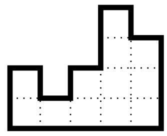
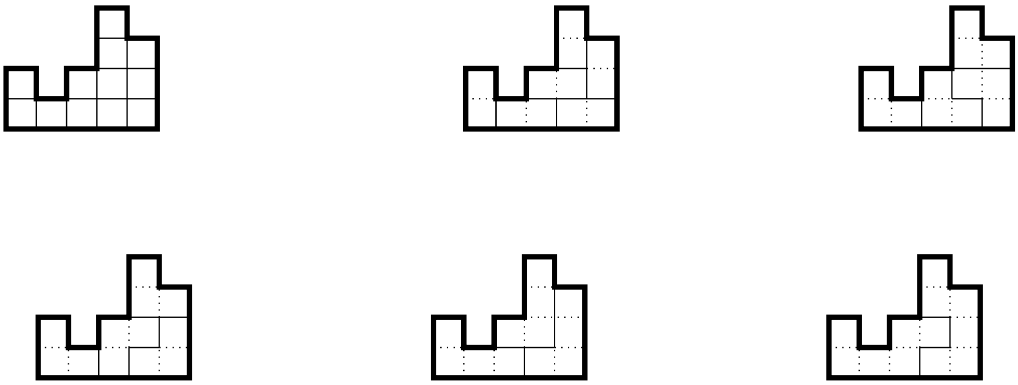
XVIII.
Dürer Verseny
Helyi forduló (2024. 11. 22.)
Megoldókulcs
C kategória

C1. Bontsátok fel a jobb oldali alakzatot a rácsvonalak mentén legalább két darab egybevágó sokszögre! Adjatok meg a Válaszlapon minél több felbontási lehetőséget!



Nagy Kartal feladata

Megoldás:



Az alakzat területe 12 egység. Mivel a rácsvonalak mentén vágjuk részekre, ezért a részek területe egész szám. Tehát minden, a feladat feltételeinek megfelelő sokszög területe osztója 12-nek. Mivel legalább 2 egybevágó sokszögre kell bontanunk, a sokszög területe legfeljebb az alakzat területének fele, azaz 6 lehet. Így a sokszög területe 1, 2, 3, 4 vagy 6 lehet.

Megmutatjuk, hogy a fenti ábrákon szereplő konstrukciókon kívül más megoldás nem lehetséges. Jelölje P a bal szélső oszlop legfelső négyzetét. Ha ezt egy legfeljebb 4 területű sokszöggel szeretnénk lefedni, annak az alakja egyértelmű. Ezt kihasználva a megmaradó alakzatot csak az ábrán látható módokon bonthatjuk fel.

Ebből látszik az is, hogy amikor két 6 területű sokszögre bontjuk az alakzatot, akkor az egyiknek tartalmaznia kell a 4 területű P-t fedő L-alakú sokszöget, amivel az 5. megoldásban fedjük az alakzatot.

Így már csak azt kell megnéznünk, hogy az L-alakú sokszöget melyik két négyzettel egészítsük ki, hogy egy 6 területű szöget kapjunk. A megoldásként mutatott sokszögön kívül minden 6 területű P-t tartalmazó sokszög tartalmazza a legalsó sor 4. négyzetét, így van benne egy 4×1 méretű téglalap, viszont ha ezt a vízszintes téglalapot kiszedjük az alakzatból, akkor a maradékban nem lesz sem 4×1 -es, sem 1×4 -es téglalap, így tehát nem osztható fel ilyen sokszögekre. Ezzel beláttuk, hogy csak a mutatott 6 módon lehet egybevágó sokszögekkel egybevágó sokszögekre osztani az alakzatot rácsvonalak mentén.

C2. Zsuzsi az alábbi ábrán lévő számjegyeket kiegészítette egy 11 jegyű számmá úgy, hogy a vonalakra írt még néhány számjegyet. A kapott számban bármely két szomszédos számjegyre igaz, hogy

- az egyik számjegy a másik kétszerese, vagy
- a két számjegy 1-gyel tér el egymástól.

Mi a lehető legnagyobb szám, amit Zsuzsi kaphatott? Adjatok meg a Válaszlapon egy minél nagyobb eredményt!
Zsuzsi nem feltétlenül írt minden vonalra számjegyet. Például kaphatta a 43678424563 *számot, ahogyan ezt a Válaszlapon lévő ábra is mutatja, de ez nem a legnagyobb lehetőség.*

______ 6 ______ 7 ______ 2 ______ 6 ______

Matekest feladat

Megoldás: Rövid válasz: A lehető legnagyobb szám a 98767843236. Belátjuk, hogy ennél nem kaphatott nagyobb számot Zsuzsi.

Az a cél, hogy a szám minél nagyobb legyen, ezért Zsuzsi azt szeretné, hogy kilencessel kezdődjön. Ekkor feltehetjük, hogy eredetileg öt megadott szám van: 9, 6, 7, 2, 6.

Vizsgáljuk meg, mit írhatott Zsuzsi a vonalakra, most azokat a megoldásokat nézve, amelyek a lehető legkevesebb, vagy ennél eggyel több jegyet tartalmaznak.

- 9 és 6 között: vagy két számjegyet ír be, 9876, vagy hármat, 98456, vagy legalább 4 számjegyet tud Zsuzsi ide írni.
- 6 és 7 között: hagyhatja üresen, rakhat 2 számjegyet (pl. 6767), de pontosan 1 számjegyet nem tud rakni.
- 7 és 2 között: legalább két jegyet be kell szúrnia. Lehet 7842, 78432, vagy lehet, hogy legalább 4 jegyet szúr be, vagy hogy 6 következik a 7 után. Az utóbbi opciónál mindig jobban megéri, ha ugyanannyi jegyet ír ide, de 8 követi a 7-et.
- 2 és 6 között: lehet 236 vagy 2456 ha legfeljebb két számjegyet rak ide.
- 6 után: hagyhatja üresen, vagy rakhat akármennyi számjegyet.

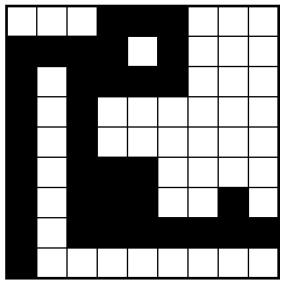
Összesen 11 jegyű a szám, 5 számjegy már meg van adva (a 9-essel együtt), így 6 szabadon felhasználható számjegy maradt. Mivel 9 és 6 között szüksége van legalább kettő, 7 és 2 között is legalább kettő, 2 és 6 között pedig legalább egy számjegyre, ezért a 6 és 7 közötti vonalat biztosan üresen kell hagynia. Még egy számjegy maradt, amit a vonalra írhatott.

Lehetséges opciók:

- Az utolsó 6 után kerül a plusz számjegy: 987**67**84**2**3**6**7,
- A 7 és 2 közé kerül egy harmadik jegy: 987**67**843**2**3**6**,
- A 2 és 6 közé kerül egy második jegy: 987**67**84**2**45**6**,
- A 9 és 6 közé kerül egy harmadik jegy: 9845**67**84**2**3**6**.

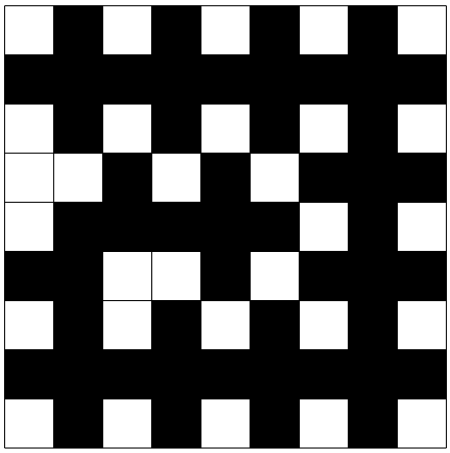
Ezeket a lehetőségeket összehasonlítva a legnagyobb szám a 98767843236.

C3. Egy rizsföld 9×9 mezőre van felosztva. Árasszunk el néhány mezőt vízzel úgy, hogy az elárasztott területek egy tavat alkossanak. Akkor nevezzük a vizes mezők összességét tónak, ha bármelyikről bármelyikre eljuthatunk oldalszomszédos vizes mezőkön át. Egy elárasztott mezőt holtágnak nevezünk, ha csak az egyik oldalszomszédja van elárasztva. Hogyan árasszuk el a rizsföldet, hogy a lehető legtöbb holtágat kapjuk? A Válaszlapon satírozzátok be azokat a mezőket, melyeket elárasztanátok!
Az ábrán látható példában három holtág található.



Hegedűs Dani feladata

Megoldás: Az alábbi ábrán látható egy konstrukció 26-ra:



Nem fogjuk precízen bebizonyítani, hogy ennél több nem lehetséges, ugyanis ezt belátni nagyon nehéz. Egy intuitív indoklás olvasható az alábbiakban.

Vizsgáljuk meg először a feladatot abban az esetben, ha nem 9×9-es a rizsföld, hanem $3 \times n$-es, ahol $n \geq 3$ egy egész szám. Ebben az esetben az optimális konstrukcióban holtág nem lehet olyan mező, ami nem ér a rizsföld széléhez, hiszen ekkor valamelyik felét nem áraszthatnánk el a rizsföldnek. (Ez amiatt van, hogy a holtágnak csak egy elárasztott szomszédja van.) Ekkor tehát ebben az esetben az optimális konstrukció olyan, hogy a rizsföld belsejében minden a tó része és róla lógnak le holtágak. Ebből látható, hogy n akár páratlan, akár páros, legfeljebb $n+1$ holtág érhető el.

Ekkor térjünk vissza a feladatbeli 9×9-es esetre. Vegyük észre, hogy a rizsföld bal oldali három oszlopában tehát legfeljebb 10 holtág lehet. Hasonlóan a középső három oszlopban és a jobb oldali három oszlopban is, vagyis megkaptuk, hogy az egész rizsföldön legfeljebb 30 holtág lehetséges. Megjegyzendő, hogy már ez a bizonyítás sem volt teljesen precíz. Hiszen azt használtuk, hogy ha a 3×9-en összefüggő az elárasztás, akkor lehet legfeljebb 10 holtág. Itt viszont a 9×9-es esetben nem tehetjük fel, hogy csak a 3×9-es részeket nézve, a tó összefüggő. (Sőt, az lehetséges is, hogy a 9×9 rizsföldön összefüggő az árasztás, de a baloldali és a jobb oldali három oszlopban is 12 holtág van.)

Ettől függetlenül az intuíció a $3 \times n$-es téglalap vizsgálatára nem rossz. Keressük meg azt a két elárasztott mezőt, amik a lehető legmesszebb vannak egymástól olyan értelemben, hogy elárasztott mezőkön át el tudunk jutni az egyikből a másikba, de az ehhez szükséges érintett mezők száma maximális! Vizsgáljuk az utat, amin át eljutunk az egyik mezőről a másikra és nézzük meg, hogy melyik mezők csúcsszomszédosak az utunkkal. Vegyük észre, hogy ez éppen egy $3 \times n$-es téglalap, csak felcsavarva. (Ez olyan mintha az utunk során kitennénk két oldalra a kezünket és azt nézzük, melyik mezőkbe lógunk át az út során.) Érezhető, hogy nem szerencsés, ha az utunk során nem tudunk mindkét oldalra holtágakat tenni, így szeretnénk hogy a felcsavaráskor legalább 3 mező távolságra legyenek a részek. Ez pedig épp a fenti konstrukciót adja 26 holtággal.

C4. Egy szövegszerkesztő programban kezdetben egy lábnyom jel szerepel, amit szeretnénk megsokszorozni. Sajnos hekkertámadás áldozata lett a gépünk, és csak két funkció működik: a Másolás és a Beillesztés, ráadásul mindkettő 1 Dürer dollárba kerül használatonként. A Másolás funkció használatakor kijelölhetünk egy vagy több egymás utáni jelet a meglévők közül, és a gép megjegyzi azok darabszámát. A Beillesztés funkció használatakor annyi új lábnyom jelet tesz hozzá a gép a jelsorozathoz, amennyit a legutóbbi Másolásnál kijelöltünk. Ha még nem Másoltunk, akkor nem használhatjuk a Beillesztést. Legkevesebb hány Dürer dollárt kell fizetnünk, ha:

a) a célunk pontosan 77 lábnyom jelet kapni?

b) a célunk pontosan 100 lábnyom jelet kapni?

Mindkét résznél a Válaszlapon adjatok meg egy minél kevesebb Dürer dollárba kerülő lépéssorozatot! Minden oszlopba egy lépést írjatok. Oszloponként írjátok le a használt funkció kezdőbetűjét, majd hogy hány jelet jelöltök ki (Másolásnál) vagy illesztetek be (Beillesztésnél), majd pedig azt, hogy ezután hány jel lett összesen!

Az alábbi példában szereplő lépéssorozatban először a kezdeti egy jelet Másoljuk, majd háromszor Beillesztjük, ilyen módon négy jelet kapva. Majd a kapott négy jel közül hármat Másolunk és azt Beillesztjük, így végül hét jel lesz. Ez a lépéssorozat 6 lépésből áll, így 6 Dürer dollárt kellene fizetnünk érte.

Funkció	M	B	B	B	M	B
Kijelölt/beillesztett jelek	1	1	1	1	3	3
Összes jelek	1	2	3	4	4	7

Szűcs Gábor feladata

Megoldás: a) Ha 77 lábnyom jelet szeretnénk, ez 12 Dürer dollárból elérhető

Funkció	M	B	B	M	B	B	M	B	B	M	B	B
Kijelölt/beillesztett jelek	1	1	1	3	3	3	9	9	9	25	25	25
Összes jelek	1	2	3	3	6	9	9	18	27	27	52	77

b) Ha 100 lábnyom jelet szeretnénk, ez 13 Dürer dollárból elérhető

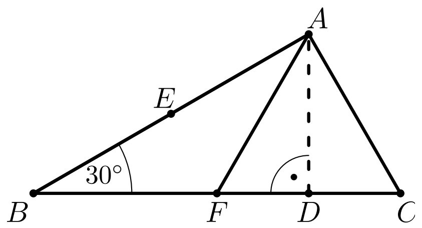
Funkció	M	B	B	B	M	B	B	M	B	B	M	B	B
Kijelölt/beillesztett jelek	1	1	1	1	4	4	4	12	12	12	32	32	32
Összes jelek	1	2	3	4	4	8	12	12	24	36	36	68	100

A bizonyítást, hogy kevesebb lépésben nem megoldható, később közöljük.

C5. Az ABC háromszögnek a B-nél lévő belső szöge $30°$. Az A csúcsból induló magasság talppontja legyen D. A D pontnak az A csúcsból induló súlyvonalra vett tükörképe legyen E. Tegyük fel, hogy E az AB szakasz belsejébe esik. Bizonyítsátok be, hogy az ABC háromszög derékszögű!

Halasi Gergő feladata

Megoldás:



Nevezzük el az ABC háromszögnek, az A csúcsából induló súlyvonal BC oldallal vett metszéspontját F-nek, ami egyben BC oldalfelező pontja, így $BF = CF$. Tudjuk, hogy $BDA\sphericalangle = 90°$, mert D az A-ból induló magasság talppontja. Továbbá $BAD\sphericalangle = 60°$, mert ismerjük az ABD háromszög másik két belső szögét. Mivel a D pontot tengelyesen tükröztük AF-re, és $BAD\sphericalangle = DAF\sphericalangle + BAF\sphericalangle$, ezért a tengelyes tükrözés tulajdonságai miatt $DAF\sphericalangle = BAF\sphericalangle = 60°/2 = 30°$. Vegyük az ABF háromszöget, ami egyenlő szárú, mivel $BAF\sphericalangle = ABF\sphericalangle = 30°$. Ebből következik, hogy $AF = BF = CF$.

$DFA\sphericalangle = 60°$, mert ismerjük az ADF háromszög másik két belső szögét. Mivel $AF = CF$, ezért az ACF háromszög egyenlő szárú, így az alapon fekvő szögei megegyeznek. Tehát $CAF\sphericalangle = ACF\sphericalangle = (180° - 60°)/2 = 60°$. Ebből következik, hogy $CAB\sphericalangle = CAF\sphericalangle + BAF\sphericalangle = 60° + 30° = 90°$. Ezzel beláttuk, hogy az ABC háromszög derékszögű.

Másik megoldás (Thalész-tétellel): Fent beláttuk, hogy $AF = BF = CF$. Mivel F pont az ABC háromszög mindhárom csúcsától egyenlő távolságra van, F pont az ABC háromszög köré írható körének a középpontja. Így a Thalész-tétel megfordítása miatt az ABC háromszög A csúcsánál derékszög van.

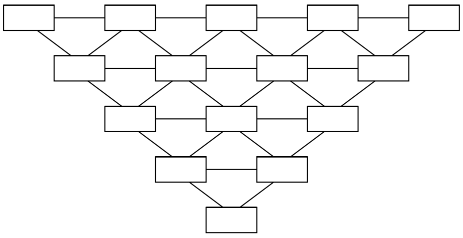
C6. Egy kriminalisztikai laborban rendelkezésünkre áll egy kétkarú mérleg, valamint nyolc, a tömegükkel címkézett mérősúly, melyek tömege $1, 2, \ldots, 8$ kg. Egy nyomozás során találtak egy aranytömböt, amely tömege megegyezik az egyik mérősúlyéval. Egy mérés során a kétkarú mérleg segítségével az aranytömböt összehasonlíthatjuk az egyik mérősúllyal. Egy ilyen mérés költsége a használt mérősúly tömegével egyenlő Dürer dollár. Legkevesebb hány Dürer dollárból határozható meg biztosan az aranytömb tömege? Adjatok meg olyan méréseket, melyekkel ennyi Dürer dollárból meghatározható, és indokoljátok is, hogy kevesebből miért nem lehet!
Például ha az aranytömböt a 2 kg-os súllyal hasonlítjuk össze, akkor ennek a mérésnek a költsége 2 Dürer dollár. A mérések függhetnek a korábbi mérések eredményeitől.

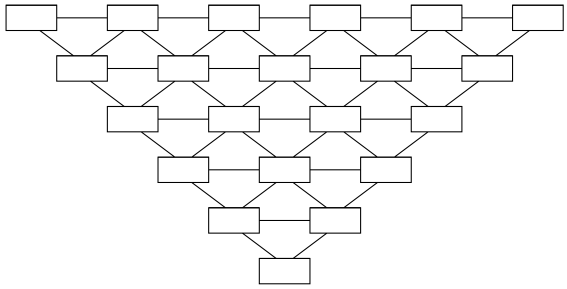
2023-as Alkotótábor kombi workshop

Megoldás: Legyen az első mérésünk az, hogy az 5 kg-os merősúllyal hasonlítjuk össze az aranytömb tömegét. Ha ennél nagyobb az arany tömege, akkor a 7 kg-os súllyal össszehasonlítva megállapíthatjuk az értékét. Ha kisebb mint 5 kg, akkor a 3 kg-os, majd az 1 kg-os súllyal való összehasonlítással tudjuk meghatározni. Ez összességében legfeljebb 12 dollárba kerül.

Belátjuk, hogy ennél olcsóbban nem lehet. Ha az első mérés során a 6 kg-ossal hasonlítjuk össze az aranytömböt, és az jön ki, hogy a tömb a nehezebb, akkor még össze kell hasonlítani vagy a 7 kg-ossal vagy a 8 kg-ossal, hogy meg tudjuk mondani a tömegét, de ez már legalább 13-ba kerül. Ha legalább 7 kg-os súllyal kezdünk, és azt kapjuk válasznak, hogy könnyebb az arany, akkor ha 5 vagy 6 kg-os az arany, ahhoz hogy el tudjuk dönteni melyik, az egyikkel össze kell hasonlítani, ami miatt ebben az esetben is kell legalább 12 dollár. Ha pedig az első mérés során a 4 kg-ossal vagy könnyebb súllyal hasonlítanánk össze, akkor ahhoz, hogy meg tudjuk különböztetni egymástól azt a két esetet, hogy az arany 5 kg-os vagy 6 kg-os, illetve azt a kettőt, hogy 7 kg-os vagy 8 kg-os, össze kell hasonltani a súlyt a számpárok egyikével, ezért legalább két mérés kell, melyek összesen legalább $5 + 7$-be kerülnek, így összesen legalább $1 + 5 + 7 = 13$-ba. Ezzel kész vagyunk a bizonyítással.

C7. a) Van egy olyan 15 elemű dominókészletünk, ahol az összes dominó mindkét felén az $1, 2, 3, 4, 5$ számok valamelyike szerepel. Nincs két olyan dominó, melyeken ugyanazok a számok találhatók. Le tudjuk-e helyezni a dominókat a bal oldali ábrán látható téglalapokra úgy, hogy bármely két szomszédos téglalapon lévő dominónak az egyik száma megegyezzen?
b) Mi a helyzet, ha a jobb oldali ábrára szeretnénk ugyanígy lehelyezni egy 21 elemű készletet, melyben a dominókon az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számok szerepelhetnek, és továbbra sincs két olyan dominó, melyeken ugyanazok a számok találhatók?
Az ábrákon azok a téglalapok szomszédosak, melyeket szakasz köt össze.

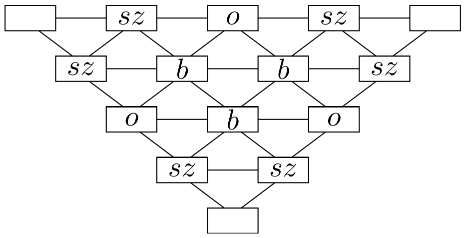




Nagy Kartal és Takács Tamás feladata

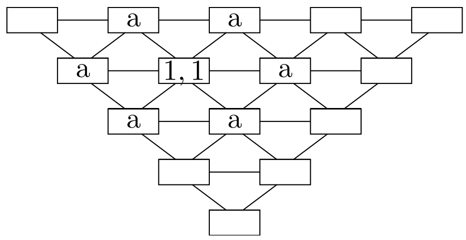
Megoldás: a) Nevezzük duplának azokat a dominókat, amiken két egyforma szám van. Ezekből 5 van, ezért bármilyen lerakásban lesz olyan dupla, ami nem a háromszög egyik sarkába kerül. Tegyük fel, hogy ez a dupla az $(1, 1)$ dominó. Ezt a dominót háromféle helyre tehetjük le:

- egy *belső* mezőre
- egy *oldalfelező* mezőre
- egy *szélső* mezőre.

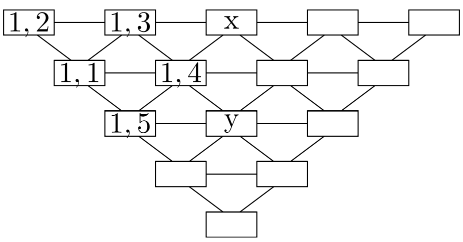


A következő ábrán b-vel jelölt mezők a *belső* mezők, az o-val jelöltek az *oldalfelező* mezők, az sz-szel jelöltek a *szélső* mezők.

Először nézzük meg azt az esetet, amikor az $(1, 1)$ egy *belső* mezőre kerül. Ekkor 6 mező lesz szomszédos vele (az ábrán a-val jelölve), viszont ezek mindegyikén kell lennie egy 1-esnek. Ilyen dominóból viszont csak 4 maradt, így nem kaphatunk szabályos kirakást.

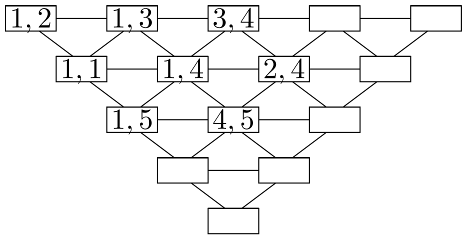


Következőnek nézzük azt az esetet, amikor az $(1, 1)$ egy *szélső* mezőben van. Ekkor ő 4 másik téglalappal szomszédos, így az $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)$ dominók ezekbe a téglalapokba kerülnek.



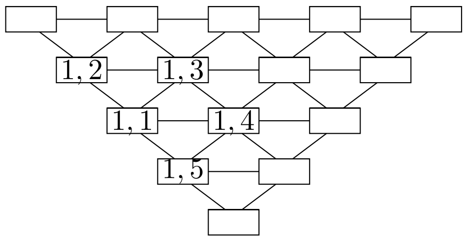
Az ábrán x-el jelölt mezőbe, csak olyan dominó kerülhet amin van 4, hiszen szomszédos $(1, 4)$-gyel és elhasználtunk minden olyan dominót, amin szerepel 1. Hasonlóan x szomszédos $(1, 3)$-mal, ezért az ide kerülő dominón szerepel 3, így az x helyére csak a $(3, 4)$ kerülhet. Ugyanezzel a gondolatmenettel azt kapjuk, hogy y helyére csak $(4, 5)$ kerülhet.

Nézzük meg azt az üres téglalapot, ami szomszédos x-szel és y-nal is. Az ide kerülő dominón is lennie kell 4-nek, hiszen szomszédos $(1, 4)$-el. Ez a dominó nem lehet a $(4, 4)$, hiszen az előző esetben láttuk, hogy dupla nem kerülhet középre, így csak a $(2, 4)$ kerülhet ebbe a téglalapba, így az alábbi ábrát kapjuk:

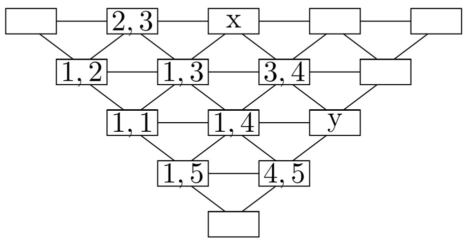


Az egyetlen 4-et tartalmazó dominó, amit még nem raktunk le a $(4, 4)$, ezt viszont már nem is tudjuk szabályosan lerakni, hiszen minden szabad téglalapnak van még ki nem töltött szomszédja, amibe így már nem kerülhet 4-et tartalmazó dominó. Ezzel beláttuk, hogy ha kezdetben egy duplát egy *szélső* mezőre teszünk, akkor nem kaphatunk szabályos lerakást.

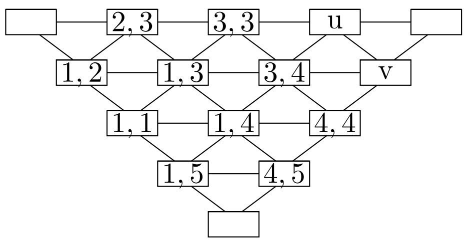
Az utolsó lehetséges eset az, ha az $(1, 1)$ egy *oldalfelező* mezőn van. Ekkor a szomszédait az előző esethez hasonlóan berajzolva a következő ábrát kapjuk:



Az előző esethez hasonlóan itt is néhány helyre egyértelműen meg van határozva, hogy mi kerülhet. Kezdjük el a lerakást, úgy, hogy minden lépésben olyan dominót rakunk le, ami máshová nem kerülhet. Így eljutunk a következő ábrához:



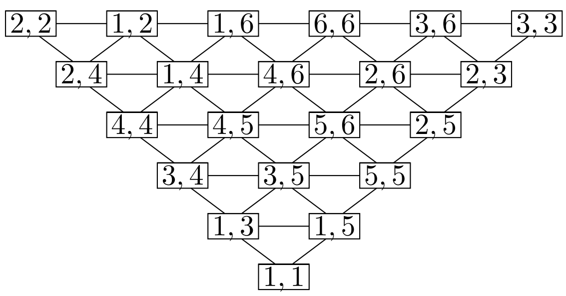
Az x dominó szomszédos $(1, 3)$-mal, így ide csak $(3, 3)$ vagy $(3, 5)$ kerülhet. Ha x helyére $(3, 5)$ kerülne, akkor a $(3, 3)$-at már egyik szabad mezőre sem tudnánk letenni, így x helyére muszáj $(3, 3)$-at tennünk. Hasonlóan y helyére a $(4, 4)$-et kell tennünk.



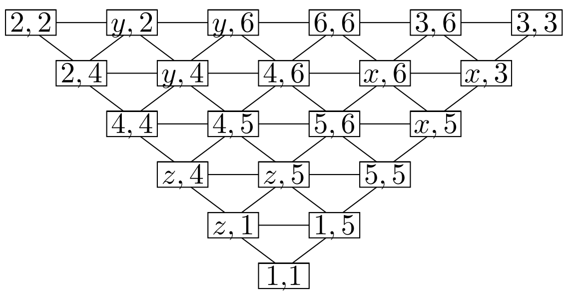
Látható, hogy u helyére mindenképp $(3, 5)$-nek kell kerülnie, v helyére pedig $(2, 4)$-nek, hiszen a még rendelkezésre állók közül egy másik dominó sem passzolna a szomszédaikhoz. Vegyük észre, hogy ez már nem egy szabályos lerakás, hiszen $(3, 5)$ és $(2, 4)$ szomszédos, de nincs olyan szám, ami mindkettőn szerepel, így ebben az esetben sem létezik szabályos lerakás.

Ezzel beláttuk hogy egyik esetben sem létezik szabályos lerakás, tehát nem lehet a feladat kérésének megfelelően lerakni a dominókat.

b) Mutatunk egy lerakást, amiben bármely két szomszédos dominónak az egyik száma megegyezik. Egy helyes lerakás:



Hogyan konstruálhatunk meg egy jó lerakást? Az a) feladatrészből az az intuitív megfigyelés adódhat, hogy a duplák helyzetére érdemes fókuszálni és ezeket előnyös minél távolabb tenni egymástól. Ez persze nem biztos, hogy igaz minden helyes konstrukcióra, de a mi esetünkben egy jó kiindulást ad. A duplákat rakjuk le a konstrukcióban szereplő helyükre, és írjuk be az $(1,5),(2,4),(3,6)$, dominókat az egyértelműen meghatározott helyükre. Emellett legyen $(x,3)$ a $(3,3)$ ismeretlen szomszédja, $(y,2)$ a $(2,2)$ ismeretlen szomszédja, $(z,1)$ pedig az $(1,1)$ ismeretlen szomszédja. Ekkor némi gondolkodás után a következő ábrát kapjuk:



Vegyük észre, hogy x csak 2 lehet, hiszen a változók csak az $\{1,2,3\}$ halmaz elemei lehetnek, és $x=3$ vagy $x=1$ esetén valamelyik dominó kétszer szerepelne, így $x=2$. Hasonlóan $y=1$ és $z=3$, ezzel pedig meg is kaptuk a teljes lerakást.