| = \frac{1-2k}{3} v_0. \tag{2.15}$$

Miután a korong nekiütközik a falnak, ugyanaz történik, mint az első ütközés után, csak v_1 lesz a korong kezdeti sebessége v_0 helyett. Tehát a test harmadszor is ütközni fog a fallal, mégpedig

$$|v_2| = \left(\frac{1-2k}{3}\right)^2 v_0 \tag{2.16}$$

nagyságú sebességgel, így ebben az esetben sem következik be pontosan két ütközés. (Elméleti szinten k ezen tartományán végtelen sok ütközés történik.)

Összefoglalva tehát azt kaptuk, hogy **nem lehetséges olyan *k* értéket megadni, hogy pontosan 2 ütközés történjen**.

3. feladat

A feladat megoldásához elegendő a rakéta legfelső pontját vizsgálni. Ennek sebessége minden robbantásnál v_0-al nő, és folyamatosan gyorsul lefelé g-vel. Az egyszerűség kedvéért vezessünk be pár jelölést! Legyen T az az időpont (az indítástól számítva), amikor a rakéta legfelső darabja is leesik a talajra; t_i az az időpont, amikor az i-edik robbantás történik; $v(t)$ a rakéta pillanatnyi sebessége a t időpontban; és $v_{\max}(t)$ az a maximum sebesség, ami a t időpontban elérhető az összes megmaradt robbantás felhasználásával.

(a)

Ha a rakéta mozgása során egy tetszőleges időpontban megnöveljük v_0-al a sebességét, akkor utána minden pillanatban v_0-al lesz nagyobb a sebessége, ahhoz képest, mint ha nem növeltük volna meg. Ennek oka, hogy a rakétát csak a gravitáció lassítja konstans g-vel. Ez alapján felírhatjuk a rakéta legfelső darabjának (mely az utolsó robbanás után a rakétát alkotja) elmozdulását az idő függvényében:

$$r(t) = \sum_{i=1}^{n}(t - t_i)v_0 - g/2t^2, \tag{3.1}$$

ahol a második tag a gravitációból eredő elmozdulás. Látható, hogy ha t_i-t megváltoztatjuk, például kicseréljük t_i'-re (ahol $t_i' < t_i$) akkor az elmozdulás $r'(t) - r(t) = v_0(t_i - t_i')$-vel fog nőni, tehát ha egy robbanást hamarabb használunk el, akkor utána minden pillanatban magasabban lesz a rakéta. Ezek alapján ahhoz, hogy a rakéta bármilyen $t > 0$ pillanatban a lehető legmagasabban legyen, a lehető legkorábban kell az összes robbantást elhasználni, azaz a $t = 0$ időpontban. Ha kipróbálunk bármilyen más robbantási sorozatot, ami egy T' pillanatban ér földet, akkor a korábban említett stratégiával a T' pillanatban magasabban, azaz még a levegőben kell lennünk, így nem eshettünk le. Tehát valóban akkor tud a legtovább levegőben maradni a rakéta, ha **minden robbanás a $t = 0$ pillanatban történik**.

(b)

Vegyük észre, hogy amennyiben elhasználtuk az összes robbantást, akkor $v(t) = v_{\max}(t)$. Továbbá, amikor a rakéta földet ér, akkor már nem marad robbantása, tehát $v_{\max}(T) = v(T) \leq 0$. Mivel $v_{\max}(t)$ nem függ a korábbi robbantások időzítésétől, megadható t függvényében:

$$v_{\max}(t) = nv_0 - gt. \tag{3.2}$$

Ebből kaphatunk egy alsó becslést T-re:

$$nv_0 - gT \leq 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{nv_0}{g} \leq T. \tag{3.4}$$

Tehát legalább ennyi ideig fog a levegőben maradni a rakéta. Egyenlőség pontosan akkor lesz, ha éppen **0** sebességgel érkezik a talajra. Most belátjuk, hogy ez mindig elérhető. Ha n páros, akkor először robbantsunk egyet, ekkor $\boldsymbol{v_0}$ lesz a rakéta sebessége. Ezután megvárjuk, hogy $-\boldsymbol{v_0}$ sebességgel visszaérjen a talajra, és pont mielőtt elérné azt, robbantunk kettőt. Így újra $\boldsymbol{v_0}$ sebességgel fog felfelé repülni. Ezt addig ismételgethetjük, amíg csak 1 robbantásunk marad. Amikor ez bekövetkezik, a földetérés pillanatában használjuk el az utolsót, így éppen 0 sebességgel száll le a rakéta. Ha $n > 1$ páratlan ($n = 1$ esetén nincs értelme a feladatnak), akkor először ismét robbantunk egyet, ezzel $\boldsymbol{v_0}$ lesz a sebesség. Ezután megvárjuk, hogy $-\boldsymbol{v_0}/2$ legyen a rakéta sebessége, és ismét robbantunk egyet, így $\boldsymbol{v_0}/2$-re növeljük azt. Amikor $-\boldsymbol{v_0}$ lesz a rakéta sebessége, akkor (a szimmetria miatt) pont a földfelszínen lesz. Így ha ebben a pillanatban robbantunk egyet, akkor 0 nagyságú sebességgel fog a talaj szintjén tartózkodni úgy, hogy már csak páros számú robbantása van hátra. Ha ez 0, akkor készen vagyunk, ha pedig nem, akkor ezzel a konstrukcióval visszavezettük az előző esetre a problémát.

4. feladat

Tekintsük először a földi környezetet! Mivel a megpöccintés előtt a dugó egyensúlyban van, és a palack helyzete vízszintes, a bezárt levegő kezdeti nyomása megegyezik a külső légnyomással, ezt jelölje p_0.

Térítsük ki a dugót egy kicsiny Δx-el a palack belseje felé. Mivel gyors folyamatról van szó, valamint az üveg rossz hővezető, így az állapotváltozás adiabatikusnak tekinthető. Ekkor a gáz új belső nyomása a Poisson-egyenlet alapján:

$$pV^\kappa = \text{const.} \implies p'_\text{g} = \frac{p_0 V_0^\kappa}{(V_0 - \Delta x A)^\kappa} = p_0 \left(\frac{V_0}{V_0 - \Delta x A}\right)^\kappa = p_0 \left(1 - \frac{\Delta x A}{V_0}\right)^{-\kappa}, \tag{4.1}$$

melyre alkalmazhatjuk a megadott közelítést, mivel $\Delta x A / V_0 \ll 1$:

$$p'_\text{g} \approx p_0 \left(1 + \kappa \frac{\Delta x A}{V_0}\right). \tag{4.2}$$

Felírva a dugóra ható erők eredőjét a kitérített helyzetben (Δx irányát pozitívnak választva):

$$\sum F = p_0 A - p'_\text{g} A = -\frac{\kappa A^2}{V_0} \Delta x, \tag{4.3}$$

mely láthatóan Δx-el arányos, illetve azzal ellentétes irányba mutat. Ez pedig éppen a harmonikus rezgőmozgás dinamikai feltétele. Innen a rezgés frekvenciája:

$$f_\text{F} = \sqrt{\frac{\kappa A^2}{m V_0}}. \tag{4.4}$$

A Düránusz esetén a megoldás elve az előzővel teljesen analóg, azzal a különbséggel, hogy ezen a bolygón minden ideális hővezető, így a palackba zárt gáz állapotváltozása izotermnek tekinthető. Tehát a nyomásokra ebben az esetben a Boyle–Mariotte-törvény írható fel:

$$pV = \text{const.}, \tag{4.5}$$

mely tulajdonképpen tekinthető a Poisson-egyenlet egy speciális esetének, ahol $\kappa = 1$. Az előző megfontolások alapján a Düránuszon tapasztalható rezgés frekvenciája:

$$f_\mathrm{D} = \sqrt{\frac{A^2}{mV_0}}. \tag{4.6}$$

Ezek alapján a két rezgés frekvenciájának aránya (felhasználva, hogy mindkét bolygón a légkört alkotó gáz kétatomosnak tekinthető):

$$\boxed{\frac{f_\mathrm{F}}{f_\mathrm{D}} = \sqrt{\kappa} = \sqrt{\frac{7}{5}} \approx 1{,}18}. \tag{4.7}$$

5. feladat

Elektrodinamikai ismereteinket figyelmen kívül hagyva érvelhetnénk a következő módon: „Kezdetben a rendszer perdülete zérus, így a folyamat végén is zérus kell legyen, hiszen nem hatnak külső erők, így külső forgatónyomatékok sem.” Ezen érvelés azonban nyilvánvalóan hibás, hiszen az elektromágneses mező rendelkezik impulzussal és perdülettel (gondoljunk például a fényre). Tehát a fizikailag helyes gondolatmenet a következő: „Mivel az elrendezésre nem hatnak külső erők, így forgatónyomatékok sem, vagyis meghatározva a rendszer (korong és elektromágneses mező) összperdületét a kiinduló állapotban és végállapotban, megkapjuk a feladat megoldását.” A megjegyzés alapján a megoldás során kvázi-stacionárius közelítést alkalmazhatunk, azaz a sugárzási effektusokat elhanyagoljuk. Ez jelen esetben lényegében azt jelenti, hogy az áramok által keltett mágneses mező azonnal kiépül a rendszer tartományában (azaz $R \ll Tc$, ahol T általánosan az áramerősség időbeli változására jellemző karakterisztikus idő, c pedig a határsebesség).

Ebben a megközelítésben a folyamat teljes dinamikáját nyomon tudjuk követni. Elsőként határozzuk meg a változó mágneses mező által indukált elektromos mező erősségét a töltött gyűrű helyén. Ehhez írjuk fel a Faraday-törvényt:

$$2R\pi E = -\dot{\Phi} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \implies -\Delta\Phi = 2R\pi E\Delta t. \tag{5.1}$$

Ezen időben változó elektromos mező a Maxwell-egyenletek alapján mágneses mezőt indukálna, azonban felhasználva a kvázi-stacionárius közelítést ezt, és a magasabb rendű tagokat elhanyagolhatjuk. Írjuk fel a gyűrűre Newton II. törvényét:

$$\Theta\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = FR \implies \Theta\Delta\omega = FR\Delta t = QER\Delta t. \tag{5.2}$$

Behelyettesítve a Faraday-törvényből kapott eredményünket, kifejezhetjük a szögsebesség változását a fluxusváltozással:

$$\Theta\Delta\omega = QER\Delta t = -Q\frac{\Delta\Phi}{2\pi}. \tag{5.3}$$

Az áram megszakításával a fluxus 0-ra csökken, így a továbbiakban a külső, Q töltésű gyűrű által közbezárt fluxust kell meghatároznunk. Elvégezve a Δt szerinti összegzést (a negatív előjel eltűnik, mivel a Φ zérusra csökken, így $\Delta\Phi$ negatív):

$$\Theta\omega_{\text{végső}} = Q\frac{\Phi_{\text{kezdeti}}}{2\pi}. \tag{5.4}$$

A kezdeti fluxust több módszerrel is meghatározhatjuk. Egy lehetőség, ha felhasználjuk a mágneses tér forrásmentességét. Ekkor integráljuk a mágneses fluxust egy megfelelő zsákfelületen, melynek pereme az R sugarú, Q töltésű gyűrű. Ezt a nyitott zsákot zárjuk be „kívülről” egy másik zsákfelülettel, mely egy λR sugarú félgömbből, és a gyűrű síkjában lévő azon pontokból áll, melyek ezen félgömb pereme és az R sugarú töltött körgyűrű közé esnek. Ekkor, mivel a mágneses mező forrásmentes, és az elektromágneses mező „eltűnik” a végtelenben, a $\lambda \to \infty$ határesetben arra jutunk, hogy a bezárt fluxus nagysága megegyezik az R sugarú körön kívül eső fluxus nagyságával, mely áthalad a gyűrű síkján.
Ennél elegánsabb megoldást kapunk, ha felhasználjuk a kölcsönös indukciós együtthatók szimmetriáját. Ez azt jelenti, hogy amennyiben van két tetszőleges, zárt áramvezető hurkunk, és az 1-es számú Φ fluxust ölel körbe, miközben csak a 2-es számúban folyik I nagyságú áram; akkor a kölcsönös indukciós együtthatók szimmetriája miatt, ha az csak az 1-es számú vezetőben folyna I nagyságú áram, akkor a 2-es vezető által körbezárt fluxus szintén Φ lesz. Formálisan megfogalmazva:

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + L_{12} I_2, \tag{5.5}$$

$$\Phi_2 = L_2 I_2 + L_{21} I_1, \tag{5.6}$$

$$L_{21} = L_{12}. \tag{5.7}$$

Az előző gondolatmenetet felhasználva a mágneses dipól terének integrálása helyett elegendő az egy nagy körvezető által keltett mágneses mező erősségét meghatározni a kör középpontjában. Ez a Biot–Savart-törvény felhasználásával egyszerűen adódik (felhasználva, hogy a kör középpontjának közelében, ahol az $r \ll R$ sugarú körvezetőnk van, a mágneses mező erőssége állandónak tekinthető, így elegendő a középpontban lévő értékét meghatározni):

$$\boldsymbol{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\boldsymbol{dl} \times \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} \implies dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{R^2} \implies B = \frac{\mu_0 I}{2R}\,. \tag{5.8}$$

Ebből a keresett fluxus:

$$\Phi_{\text{kezdeti}} = \frac{r^2\pi\mu_0 I}{2R}, \tag{5.9}$$

behelyettesítve az (5.4) egyenletbe és rendezve, a kérdezett szögsebesség:

$$\boxed{\omega_{\text{végső}} = Q\frac{r^2\mu I}{4R\Theta}}\,. \tag{5.10}$$