XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 01. 24-25.)

Kifejtős Megoldókulcs

A kategória

A1. Soroljátok fel az összes olyan hétjegyű számot, amelynek minden számjegye 1, 2 vagy 3, továbbá bármely három egymást követő számjegyét összeolvasva egy hárommal osztható háromjegyű számot kapunk.

A teljes pontszámhoz elég felsorolnotok a feltételeknek megfelelő számokat, azt nem kell megindokolnotok, hogy más lehetőség miért nincsen.

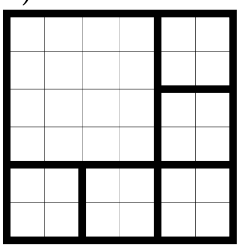
Megoldás: Egy természetes szám akkor osztható 3-mal, ha számjegyeinek összege osztható 3-mal. A 3-mal osztható, 1-es, 2-es és 3-as számjegyekből álló háromjegyű számoknak tehát 3 $(1+1+1)$, 6 $(1+2+3$ vagy $2+2+2)$ vagy 9 $(3+3+3)$ a jegyeinek összege. Ez tehát azt jelenti, hogy bármely három egymást követő számjegynek csupa azonosnak vagy csupa különbözőnek kell lennie. Az első két számjegy bármi lehet (tehát 9-féle), és ez már meghatározza a többit, így 9 szám van, ami feltételeknek megfelel:

- 1111111,
- 2222222,
- 3333333,
- 1231231,
- 1321321,
- 2132132,
- 2312312,
- 3123123,
- 3213213.

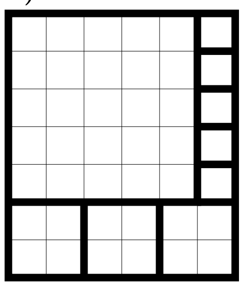
A2. **a)** Daraboljatok fel egy 6×6-os téglalapot 6 db egész oldalhosszúságú négyzetre.
b) Daraboljatok fel egy 6×7-es téglalapot 9 db egész oldalhosszúságú négyzetre.
c) Daraboljatok fel egy 7×7-es téglalapot 9 db egész oldalhosszúságú négyzetre.
A négyzetek részben sem fedhetik egymást, és a teljes téglalapot le kell fedniük.

Megoldás:

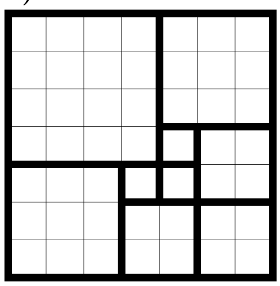
a)



b)



c)



A3. Négy bandita – Gergő, Beni, Máté és Áron – ülnek egy asztal körül ilyen sorrendben. Mindegyikük tesz egy megállapítást a legutóbbi bankrabláson szerzett aranyrudak számáról:

- Gergő: Annyi aranyrudat raboltam, mint a szomszédaim átlagosan.
- Beni: Annyi aranyrudat raboltam, mint a szomszédaim átlagosan.
- Máté: Annyi aranyrudat raboltam, mint a szomszédaim összesen.
- Áron: Négyen együtt 60 aranyrudat raboltunk.

Állapítsátok meg, hogy ki hány aranyrudat rabolhatott. Írjátok le a gondolatmenetetek lépéseit is.

Megoldás: Máté annyi aranyrudat rabolt, mint Beni és Áron összesen, Gergő pedig Beni és Áron átlagát, azaz a kettőjük által gyűjtött aranyrudak felét. Ezek alapján Máté kétszer annyi aranyrudat gyűjtött, mint Gergő.

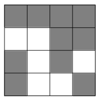
Beni Gergő és Máté átlagát gyűjtötte, amiből Máté aranyrudainak száma kétszerese Gergőének, így Beni szomszédai Gergő aranyrudainak számának háromszorosát gyűjtötték, így Beni a Gergő által gyűjtött aranyrudak másfélszeresét gyűjtötte.

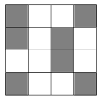
Mivel Gergő is annyit rabolt, mint a két szomszédja átlagosan, így Gergő szomszédjai a Gergő által gyűjtött aranyrudak kétszeresét gyűjtötték. Ebből Beni Gergő aranyrudainak másfélszeresét gyűjtötte, így Áron fele annyi aranyrudat rabolt, mint Gergő.

Így a négy gyerek által rabolt aranyrudak mindegyike kifejezhető Gergő aranyrudainak számával, Áron a felét, Beni a másfélszeresét, Máté a kétszeresét rabolta Gergőének, így 4-en összesen a Gergő által gyűjtött aranyrudak ötszörösét rabolták, vagyis Gergő $60/5 = 12$ aranyrudat gyűjtött.

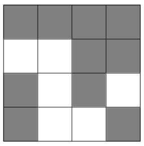
Innen kiszámolható, hogy Áron 6, Beni 18, Máté 24 aranyrudat rabolt, és ezekre az értékekre mind a 4 állítás igaz lesz.

A4. Egy rendőrségi kihallgatószobában 16 lámpa van 4×4-es elrendezésben. A szobában összesen 14 gomb található, minden gomb négy lámpával van összekötve. Minden sorhoz, minden oszlophoz, a két átlóhoz és a négy sarokban található 2×2-es területekhez is tartozik egy-egy gomb. Ha megnyomunk egy gombot, mind a négy hozzákötött lámpának megváltozik az állapota. Döntsétek el, hogy az alábbi alaphelyzetekből elérhető-e a gombokat néhányszor megnyomva az, hogy minden lámpa fehéren világítson.
Amennyiben elérhető, adjátok meg a gombnyomások egy megfelelő sorozatát, amennyiben nem, indokoljátok meg, hogy miért nem.

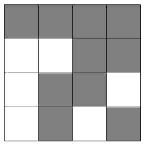
a) 

b) 

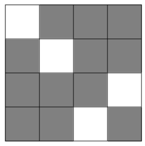
Megoldás: a) Az első esetben elérhető, hogy az összes lámpa világítson. Az alábbi ábrák mutatnak rá egy példát, hogy hogyan.



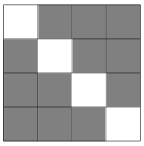
Nyomjuk meg a bal alsó 2×2-es négyzethez tartozó gombot!



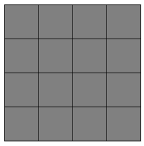
Nyomjuk meg a bal szélső oszlophoz tartozó gombot!



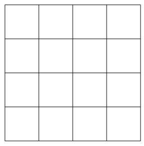
Nyomjuk meg a jobb alsó 2×2-es négyzethez tartozó gombot!



Nyomjuk meg a bal felső sarkot a jobb alsó sarokkal összekötő átlóhoz tartozó gombot!



Nyomjuk meg mind a négy oszlophoz tartozó gombot!



Készen vagyunk.

b) Vegyük észre, hogy az összes gomb pontosan 4 lámpa állását változtatja. Egy gomb megnyomásánál öt lehetőség állhat fenn:

- Ha a gomb megnyomása előtt a hozzá tartozó 4 lámpából 0 volt felkapcsolva, akkor utána 4 lesz, tehát a felkapcsolt lámpák száma 4-gyel nő.
- Ha a gomb megnyomása előtt a hozzá tartozó 4 lámpából 1 volt felkapcsolva, akkor utána 3 lesz, tehát a felkapcsolt lámpák száma 2-vel nő.
- Ha a gomb megnyomása előtt a 4 lámpából 2 volt felkapcsolva, akkor utána is 2 lesz, tehát a felkapcsolt lámpák száma nem változik.
- Ha a gomb megnyomása előtt a 4 lámpából 3 volt felkapcsolva, akkor utána 1 lesz, tehát a felkapcsolt lámpák száma 2-vel csökken.
- Ha a gomb megnyomása előtt a 4 lámpából 4 volt felkapcsolva, akkor utána 0 lesz, tehát a felkapcsolt lámpák száma 4-gyel csökken.

Vegyük észre, hogyha egy gomb megnyomása előtt a felkapcsolt lámpák száma páros volt, akkor utána is az marad. Ha előtte páratlan volt, akkor utána is az marad.

Mivel ebben a feladatrészben kezdetben 9 lámpa volt felkapcsolva, így akárhogyan is nyomogatjuk a gombokat, a felkapcsolt lámpák száma páratlan marad. Tehát nem elérhető az, hogy mind a 16 fel legyen kapcsolva.

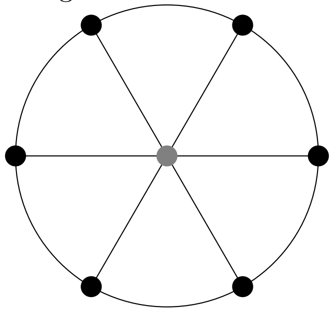
A5. Tízen állnak a sík prérin, mindegyikük seriff vagy bandita. A seriffek mindig igazat mondanak, a banditák mindig hazudnak. Mindannyian a következőt állítják: „A 3 méteres körzetemben, magamat is beleértve, több bandita van, mint seriff.” Mennyi lehet a seriffek száma a prérin?

Mutassatok példát a seriffek és banditák lehetséges elhelyezkedésére az egyes esetekben. Amennyiben egy értékről úgy gondoljátok, hogy nem lehetséges, indokoljátok meg, hogy miért nem.

Megoldás:

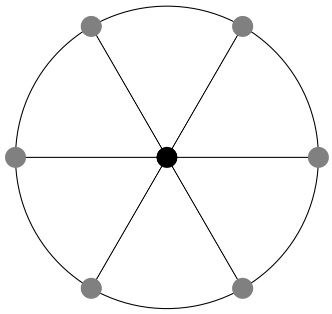
Ha mindannyian banditák lennének, akkor az összes állítás szükségszerűen igaz lenne, viszont a banditák mindannyian hazudnak, tehát ez az eset nem lehetséges.

Ha a banditák száma 9 lenne, akkor mindannyiuknak a 3 méteres környezetében kellene lennie az egyetlen seriffnek és a banditák páronként 3 méternél távolabb kellene, hogy legyenek egymástól, ami nem lehetséges, mivel ha tekintjük az egyetlen seriff köré rajzolt 3 méter sugarú kört, akkor azt 6 egybevágó körcikkre osztva minden körcikkbe csak egy-egy bandita kerülhetne, ami lehetetlen.



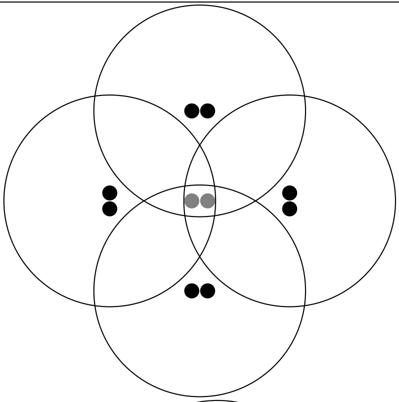
A seriffek igazat mondanak, így minden seriffre teljesülnie kell, hogy a 3 méteres körzetében legalább 2 bandita van, hiszen ők maguk is a saját 3 méteres körzetükben vannak. Ebből adódóan nem lehet a banditák száma 0 vagy 1.

Ha a banditák száma 2 lenne, akkor mivel a seriffek igazat mondanak, így mind a 8 seriffnek mindkét bandita a 3 méteres környezetében kell, hogy legyen, viszont a 8 seriff páronként 3 méternél távolabb kell, hogy legyen egymástól. Ez lehetetlen, mivel ha az ábrán látható kör középpontjában áll egy bandita, a körön belül kellene lennie a 8 seriffnek úgy, hogy mind a 6 körcikkben legfeljebb egy seriff álljon, ami nem lehetséges, mivel 6-nál többen vannak.

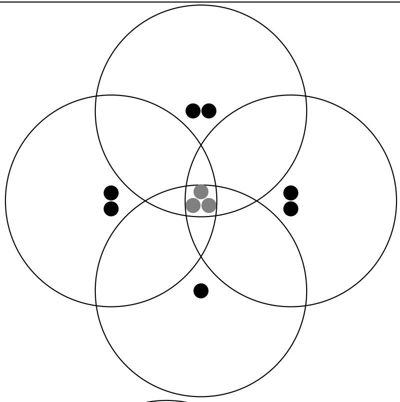


Tehát láttuk, hogy a seriffek száma nem lehet $0, 1, 8, 9, 10$. A többi eset valóban meg is valósítható, az ábrákon a seriffeket szürkével, a banditákat feketével jelölve láthatunk példákat az egyes esetekre, az egy körön belül lévő emberek egymás 3 méter sugarú környezetében vannak, a többiek annál távolabb esnek egymástól.

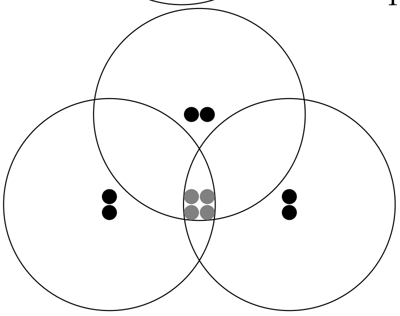
Két seriff:



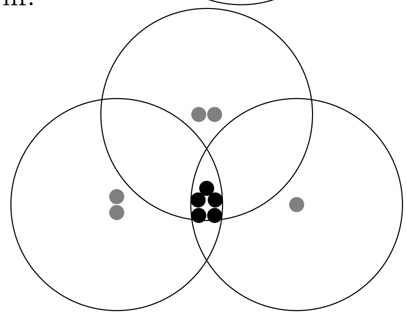
Három seriff:



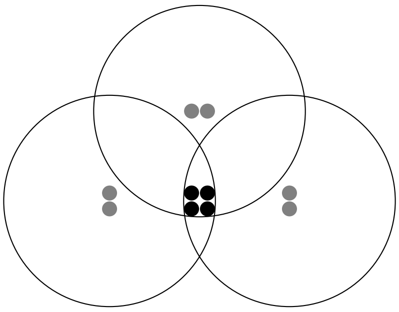
Négy seriff:



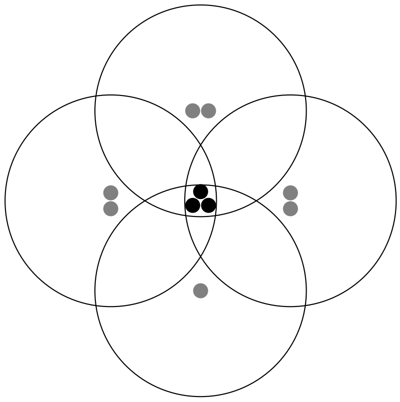
Öt seriff:



Hat seriff:



Hét seriff:



A6. **(Játék)** Nyomozó és Tolvaj az alábbi játékot játssza. Hét kártya van az asztalon lévő készletben, az 1, 2, ..., 7 számokkal jelölve. A játék 7 lépésből áll, minden lépésben az egyik játékos kezébe vesz egyet az asztalon lévő kártyák közül. Az alábbi sorrend szerint lépnek a játékosok:

1. lépés	2. lépés	3. lépés	4. lépés	5. lépés	6. lépés	7. lépés
Nyomozó	Tolvaj	Nyomozó	Tolvaj	Nyomozó	Tolvaj	Tolvaj

Tolvaj akkor nyer, ha a játék végéig összegyűjt három olyan kártyát, melyek közül az egyiken lévő szám a másik kettőnek az átlaga. Nyomozó pedig akkor nyer, ha Tolvaj nem gyűjt össze három ilyen kártyát.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! A játék elején ti dönthetitek el, hogy Nyomozó vagy Tolvaj bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás: Nyomozónak van nyerő stratégiája a játékban. Ezt többféleképpen is elérheti, az alábbiakban az egyik változatot ismertetjük.

Nyomozó vegye el kezdésként az 5-ös számkártyát. Ekkor ha Tolvaj a 2-es kártyát veszi el, akkor Nyomozó válassza ezután a 4-es kártyát. Itt már Tolvajnak csak az 1-2-3 számhármas marad, amivel elérhetné a célját. Viszont az 1 és 3 számok közül legalább az egyik megmarad Nyomozó harmadik lépésére, így ha ezt elveszi, akkor nyer.

Ha Tolvaj első lépésében bármelyik másik kártyát választja, akkor Nyomozó vegye el a 2-es kártyát. A 2-es és 5-ös számok Nyomozóhoz kerülése után Tolvajnak már csak az 1-4-7 számhármas marad, amivel elérhetné a célját. Viszont az 1, 4 és 7 számok közül legalább az egyik megmarad Nyomozó harmadik lépésére, mivel addig Tolvaj csak két számot vehetett el, így ha ezt elveszi, akkor nyer.