

# XVIII. Dürer Verseny

Helyi forduló (2024. 11. 22.)

Megoldókulcs



kategória

**E+1.** Az  $a_1, a_2, \dots$  és  $b_1, b_2, \dots$  pozitív egészekből álló végtelen sorozatokra teljesülnek az alábbi feltételek minden  $i \geq 1$  esetén:

- ha  $\text{luko}(a_i, b_i) > 1$ , akkor  $a_{i+1} = \frac{a_i}{\text{luko}(a_i, b_i)}$  és  $b_{i+1} = \frac{b_i}{\text{luko}(a_i, b_i)}$ ,
- ha pedig  $\text{luko}(a_i, b_i) = 1$ , akkor  $a_{i+1} = a_i + 1$  és  $b_{i+1} = b_i + 2$ .

Határozzátok meg az összes olyan  $(a_1, b_1)$  számpárt, melyre az  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots$  számpárokból álló végtelen sorozatban lesz olyan számpár, mely végtelen sokszor szerepel!

Az  $\text{luko}(p, q)$  a  $p$  és  $q$  számok legnagyobb közös osztóját jelöli.

Móricz Beni feladata

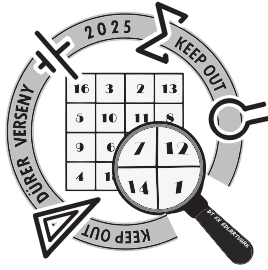
**Megoldás:** Legyen  $b_1 = 2a_1 + c_1$  alakú, ahol  $c_1$  egy egész szám. Továbbá minden  $i$ -re hasonlóan írjuk fel a  $b_i$  sorozat elemeit  $b_i = 2a_i + c_i$  alakban. Ha valamilyen  $j$ -re  $a_j$  és  $b_j$  relatív prímek, akkor a szabályok szerint  $a_{j+1} = a_j + 1$  és  $b_{j+1} = b_j + 2$ . Ha  $b_j = 2a_j + c_j$ , akkor  $b_{j+1} = b_j + 2 = 2a_j + c_j + 2 = 2(a_j + 1) + c_j = 2a_{j+1} + c_j$ . Így ezen lépések alkalmával  $c_{j+1} = c_j$ . Ha pedig valamilyen  $k$ -ra  $\text{luko}(a_k, b_k) > 1$ , akkor a sorozatok következő tagjait a legnagyobb közös osztójukkal való leosztással kapjuk. Ekkor  $b_k = 2a_k + c_k$  esetén  $a_{k+1} = \frac{a_k}{\text{luko}(a_k, b_k)}$  és  $b_{k+1} = \frac{b_k}{\text{luko}(a_k, b_k)}$ , így  $b_{k+1} = \frac{2a_k + c_k}{\text{luko}(a_k, b_k)} = 2a_{k+1} + \frac{c_k}{\text{luko}(a_k, b_k)}$ , azaz  $c_{k+1} = \frac{c_k}{\text{luko}(a_k, b_k)}$ . Mivel  $\text{luko}(a_k, b_k) > 1$ , ezért ezen lépés után  $0 < |c_{k+1}| < |c_k|$  (kivéve ha  $c_k = 0$ , mert akkor  $c_{k+1} = 0$ ), de tudjuk, hogy  $c_{k+1}$  továbbra is egész, mivel  $b_{k+1}$  és  $2a_{k+1}$  is az.

Ha  $c_1$  nem nulla, akkor csak véges sokszor tudjuk leosztani 1-nél nagyobb egész értékekkel, különben egy idő után már nem lenne egész a  $c_i$  sorozat értéke. Ekkor lesz egy utolsó leosztás, azaz egy utolsó lépés, ami előtt  $\text{luko}(a_i, b_i) > 1$  teljesült. Ezután már mindig  $\text{luko}(a_i, b_i) = 1$ , azaz innentől az  $a_{i+1} = a_i + 1$  és  $b_{i+1} = b_i + 2$  szabályok szerint folytatódnak a sorozatok. Ekkor nem lehet olyan számpár, ami végtelen sokszor szerepel, mivel véges hosszú rész után szigorúan monoton nőni fog mindkét sorozat. Ha pedig  $c_1 = 0$ , akkor  $b_1 = 2a_1$ , azaz vagy  $a_1 = 1$  és  $b_1 = 2$ , vagy  $a_2 = 1$  és  $b_2 = 2$ . Innentől az  $(1, 2)$  és  $(2, 4)$  számpárok ciklikusan fogják egymást követni, azaz végtelen sokszor szerepelnek majd a sorozatban. Tehát akkor és csak akkor lesz olyan számpár, amely végtelen sokszor szerepel, ha  $b_1 = 2a_1$ .

**2. Megoldás:** Vegyünk fel egy koordináta-rendszert és ennek  $x$  tengelye jelölje az  $a_i$  sorozat értékeit, míg az  $y$  tengely a  $b_i$  sorozat értékeit. Jelöljük be a koordináta-rendszerben minden  $i$  egészre a  $(a_i, b_i)$  pontot. Mivel a sorozatok elemei pozitív egészek, ezért minden bejelölt pont az első síknegyedbe esik. Vizsgáljuk a bejelölt pontok távolságát az  $y = 2x$  egyenestől. Ha valamilyen  $k$ -ra  $\text{luko}(a_k, b_k) > 1$ , akkor az origó és az  $(a_k, b_k)$  pont szakaszán van még rácspont, így a következő lépésben az ilyen rácspontok közül az origóhoz legközelebbit fogjuk kapni, hiszen ekkor  $(a_{k+1}, b_{k+1}) = \left(\frac{a_k}{\text{luko}(a_k, b_k)}, \frac{b_k}{\text{luko}(a_k, b_k)}\right)$ . Ha az  $(a_k, b_k)$  pont az  $y = 2x$  egyenesre esett, akkor  $(a_{k+1}, b_{k+1})$  is, ha viszont nem, akkor ez se fog ráesni az  $y = 2x$  egyenesre, viszont szigorúan közelebb kerültünk ehhez (a távolság legalább feleződött). Ha pedig valamilyen  $j$ -re  $\text{luko}(a_j, b_j) = 1$ , akkor  $(a_{j+1}, b_{j+1}) = (a_j + 1, b_j + 2)$ , így a következő pontot  $(a_j, b_j)$ -ből az  $(1, 2)$  vektorral lépve kapjuk meg. Ez a vektor párhuzamos az  $y = 2x$  egyenessel, így e során a távolság az egyenestől nem változik (ha eddig 0 volt, most is az marad).

Így ha az első pont nem az  $y = 2x$  egyenesre esik, akkor nem is kerülhetünk erre rá. Mivel az  $y = 2x$  egyenes racionális meredekségű, így létezik hozzá legközelebb eső rácspont. Így a távolságunk az egyenestől csak véges sokszor csökkenhetett (hiszen minden csökkenés során legalább feleződött ez), azaz egy idő után már csak ezzel az egyenessel párhuzamosan lépkedhetünk. Ebben az esetben tehát nem lesz olyan pont a síknegyedben, amelyet végtelen sokszor érintünk. Ha viszont az első pont ráesik az  $y = 2x$  egyenesre, akkor az előző megoldáshoz hasonlóan a második számpártól az  $(1, 2)$  és a  $(2, 4)$  fog felváltva ismétlődni, azaz lesz olyan számpár a sorozatban, ami végtelen sokszor szerepel. Ismét beláttuk, hogy akkor és csak akkor lesz olyan számpár, amely végtelen sokszor szerepel, ha  $b_1 = 2a_1$ .

*Megjegyzés:* 1 és 2 helyett tetszőleges  $c, d$  egészekkel is igaz marad az állítás, azaz akkor és csak akkor lesz végtelenszer előforduló számpár, ha  $b_1 = \frac{d}{c}a_1$ .



# XVIII. Dürer Verseny

Helyi forduló (2024. 11. 22.)

Megoldókulcs



kategória

**E+2.** Adott egy  $n$  pozitív egész és egy  $c > 1$  valós szám. A föld alatti Albrecht Bankot az imént kirabolták, az  $n$  rablók éppen most menekül el a helyszínről. A rablás előtt minden bűnöző elrejtett egy-egy robogót a felszínen különböző pontokban. A bankrablók épp most értek fel a felszínre, különböző kijáratokon keresztül. Azt figyelhetjük meg, hogy ha a bűnözők helyzeteit  $c$ -szeresére nagyítanánk a bank felszíni főbejáratából, akkor mindannyian éppen a saját robogójuknál lennének.

A bankrablók el szeretnének menekülni a robogókkal (nem feltétlenül a sajátjukkal), de mindegyik robogóra csak egy ember fér fel. A rendőrség úton van, ezért mindenkinek a legrövidebb úton kell elfutnia egy robogóhoz. Bizonyítsátok be, hogy a rablók összesen nem tehetnek meg kevesebb távolságot a robogókhoz futva, mint ha mindenki a saját robogóját választaná!

*A bank főbejáratát, a rablókat és a robogókat pontszerűnek tekintjük, a terep teljesen sík.*

*Kökényesi Márk feladata*

**Megoldás:** A megoldás során  $d(X, Y)$  jelöli az  $X$  és  $Y$  pontok távolságát a síkon. Először fogalmazzuk át a feladatot a matematika nyelvére. Adott  $n$  pont a síkon,  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , és legyen az  $A'_i$  az a pont  $1 \leq i \leq n$  esetén, amit úgy kapunk, hogy  $A_i$ -t az origóból  $c$ -szeresére nagyítjuk. Azt kell belátni, hogy ha valahogyan párosítjuk az  $A_1, A_2, \dots, A_n$  pontokat az  $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$  pontokkal, és nézzük a párba állított pontok távolságainak az összegét, akkor ez minimális, ha minden  $i$ -re  $A_i$  párja  $A'_i$ .

Gondoljuk meg először azt az esetet, amikor minden  $A_i$  pont rajta van egy  $O$ -ból induló  $\ell$  félegyenesen. Állítsuk valahogy párba a pontokat, legyen  $A_i$  az egyik pont, aminek a párja  $A'_j$ . Ekkor a háromszögegyenlőtlenség szerint  $d(O, A'_j) \leq d(O, A_i) + d(A_i, A'_j)$ , amit átrendezve  $d(A_i, A'_j) \geq d(O, A'_j) - d(O, A_i)$ . Ezeket az összes párra összeadva azt kapjuk, hogy a keresett mennyiség, azaz a párokban a távolságok összege, legalább

$$\sum_{i=1}^n d(O, A'_i) - \sum_{i=1}^n d(O, A_i).$$

Azonban figyeljük meg, hogy ha minden  $A_i$ -t a hozzá tartozó  $A'_i$ -vel állítjuk párba, akkor éppen ennyi lesz a távolságok összege, így tényleg ebben az esetben lesz minimális az összeg.

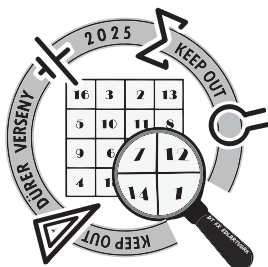
Most térjünk rá az általános esetre, amikor a pontok nem biztos, hogy egy félegyenesen vannak, és valahogy párba vannak állítva az  $A_1, A_2, \dots, A_n$  pontok az  $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$  pontokkal. Az ötlet az, hogy vezessük vissza az állítást arra az esetre, amikor a pontok egy félegyenesre esnek. Legyenek  $B_1, B_2, \dots, B_n$  olyan pontok, amik mind az  $O$ -ból induló  $\ell$  félegyenesre esnek, és  $d(O, B_i) = d(O, A_i)$  minden  $i$ -re. Legyenek továbbá a  $B'_1, B'_2, \dots, B'_n$  pontok rendre a  $B_1, B_2, \dots, B_n$  pontok  $c$ -szeresére nagyítottjai az  $O$ -ból. Azt fogjuk megmutatni, hogy ha az  $A_i$  pont párja  $A'_j$ , akkor  $d(B_i, B'_j) \leq d(A_i, A'_j)$ . Ez intuitívan azért van, mert az  $OB_iB'_j$  elfajuló háromszög, és az  $OA_iA'_j$  háromszög két oldalának hossza megegyezik, így a harmadik az elfajuló esetben lesz a legkisebb. Precízen

$$d(B_i, B'_j) = |d(O, B_i) - d(O, B'_j)| = |d(O, A_i) - d(O, A'_j)| \leq d(A_i, A'_j),$$

ahol az első egyenlőség amiatt van, mert  $O, B_i, B'_j$  egy egyenesre esnek, míg az utolsó az  $OA_iA'_j$  háromszögben felírt háromszög-egyenlőtlenség következménye.

Azt bizonyítottuk tehát, hogy ha az  $A_i$  pontok helyett a  $B_i$  pontokat nézzük, és ugyanazt a párbaállítást, akkor a  $B_i$  pontokhoz tartozó párokban a távolságok összege legfeljebb akkora lesz, mint az  $A_i$  pontoknál vett párok távolságainak összege. Az utolsó kulcs észrevétel pedig az, hogy ha minden  $i$ -re  $A_i$  és  $A'_i$  egymás párja, akkor itt egyenlőség áll fenn, azaz

$$\sum_{i=1}^n d(B_i, B'_i) = \sum_{i=1}^n d(A_i, A'_i).$$



# XVIII. Dürer Verseny

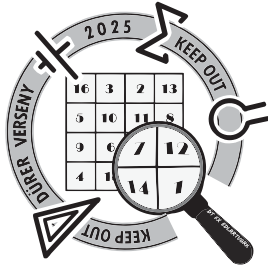
Helyi forduló (2024. 11. 22.)

Megoldókulcs



kategória

Ezt összerakva azzal, hogy a félegyenesen már megoldottuk a feladatot, azt kapjuk, hogy tetszőleges párosítás esetén az  $A_i$  és a párjaik távolságainak az összege legfeljebb akkora, mint az ugyanahhoz a párosításhoz tartozó  $B_i$  és párjaik összege. Ezt viszont alulról becsüli  $\sum_{i=1}^n d(B_i, B'_i)$ , ami pedig egyenlő a  $\sum_{i=1}^n d(A_i, A'_i)$  összeggel, és ez éppen az a távosságösszeg, amikor minden  $A_i$  az  $A'_i$ -vel van párosítva. Ezzel beláttuk a feladat állítását.



# XVIII. Dürer Verseny

Helyi forduló (2024. 11. 22.)

Megoldókulcs



kategória

**E+3.** Jelölje  $\mathbb{P}$  a valós együtthatós egyváltozós polinomok halmazát, ahol minden polinom változója  $x$ . Határozzátok meg az összes olyan  $F: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  függvényt, melyre tetszőleges  $p, q \in \mathbb{P}$  polinomok esetén

$$F(p+q) = F(p) + F(q) \quad \text{és} \quad F(p(q)) = (F(p))(q) \cdot F(q).$$

Itt  $p(q)$  azt a polinomot jelöli, melyet úgy kapunk, hogy a  $p$  polinom változójába behelyettesítjük a  $q$  polinomot. Hasonlóan,  $(F(p))(q)$  azt a polinomot jelöli, melyet úgy kapunk, hogy az  $F(p)$  polinom változójába behelyettesítjük a  $q$  polinomot.

Bán-Szabó Áron feladata

**Megoldás:** Belátjuk, hogy csak az  $F \equiv 0$  és az  $F(p) = p'$  függvények teljesítik a feladat feltételeit, ahol  $p'$  a  $p$  polinom deriváltját jelöli. Azaz, ha  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , akkor  $F(p) = p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$ .

Jelöljük minden  $p \in \mathbb{P}$  polinom fokát  $\deg(p)$ -vel. Jelölje  $\mathbf{I}(p, q)$  az  $F(p) + F(q) = F(p+q)$  feltételt, míg  $\mathbf{II}(p, q)$  az  $F(p(q)) = F(p)(q) \cdot F(q)$  feltételt.

Most legyen  $p(x) \equiv c$ , ahol  $c \in \mathbb{R}$ , és  $\deg(q) > 1$ . Tekintsük  $\mathbf{II}(p, q)$ -t. Ekkor  $p(q(x)) = c$ , vagyis  $F(p) = F(p)(q) \cdot F(q)$ . Belátjuk, hogy  $F(p)$  konstans. Tegyük fel indirekt módon, hogy  $\deg(F(p)) > 0$ . Ekkor  $\deg(F(p)(q)) > \deg(F(p))$ , így  $F(q) \equiv 0$ , hiszen  $\deg(F(p)) = \deg(F(p)(q) \cdot F(q)) = \deg(F(p)(q)) + \deg(F(q))$ . Emiatt  $F(p) = F(p)(q) \cdot 0 \equiv 0$ , tehát  $F(p)$  foka nem lehet pozitív, ami ellentmondás. Így  $F(p) \equiv c^*$  valamely  $c^* \in \mathbb{R}$ -re. Legyen most  $q$  tetszőleges polinom, akár konstans is. Ekkor  $\mathbf{II}(p, q)$  szerint  $c^* = F(p) = F(p)(q)F(q) = c^*F(q)$ , tehát  $c^* = 0$ , vagy  $F(q) \equiv 1$  minden  $q \in \mathbb{P}$ -re. Ha  $F(q) \equiv 1$  minden  $q \in \mathbb{P}$ -re, akkor  $q$ -t a konstans 0 polinomnak választva  $\mathbf{I}(q, q)$  szerint  $2 = F(q \equiv 0) + F(q \equiv 0) = F(q \equiv 0) = 1$ , ami ellentmondás. Azaz  $F(p) \equiv 0$ , ha  $p$  konstans.

Tekintsük most  $\mathbf{II}(p, q(x) = x)$ -t. Azt kapjuk, hogy  $F(p) = F(p) \cdot F(q)$ , így ha van olyan  $p$ , amire  $F(p) \neq 0$ , akkor  $F(q) \equiv 1$ ; különben  $F(q) \equiv 0$  minden  $q \in \mathbb{R}$ -re, ami könnyen ellenőrizhető, hogy valóban egy megoldás.

A továbbiakban tehát feltehetjük, hogy  $F(x) \equiv 1$ . Tekintsük most a  $\mathbf{II}(p(x) = ax, q(x) = \frac{1}{a}x)$  feltételt. Eszerint  $1 = F(x) = F(p(q)) = F(p)(q)F(q)$ , tehát  $F(q)$  konstans, és  $q$  tetszőleges lineáris polinom lehet, amelynek 0 a konstans tagja.

Legyen  $p(x) = ax$ ,  $q(x) = bx$ , és tekintsük az  $\mathbf{I}(p, q)$  és  $\mathbf{II}(p, q)$  állításokat.

$$F(p) + F(q) = F(p+q) = (a+b)x,$$

$$F(abx) = F(p(q)) = F(p) \cdot F(q),$$

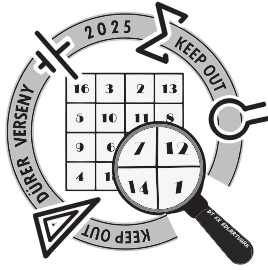
mert  $F(p)$  konstans. Most legyen  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olyan függvény, amelyre  $g(a) = F(p(x) = ax)(0)$ . Erre a fenti egyenletek alapján teljesül, hogy

$$g(a) + g(b) = g(a+b),$$

és

$$g(ab) = g(a)g(b),$$

mivel  $F(p)$  és  $F(q)$  konstans. Ismert, hogy egy ilyen függvény vagy  $g(a) = a$ , vagy  $g(a) = 0$  minden  $a$ -ra. Tehát  $F(p(x) = ax) \equiv a$ , vagy  $F(p(x) = ax) \equiv 0$ . Mivel azonban  $F(p(x) = x) = x$ , ezért  $F(p(x) = ax) \equiv a$ .



# XVIII. Dürer Verseny

Helyi forduló (2024. 11. 22.)

Megoldókulcs



kategória

Ekkor tetszőleges  $b \in \mathbb{R}$ -re

$$F(p(x) = ax + b) = F(p_1(x) = ax) + F(p_2(x) = b) = F(p_1(x) = ax) \equiv a.$$

Most vizsgáljuk  $F(p(x) = ax)$  és egy tetszőleges  $q(x)$  polinom kapcsolatát a  $\mathbf{II}(p, q)$ -ből. Az állítás szerint

$$F(aq) = aF(q).$$

Lássuk be a polinomok fokára vonatkozó teljes indukcióval, hogy  $F(p) = p'$ , ahol  $p'$  a  $p$  polinom deriváltja.

Ha  $\deg(p) < 2$ , akkor a fentiek szerint  $F(p) = p'$ . Az indukciós lépés: Tegyük fel, hogy ha  $\deg(p) \leq n-1$ , akkor  $F(p) = p'$ . Most igazolni fogjuk, hogy  $F(p) = p'$   $\deg(p) = n$ -re is. Legyen  $p(x) = x^n$ ,  $q(x) = x+1$ , és tekintsük a  $\mathbf{II}(p, q)$ -t. Eszerint

$$F((x+1)^n) = F(x^n)(x+1).$$

A binomiális tételt felhasználva  $(x+1)^n = x^n + nx^{n-1} + \dots + 1$ , tehát

$$F((x+1)^n) = F(x^n) + F((x+1)^n - x^n).$$

Mivel  $(x+1)^n - x^n$ -ben a legmagasabb fokú tag  $n$ -nél kisebb, az indukciós feltevés szerint

$$F((x+1)^n - x^n) = ((x+1)^n - x^n)' = n(x+1)^{n-1} - nx^{n-1}.$$

Ezért

$$F(x^n)(x+1) = F(x^n) + n(x+1)^{n-1} - nx^{n-1}.$$

Legyen  $p(x) = F(x^n) - nx^{n-1}$ . Ekkor

$$p(x+1) + n(x+1)^{n-1} = F(x^n)(x+1) = F(x^n) + n(x+1)^{n-1} - nx^{n-1}.$$

Így:

$$p(x+1) = p(x),$$

amiből következik, hogy  $p(x)$  periodikus függvény. Mivel  $p(x)$  polinom, csak konstans lehet, vagyis  $p(x) \equiv c$  valamely  $c \in \mathbb{R}$ -re. Ez azt jelenti, hogy

$$F(x^n) = nx^{n-1} + c.$$

Végül vizsgáljuk meg  $c$ -t! Legyen  $p(x) = x^n$ ,  $q_1(x) = ax$ , és  $q_2(x) = \sqrt[n]{ax}$ , ahol  $a \in \mathbb{R}$ . Tekintsük a  $\mathbf{II}(q_1, p)$  és  $\mathbf{II}(p, q_2)$ -t:

$$a(nx^{n-1} + c) = F(q_1(p)) = F(p(q_2)) = \left( n (\sqrt[n]{ax})^{n-1} + c \right) \cdot \sqrt[n]{a}.$$

Ebből

$$a(nx^{n-1} + c) = anx^{n-1} + c\sqrt[n]{a},$$

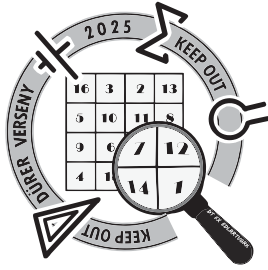
ami akkor teljesül, ha  $c = 0$ . Tehát

$$F(x^n) = nx^{n-1}.$$

Ezzel beláttuk, hogy ha  $\deg(p) = n$ , és  $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ , akkor

$$F(p) = \sum_{i=0}^n a_i F(x^i) = \sum_{i=0}^n a_i (ix^{i-1}) = p'(x).$$

Ezzel pedig kész lettünk.



# XVIII. Dürer Verseny

Helyi forduló (2024. 11. 22.)

Megoldókulcs



kategória

**E+4.** Adottak az  $n$  és  $k$  pozitív egész számok, melyekre  $n \geq k$ . Egy  $n \times n$ -es táblázat minden mezőjébe írtunk egy egész számot úgy, hogy minden sorba és oszlopba legfeljebb  $k$  különböző szám került. Legfeljebb hány különböző szám szerepelhet a táblázatban?

A választ  $n$  és  $k$  függvényében adjátok meg!

Beke Csongor feladata

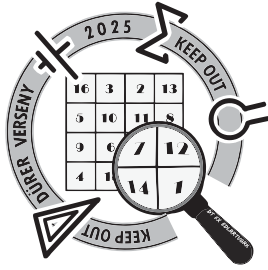
**Megoldás:** A válasz  $(k-1)n + \lfloor \frac{n}{n-k+1} \rfloor$ , ahol  $\lfloor x \rfloor$  az  $x$  valós szám egészrészét jelöli. Fogalmazzuk át a feladatot egy ekvivalens kérdésre! A  $K_{n,n}$  teljes páros gráf éleire számokat írtunk úgy, hogy minden csúcsból legfeljebb  $k$  féle számot tartalmazó él indul ki. Legfeljebb hány különböző számot írtunk az élekre?

Először mutatunk egy példát amikor be lehet írni ennyiféle számot. Jól ismert, hogy bármely  $\ell \leq m$  pozitív egész számokra létezik  $\ell$ -reguláris páros gráf amiben mindkét csúcshalmazban pontosan  $m$  csúcs szerepel. Legyen  $G_1 = K_{n-k+1, n-k+1}$  és  $G_2$  egy  $n-k+1$ -reguláris páros gráf  $m = n - \left( \lfloor \frac{n}{n-k+1} \rfloor - 1 \right) (n-k+1) \geq n-k+1$  csúccsal. Ekkor  $K_{n,n}$ -ben elhelyezhető  $\left( \lfloor \frac{n}{n-k+1} \rfloor - 1 \right)$  csúcsdiszjunkt másolata  $G_1$ -nek és még egy szintén csúcsdiszjunkt másolata  $G_2$ -nek. Ekkor  $K_{n,n}$  összes csúcsa pontosan az egyik ilyen gráfban szerepel. Mindegyik berajzolt gráfhoz válasszunk ki különböző számot és írjuk rá az összes élére, majd a  $K_{n,n}$  maradék élére mind különböző számokat helyezzünk el. Ekkor minden csúcsból pontosan  $k$  féle számot tartalmazó él indul ki, valamint  $(k-1)n + \lfloor \frac{n}{n-k+1} \rfloor$  féle számot használtunk.

Most belátjuk hogy mindig legfeljebb ennyi szám szerepelhet a táblázatban. Tegyük fel, hogy a maximális konstrukcióban van  $n(k-1) + a$  különböző szám a táblázatban, tudjuk a korábbi példa miatt, hogy  $a \geq 0$ . Ekkor nézzük végig felülről lefele, hogy hány új elem van abban az adott sorban, amit korábbi sorokban még nem láttunk. Skatulya-elv miatt, legalább  $a$  darab olyan sor lesz, ahol  $k$  új elemet találtunk, hiszen mindegyik sorban legfeljebb  $k$  elem lehet, válasszunk ki  $a$  darab ilyen sort és hívjuk ezeknek a soroknak a halmazát  $A$ -nak. Ekkor ha tekintjük  $A$ -t, akkor ezekben a sorokban összesen  $a \cdot k$  féle különböző szám szerepel, és ha bármelyik oszloppal elmetszük  $A$ -t, akkor pontosan  $a$  különböző számot látunk. Ezért minden oszlopban  $A$ -n kívül legfeljebb  $(k-a)$ -féle különböző szám szerepelhet. Ezért meg tudjuk kétféleképpen számolni, hogy hány féle szám van összesen az egész táblázatban. A fenti gondolatmenetben az  $A$  sorait nézve van  $a \cdot k$  különböző szám, valamint az  $n$  oszlop mind-egyikében legfeljebb  $k-a$  új szám, ez összesen legfeljebb  $a \cdot k + n(k-a)$  különböző szám. Viszont pontosan  $n(k-1) + a$  szám van, ezért felírható a következő egyenlőtlenség, amit tovább alakítunk.

$$\begin{aligned} a \cdot k + n(k-a) &\geq n \cdot (k-1) + a \\ n &\geq a \cdot (n-k+1) \\ \frac{n}{n-k+1} &\geq a \end{aligned}$$

Mivel  $a$  csak egész lehet, ezért beláttuk, hogy legfeljebb  $(k-1)n + \lfloor \frac{n}{n-k+1} \rfloor$  különböző szám lehet a táblázatban.



# XVIII. Dürer Verseny

Helyi forduló (2024. 11. 22.)

Megoldókulcs



kategória

**E+5.** A síkot hézagmentesen lefedtük egybevágó sokszögekkel úgy, hogy ha két sokszögnek van közös pontja, akkor az mindkettőnek a kerületén van. A fedésben minden sokszög belsejét fehérre, kerületét feketére színeztük. A sík kapott színezését jelöljük  $\mathcal{S}$ -sel, a fedésében használt sokszöget jelöljük  $\mathcal{P}$ -vel.

A síknak egy egybevágósági transzformációját nevezzük *kriminálisnak*, ha nem változtat  $\mathcal{S}$ -en, azaz a sík színezésén. Tudjuk, hogy léteznek olyan  $0^\circ < \alpha, \beta, \gamma < 360^\circ$  szögek és különböző  $X, Y, Z$  pontok, melyekre az  $XYZ$  háromszögnek van  $30^\circ$ -os belső szöge, továbbá az  $X$  középpontú  $\alpha$  szögű, az  $Y$  középpontú  $\beta$  szögű és a  $Z$  középpontú  $\gamma$  szögű forgatások mind kriminálisak.

a) Lehetséges-e, hogy  $\mathcal{S}$ -nek és  $\mathcal{P}$ -nek sincs sem tengelyes, sem középpontos szimmetriája?

b) Az összes lehetséges  $\mathcal{S}$  színezést figyelembe véve határozzátok meg  $\alpha + \beta + \gamma$  lehetséges értékeit!

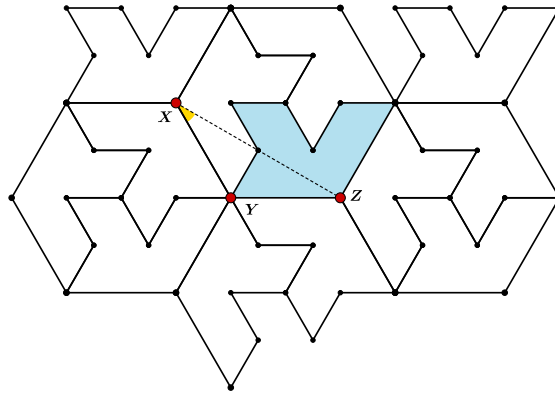
c) Mutassatok példát olyan  $\mathcal{S}$ -re, melyre létezik kriminális csúsztatva tükrözés, de nem létezik kriminális tengelyes tükrözés! Bizonyítsátok be, hogy minden ilyen példa esetén  $\alpha = \beta = \gamma$  teljesül!

*A csúsztatva tükrözés egy tengelyes tükrözés és egy eltolás egymásutánja, melyben az eltolási vektor és a tükrözési tengely párhuzamosak. A forgatások definíció szerint óramutató járásával ellentétes irányúak.*

*Bán-Szabó Áron feladata*

**Megoldás:** Először is vezessünk be jelöléseket:  $\rho_O^\phi$  jelölje az  $O$  középpontú  $\phi$  szögű forgatást,  $\tau_{\mathbf{v}}$  jelölje a  $\mathbf{v}$  vektorral való eltolást, illetve  $\sigma_e$  és  $\sigma_E$  jelölje rendre az  $e$  egyenesre és az  $E$  pontra való tükrözést. Az  $O$  pontot  $\phi$ -középpontnak hívjuk, ha  $\rho_O^\phi$  kriminális. Rögtön észrevehetjük, hogy kriminális transzformációk kompozíciója is kriminális, sőt egy kriminális transzformációt egy másik kriminális transzformáció kriminálisba visz (például ha  $\rho_D^\delta$ ,  $\rho_E^\epsilon$  kriminálisak, akkor  $\rho_{\rho_D^\delta(E)}^\epsilon$  is az.) Továbbá  $\circ$ -el fogjuk jelölni transzformációk kompozícióját, és  $t_1 \circ t_2$  alatt azt értjük, hogy először  $t_2$ -t, aztán  $t_1$ -et végezzük el.

a) Lehetséges. Lásd az alábbi példát, melyben először a síkot lefedtük szabályos hatszögekkel, majd azokat egyesével felbontottuk három-három egybevágó, sehogyszem szimmetrikus sokszögre:



Természetesen egy szabályos hatszög három egymást követő csúcsa egy olyan háromszöget alkot, melynek két szöge is  $30^\circ$ , továbbá mindhárom csúcsa  $120^\circ$ -közép.

b) Néhány lemmára lesz szükségünk.

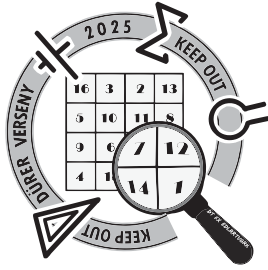
**1. Lemma.** Adott a síkon két különböző pont,  $D$  és  $E$ , illetve két szög,  $\delta$  és  $\epsilon$ . Legyen  $d = \rho_D^{-\delta/2}(DE)$  és  $e = \rho_E^{\epsilon/2}(DE)$ . Ekkor

• ha  $\delta + \epsilon \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ , akkor  $\rho_E^\epsilon \circ \rho_D^\delta = \rho_O^{\delta+\epsilon}$ , ahol  $O = d \cap e$ ;

• ha  $\delta + \epsilon \equiv 0 \pmod{2\pi}$ , azaz  $d \parallel e$ , akkor  $\rho_E^\epsilon \circ \rho_D^\delta = \tau^2$ , ahol  $\tau$  az az eltolás, ami  $d$ -t  $e$ -be viszi.

*Bizonyítás.* Felhasználva a forgatás felírását két tükrözés kompozíciójaként,

$$\rho_E^\epsilon \circ \rho_D^\delta = (\sigma_e \circ \sigma_{DE}) \circ (\sigma_{DE} \circ \sigma_f) = \sigma_e \circ \sigma_d.$$



# XVIII. Dürer Verseny

Helyi forduló (2024. 11. 22.)

Megoldókulcs



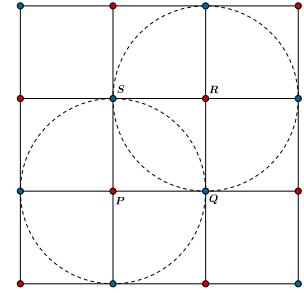
kategória

**2. Lemma.** Ha  $O$  egy  $\phi$ -közép, akkor  $\phi \in \{60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ\}$ .

*Bizonyítás.* Vegyük észre, hogy  $\rho_X^\alpha$  (vagy  $\rho_Y^\beta$  ha  $O = X$  teljesülne)  $O$ -t egy másik  $\phi$ -középbe viszi. Ha  $O'$  az egyik legközelebbi  $\phi$ -közép  $O$ -hoz (van ilyen, mert egy pont környezetében csak véges sok  $\phi$ -közép lehet, hiszen mindegyik sokszöget sokszögbe visz, így csúcsot is csúcsba), akkor az  $O$  pont  $O'$  körüli elforgatottja is  $\phi$ -közép lesz, ennek messzebb kell lennie  $O$ -tól, mint  $O'$ . Mivel nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van, ez azt jelenti, hogy  $60^\circ$ -nál kisebb szöget nem generálhat ki a  $\phi$  többszöröseinek sorozata modulo  $360^\circ$ , amiből az állítás adódik.

**3. Lemma.** Az  $\alpha, \beta, \gamma$  egyike sem  $90^\circ$  vagy  $270^\circ$ .

*Bizonyítás.* Mivel  $3 \cdot 270^\circ \equiv 90^\circ \pmod{360^\circ}$ , elég belátni, hogy nem létezik  $90^\circ$ -közép a síkon. Indirekten tegyük fel, hogy  $P$  egy  $90^\circ$ -közép. Ekkor nem létezik  $60^\circ$ - vagy  $120^\circ$ -közép, hiszen a kompozíciója olyan szögű kriminális forgatást eredményezne, melynek forgatási szöge ellentmondana a 2. Lemmának. Tehát a síkon minden közép  $90^\circ$ - vagy  $180^\circ$ -közép (akár mindkettő). Jelölje  $Q$  az egyik legközelebbi közepet  $P$ -hez. (Ilyen ismét azért létezik, mert bármely körben csak véges sok közép lehet.) Ha most  $Q$  egy  $90^\circ$ -közép lenne, akkor az 1. Lemma miatt a  $\rho_P^{90^\circ} \circ \rho_Q^{90^\circ}$  egy olyan kriminális  $180^\circ$ -os forgatást eredményezne, melynek középpontja rajta van a  $PQ$  átmérőjű körön, ellentmondva  $|PQ|$  minimalitásának. Tehát  $Q$  egy  $180^\circ$ -közép. Ezt elforgatva  $P$



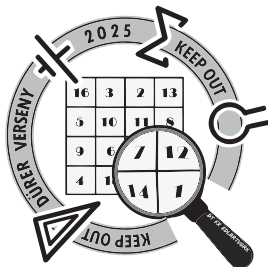
körül  $90^\circ$ -kal,  $180^\circ$ -kal és  $270^\circ$ -kal újabb  $180^\circ$ -közepet kapunk. Hasonlóan,  $P$ -t tükrözve a  $180^\circ$ -közepre újabb  $90^\circ$ -közepet kapunk. Könnyen látszik, hogy így egy négyzetrács rácspontjait kapjuk meg: minden pont  $180^\circ$ -közép, illetve ha sakktábla-szerűen színezzük ki a rácspontokat, akkor az egyik színű rácspontok még  $90^\circ$ -közepet is. Létezik-e más, a rácspontoktól különböző közép? Nem, ugyanis benne lenne valamelyik *egység* rácsnégyzetben (az ábrán  $PQRS$ ), de a négyzet  $90^\circ$ -közép csúcsaitól messzebb kell, hogy legyen, mint  $|PQ|$ , ami nem lehet, mert a  $90^\circ$ -közepet középpontú  $|PQ|$  sugarú körök lefedik a négyzetet. Most használjuk ki, hogy az  $XYZ$  rácsháromszögnek van  $30^\circ$ -os szöge. Ez azt jelenti, hogy két rácsegyenes bezárt szöge  $30^\circ$ , azaz ha a két rácsegyenes meredeksége rendre  $x$  és  $y$ , akkor

$$\tan(30^\circ) = \tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}.$$

Ez viszont nyilván nem lehet, mert  $\tan x$  és  $\tan y$  racionálisak (hiszen rácsegyenesek), míg  $\tan(30^\circ) = 1/\sqrt{3}$  irracionális.

Összefoglalva,  $\alpha, \beta, \gamma$  mind  $c \cdot 60^\circ$  alakú, ahol  $1 \leq c \leq 5$  egész. Ekkor  $\alpha + \beta + \gamma$  csak  $C \cdot 60^\circ$  alakú értékeket vehet fel, ahol  $3 \leq C \leq 15$  egész. Ezek mind lehetségesek, például ha szabályos háromszögekkel fedjük le a síkot, és az  $X, Y, Z$  pontokat egy  $30^\circ - 30^\circ - 120^\circ$  háromszög csúcsainak választjuk (és itt minden csúcs egy  $60^\circ$ -közép).





# XVIII. Dürer Verseny

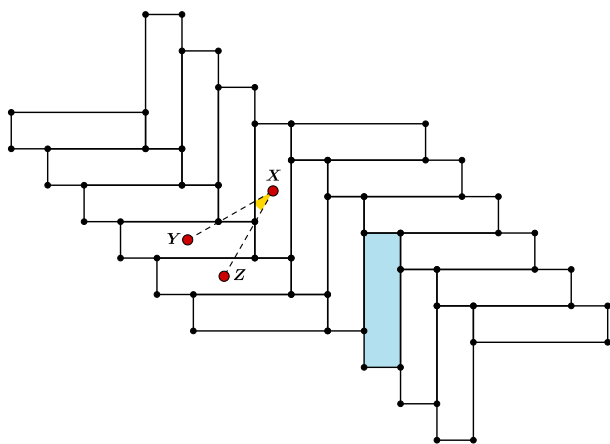
Helyi forduló (2024. 11. 22.)

Megoldókulcs



kategória

c) Kezdjük a példával.

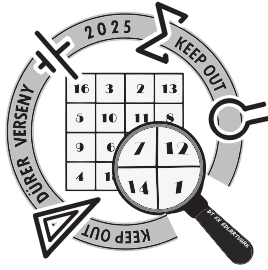


Itt  $X, Y, Z$  egy-egy téglalap középpontját jelöli. Világos, hogy ezek mind  $180^\circ$ -közepek, és a téglalapok oldalainak arányait megfelelően megválasztva elérhetjük, hogy  $X$ -nél  $30^\circ$  legyen.

Most lássuk be, hogy ilyenkor  $\alpha = \beta = \gamma = 180^\circ$ . A **3. Lemmának** köszönhetően csak két esetben kell belátni, hogy egy kriminális csúsztatva tükrözés létezéséből adódik kriminális tengelyes tükrözés létezése.

Első eset: létezik  $60^\circ$ -közép. Jelöljön  $P$  egy  $60^\circ$ -et és  $Q$  a hozzá legközelebbi közepet.  $Q$  nem lehet  $120^\circ$ -közép, különben a 1. Lemma miatt  $\rho_P^{60^\circ} \circ \rho_Q^{120^\circ}$  egy olyan  $180^\circ$ -os forgatás lenne, amelynek középpontja rajta lenne a  $PQ$  átmérőjű körön, ellentmondva  $|PQ|$  minimalitásának. Tehát  $Q$  egy  $180^\circ$ -közép. Most  $Q$ -t  $P$  körül  $60^\circ$ -kal,  $120^\circ$ -kal,  $\dots$ ,  $300^\circ$ -kal elforgatva más  $180^\circ$ -közepeket kapunk. Ha pedig a  $60^\circ$ -közepeket tükrözzük a  $180^\circ$ -közepekre, akkor újabb  $60^\circ$ -közepeket kapunk. Ezekkel a lépésekkel egy szabályos háromszögrácsot kapunk, melynek rácspontjai  $180^\circ$ -közepek, továbbá minden második rácspont  $60^\circ$ -közép is. Azt állítjuk, hogy az így keletkezett  $60^\circ$ -közepek háromszögrácsán kívül nem létezhet más  $60^\circ$ -közép. Ugyanis ha  $K$  ilyen lenne, akkor benne van valamelyik egység szabályos háromszögben, legyen ez mondjuk  $PRS$ . Ekkor  $K$  a háromszög középvonali háromszögében lesz benne (sőt még azon belül sem akárhol), mert a  $|PQ|$  távolság minimális, azaz nem lehet benne a  $P, R, S$  középpontú  $|PQ|$  sugarú körökben. Viszont ekkor  $Q$ -nak a  $K$ -körüli  $-60^\circ$ -os elforgatottja egy olyan  $Q'$  pont lesz, ami  $180^\circ$ -közép és közelebb lesz  $P$ -hez, mint  $Q$ , ami ellentmondás.

Így a  $60^\circ$ -közepek pont ez ennek a háromszögrácsnak a csúcsai. Vegyük észre, hogy  $\tau_{\vec{PR}}$  is kriminális, mert ez éppen  $\rho_Q^{180^\circ} \circ \rho_P^{180^\circ}$ . Hasonlóan  $\tau_{\vec{PS}}$  is az, így a szabályos háromszögrácsban bármely két pontot egymásba lehet vinni kriminális eltolással. De ha egy csúsztatva tükrözés kriminális, akkor ezt a rácsot önmagába viszi. Tegyük fel, hogy  $P$  képe  $P'$ . Ekkor  $\tau_{\vec{P'P}}$ -vel komponálva a csúsztatva tükrözést, egy irányításváltó kriminális egybevágóságot kapunk, melynek  $P$  fixpontja, azaz tengelyes tükrözés. Ezzel találtunk kriminális tengelyes tükrözést.



# XVIII. Dürer Verseny

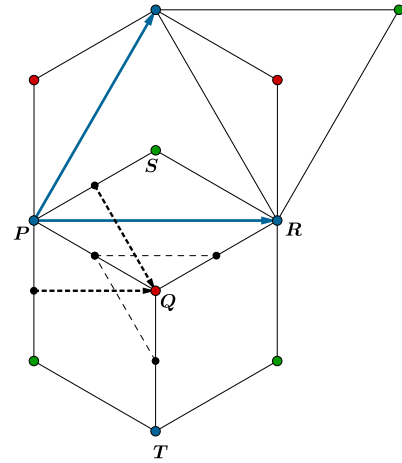
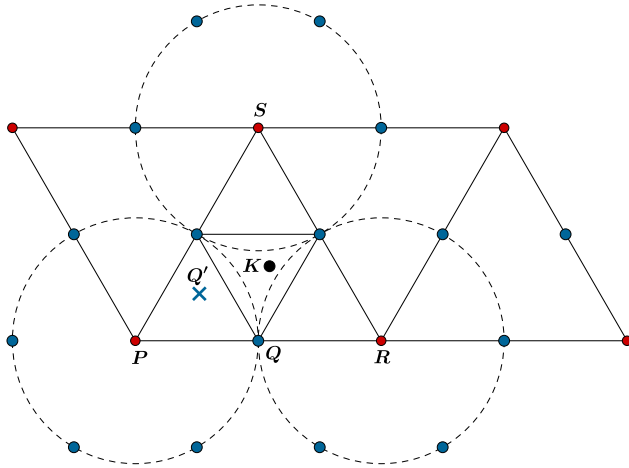
Helyi forduló (2024. 11. 22.)

Megoldókulcs



# E+

kategória



Második eset: nem létezik  $60^\circ$ -közép, de létezik  $120^\circ$ -közép. Most minden közép  $120^\circ$ -közép (mert  $180^\circ$ -közép eredményezne  $60^\circ$ -középet). Legyen  $P$  egy  $120^\circ$ -közép és jelölje  $Q$  a hozzá egyik legközelebbi középet. Most a  $120^\circ$ -os forgatások megint egy szabályos háromszögrácsot eredményeznek, melyeknek csúcsai a  $120^\circ$ -középek. Megint nem lehet más közép, hiszen benne lenne valamelyik kis egység háromszögben, ellentmondva a minimalitásnak. Most viszont nem lesz minden eltolás kriminális. Észrevehetjük, hogy  $\rho_P^{120^\circ} \circ \rho_Q^{-120^\circ}$  olyan eltolást eredményez, melynek eltolási vektora pont egy  $60^\circ - 120^\circ$  rombusz hosszabbik átlója. Tehát három olyan szabályos háromszögrács diszjunkt úniója, melyekben külön-külön az élek kriminális eltolási vektorok. Avagy mondhatnánk azt is, hogy felbontottuk a háromszögrácsot három olyan alrácusra, melyben azonos alrácson lévő pontokat egymásba tudjuk vinni kriminális eltolásokkal.

Mivel a csúsztatva tükrözés a teljes rácsot önmagába viszi (hiszen kriminális),  $P$ -t is valamelyik rácspontra viszi. Most ha  $PQRS$  egy minimális  $60^\circ - 120^\circ$  rombusz, akkor  $P - R$  egy alrácson van, míg  $Q, S$  egy-egy ettől és egymástól különböző alrácson van. Így megfelelő eltolással komponálva a csúsztatva tükrözést kapunk egy olyan csúsztatva tükrözést, ami  $P$ -t vagy önmagába, vagy  $Q$ -ba, vagy  $S$ -be viszi. Ha  $P$ -be viszi, akkor van egy fixpont, azaz találtunk egy tengelyes tükrözést. A másik két eset szimmetrikus (forgatással), azaz feltehetjük, hogy  $P$  képe  $Q$ . Használjuk ki, hogy egy csúsztatva tükrözést kétszer alkalmazva egy eltolást kapunk, melynek eltolási vektora kétszerese a csúsztatva tükrözés eltolási vektorának. Ezért  $Q$  biztosan olyan pontra fog menni, ami egy alrácson van  $P$ -vel. (Ehhez gondoljuk végig, hogy különböző alrácspontok közötti vektor nem adhat kriminális eltolást, hiszen akkor azt besorozva egy megfelelő forgatással új középet kapnánk.) Továbbá a távolságtartás miatt  $Q$  a körülötte lévő kis szabályos hatszög valamelyik csúcsába fog menni. Az előző gondolatmenet miatt ez az ábra jelöléseivel  $P, R$ , vagy  $T$ . Ha  $P$  lenne, akkor már a csúsztatva tükrözés eleve tengelyes tükrözés lenne, amivel kész lennénk. Ha viszont  $R$  vagy  $T$  lenne, akkor könnyen látszik, hogy a csúsztatva tükrözés tengelye rendre a  $PQR$  vagy a  $PQT$  háromszög  $Q$ -hoz tartozó középvonala lenne (hiszen egy csúsztatva tükrözés tengelye felezi egy pont és a képét összekötő szakaszt), amiből az következne mindkét esetben, hogy az eltolási vektor a  $Q$  alrácson egy-egy minimális vektor fele lenne, ami ellentmondás.