XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 01. 24-25.)

Kifejtős Megoldókulcs

B kategória

B1. Soroljátok fel azokat a 18-cal osztható, legfeljebb hatjegyű természetes számokat, melyek tartalmazzák a 2, 0, 2, 5-öt, mint 4 egymás utáni számjegyet ebben a sorrendben.

A teljes pontszámhoz elég felsorolnotok a feltételeknek megfelelő számokat, azt nem kell megindokolnotok, hogy más lehetőség miért nincsen.

Megoldás: Egy szám pontosan akkor osztható 18-cal, ha egyszerre osztható 9-cel és páros.

Ahhoz, hogy egy szám páros legyen, 0-ra 2-re, 4-re, 6-ra, vagy 8-ra kell végződnie. Ahhoz, hogy 9-cel osztható legyen, az kell, hogy a számjegyeinek összege osztható legyen 9-cel. A 2025-ben a számjegyek összege 9, tehát a többi jegy összegének is 9-cel oszthatónak kell lennie.

Kevesebb, mint négy jegyből álló szám nem tud eleget tenni a feladat feltételeinek, hiszen nem tud egymás után 4 jegyet tartalmazni.

Ha a 2025 a szám végén található, akkor nem lehet 18-cal osztható a szám, mivel nem páros. Tehát a 2025 önmagában nem egy jó megoldás.

Ha az ötjegyű számokat vizsgáljuk, akkor csak a 2025-tel kezdődő számok jönnek szóba, ezek közül kizárólag a 20250 lesz osztható 2-vel és 9-cel is.

Vizsgáljuk meg a 6-jegyű számokat. Ezeknek a 2025 a végén továbbra sem lehet.
Ha a 2025 a szám közepén van, akkor a korábbi két feltételből (páros számjegyre végződik és a jegyek összege osztható 9-cel) a lehetséges utolsó jegyeket sorban vizsgálva az alábbi megoldásokat kapjuk: $920250, 720252, 520254, 320256$ és 120258. A 020250 is eleget tenne ugyan a feltételeknek, de egy hatjegyű szám nem kezdődhet 0-val.
Hasonlóan, ha a 2025 a szám elején található, akkor az alábbi számokat kapjuk: $202500, 202590, 202572, 202554, 202536$ és 202518. Több lehetőség nincs.

B2. Négy bandita – Gergő, Beni, Máté és Áron – ülnek egy asztal körül ilyen sorrendben. Mindegyikük tesz egy megállapítást a legutóbbi bankrabláson szerzett aranyrudak számáról:

- Gergő: Annyi aranyrudat raboltam, mint a szomszédaim átlagosan.
- Beni: Annyi aranyrudat raboltam, mint a szomszédaim átlagosan.
- Máté: Annyi aranyrudat raboltam, mint a szomszédaim összesen.
- Áron: Négyen együtt 60 aranyrudat raboltunk.

Állapítsátok meg, hogy ki hány aranyrudat rabolhatott. Írjátok le a gondolatmenetetek lépéseit is.

Megoldás: Máté annyi aranyrudat rabolt, mint Beni és Áron összesen, Gergő pedig Beni és Áron átlagát, azaz a kettőjük által gyűjtött aranyrudak felét. Ezek alapján Máté kétszer annyi aranyrudat gyűjtött, mint Gergő.

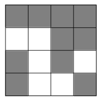
Beni Gergő és Máté átlagát gyűjtötte, amiből Máté aranyrudainak száma kétszerese Gergőének, így Beni szomszédai Gergő aranyrudainak számának háromszorosát gyűjtötték, így Beni a Gergő által gyűjtött aranyrudak másfélszeresét gyűjtötte.

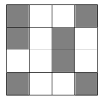
Mivel Gergő is annyit rabolt, mint a két szomszédja átlagosan, így Gergő szomszédjai a Gergő által gyűjtött aranyrudak kétszeresét gyűjtötték. Ebből Beni Gergő aranyrudainak másfélszeresét gyűjtötte, így Áron fele annyi aranyrudat rabolt, mint Gergő.

Így a négy gyerek által rabolt aranyrudak mindegyike kifejezhető Gergő aranyrudainak számával, Áron a felét, Beni a másfélszeresét, Máté a kétszeresét rabolta Gergőének, így 4-en összesen a Gergő által gyűjtött aranyrudak ötszörösét rabolták, vagyis Gergő $60/5 = 12$ aranyrudat gyűjtött.

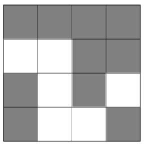
Innen kiszámolható, hogy Áron 6, Beni 18, Máté 24 aranyrudat rabolt, és ezekre az értékekre mind a 4 állítás igaz lesz.

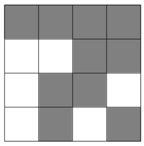
B3. Egy rendőrségi kihallgatószobában 16 lámpa van 4×4-es elrendezésben. A szobában összesen 14 gomb található, minden gomb négy lámpával van összekötve. Minden sorhoz, minden oszlophoz, a két átlóhoz és a négy sarokban található 2×2-es területekhez is tartozik egy-egy gomb. Ha megnyomunk egy gombot, mind a négy hozzákötött lámpának megváltozik az állapota. Döntsétek el, hogy az alábbi alaphelyzetekből elérhető-e a gombokat néhányszor megnyomva az, hogy minden lámpa fehéren világítson.
Amennyiben elérhető, adjátok meg a gombnyomások egy megfelelő sorozatát, amennyiben nem, indokoljátok meg, hogy miért nem.

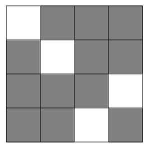
a) 

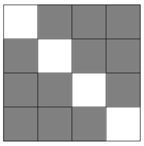
b) 

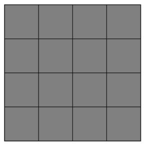
Megoldás: a) Az első esetben elérhető, hogy az összes lámpa világítson. Az alábbi ábrák mutatnak rá egy példát, hogy hogyan.

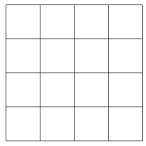

Nyomjuk meg a bal alsó 2×2-es négyzethez tartozó gombot!


Nyomjuk meg a bal szélső oszlophoz tartozó gombot!


Nyomjuk meg a jobb alsó 2×2-es négyzethez tartozó gombot!


Nyomjuk meg a bal felső sarkot a jobb alsó sarokkal összekötő átlóhoz tartozó gombot!


Nyomjuk meg mind a négy oszlophoz tartozó gombot!


Készen vagyunk.

b) Vegyük észre, hogy az összes gomb pontosan 4 lámpa állását változtatja. Egy gomb megnyomásánál öt lehetőség állhat fenn:

- Ha a gomb megnyomása előtt a hozzá tartozó 4 lámpából 0 volt felkapcsolva, akkor utána 4 lesz, tehát a felkapcsolt lámpák száma 4-gyel nő.
- Ha a gomb megnyomása előtt a hozzá tartozó 4 lámpából 1 volt felkapcsolva, akkor utána 3 lesz, tehát a felkapcsolt lámpák száma 2-vel nő.
- Ha a gomb megnyomása előtt a 4 lámpából 2 volt felkapcsolva, akkor utána is 2 lesz, tehát a felkapcsolt lámpák száma nem változik.
- Ha a gomb megnyomása előtt a 4 lámpából 3 volt felkapcsolva, akkor utána 1 lesz, tehát a felkapcsolt lámpák száma 2-vel csökken.
- Ha a gomb megnyomása előtt a 4 lámpából 4 volt felkapcsolva, akkor utána 0 lesz, tehát a felkapcsolt lámpák száma 4-gyel csökken.

Vegyük észre, hogyha egy gomb megnyomása előtt a felkapcsolt lámpák száma páros volt, akkor utána is az marad. Ha előtte páratlan volt, akkor utána is az marad.

Mivel ebben a feladatrészben kezdetben 9 lámpa volt felkapcsolva, így akárhogyan is nyomogatjuk a gombokat, a felkapcsolt lámpák száma páratlan marad. Tehát nem elérhető az, hogy mind a 16 fel legyen kapcsolva.

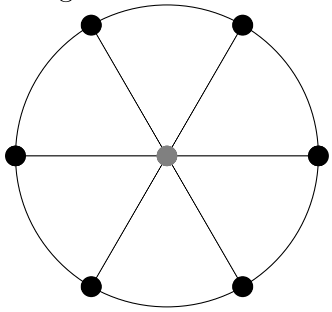
B4. Tízen állnak a sík prérin, mindegyikük seriff vagy bandita. A seriffek mindig igazat mondanak, a banditák mindig hazudnak. Mindannyian a következőt állítják: „A 3 méteres körzetemben, magamat is beleértve, több bandita van, mint seriff.” Mennyi lehet a seriffek száma a prérin?

Mutassatok példát a seriffek és banditák lehetséges elhelyezkedésére az egyes esetekben. Amennyiben egy értékről úgy gondoljátok, hogy nem lehetséges, indokoljátok meg, hogy miért nem.

Megoldás:

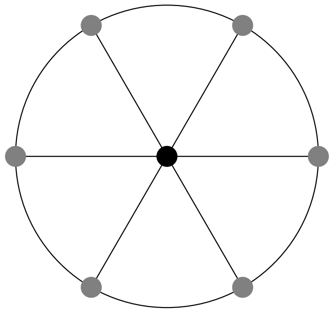
Ha mindannyian banditák lennének, akkor az összes állítás szükségszerűen igaz lenne, viszont a banditák mindannyian hazudnak, tehát ez az eset nem lehetséges.

Ha a banditák száma 9 lenne, akkor mindannyiuknak a 3 méteres környezetében kellene lennie az egyetlen seriffnek és a banditák páronként 3 méternél távolabb kellene, hogy legyenek egymástól, ami nem lehetséges, mivel ha tekintjük az egyetlen seriff köré rajzolt 3 méter sugarú kört, akkor azt 6 egybevágó körcikkre osztva minden körcikkbe csak egy-egy bandita kerülhetne, ami lehetetlen.



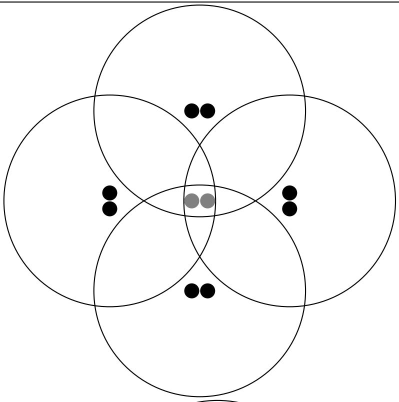
A seriffek igazat mondanak, így minden seriffre teljesülnie kell, hogy a 3 méteres körzetében legalább 2 bandita van, hiszen ők maguk is a saját 3 méteres körzetükben vannak. Ebből adódóan nem lehet a banditák száma 0 vagy 1.

Ha a banditák száma 2 lenne, akkor mivel a seriffek igazat mondanak, így mind a 8 seriffnek mindkét bandita a 3 méteres környezetében kell, hogy legyen, viszont a 8 seriff páronként 3 méternél távolabb kell, hogy legyen egymástól. Ez lehetetlen, mivel ha az ábrán látható kör középpontjában áll egy bandita, a körön belül kellene lennie a 8 seriffnek úgy, hogy mind a 6 körcikkben legfeljebb egy seriff álljon, ami nem lehetséges, mivel 6-nál többen vannak.

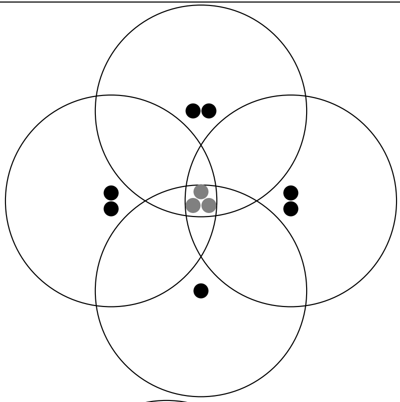


Tehát láttuk, hogy a seriffek száma nem lehet $0, 1, 8, 9, 10$. A többi eset valóban meg is valósítható, az ábrákon a seriffeket szürkével, a banditákat feketével jelölve láthatunk példákat az egyes esetekre, az egy körön belül lévő emberek egymás 3 méter sugarú környezetében vannak, a többiek annál távolabb esnek egymástól.

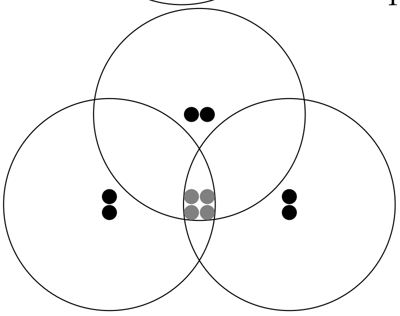
Két seriff:



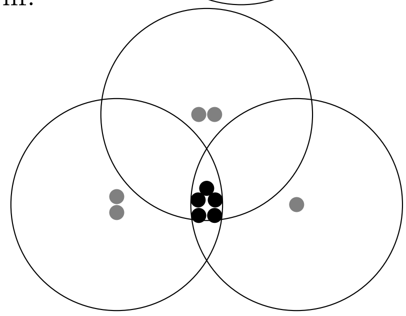
Három seriff:



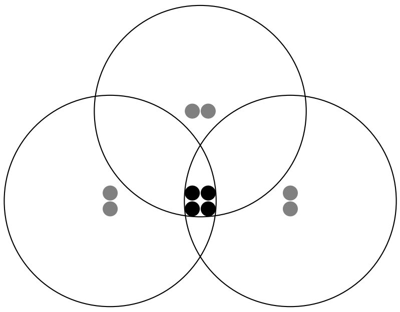
Négy seriff:



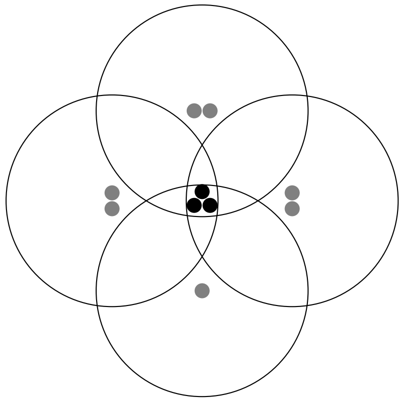
Öt seriff:



Hat seriff:



Hét seriff:



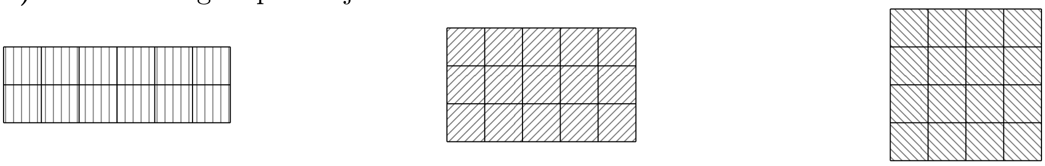
B5. **a)** Adél kivágott két piros, két sárga és két kék téglalapot úgy, hogy az azonos színű téglalapok azonos méretűek lettek. Adél azt vette észre, hogy egyik téglalapot se lehet rárakni semelyik másik színűre úgy, hogy az oldalaik párhuzamosak legyenek és az egyik a másikat teljesen eltakarja. Viszont ha bármelyik színből veszünk két téglalapot, akkor azok együtt már ráhelyezhetőek bármelyik másik téglalapra az előbb említett módon. Mutassatok példát ilyen téglalapokra.

b) Kriszti szintén kivágott két-két azonos méretű piros, sárga és kék téglalapot, azonban az ő téglalapjai azt tudják, hogy semelyik téglalap nem fedhető le két tőle különböző színűvel úgy, hogy az oldalaik párhuzamosak legyenek az eredeti oldalaival. Viszont bármelyik téglalapnak van legalább egy olyan fedése, ami az egyik tőle különböző színűből kettőt, a másikból pedig egyet használ fel és a fedő téglalapok oldalai párhuzamosak az eredeti oldalaival. Mutassatok példát ilyen téglalapokra.

Mindkét feladatrész esetén mutassátok meg azt is, hogy az általatok megadott téglalapok miért teljesítik a feladat feltételeit.

Megoldás:

a) Az alábbi téglalapok teljesítik a feladat feltételeit:

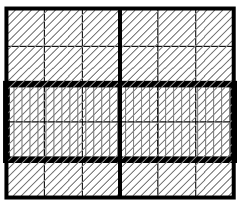


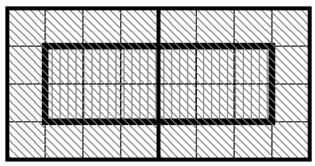
Egy $a \times b$-s téglalap (ahol $a \leq b$) pontosan akkor fedhető le egy $c \times d$-s téglalappal (ahol $c \leq d$), ha $a \leq c$ és $b \leq d$.

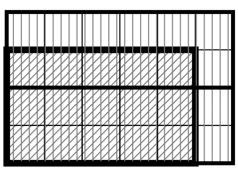
Hiszen ha ezek fennállnak, akkor az $a \times b$-s téglalapra a $c \times d$-st úgy helyezzük, hogy a bal felső csúcsuk egybeessen, az a hosszú élet lefedje a c hosszú él és a b hosszú élet lefedje a d hosszú él, akkor a $c \times d$-s le fogja fedni az $a \times b$-st. Illetve amennyiben a két téglalap lefedhető egymással, abban az esetben az a oldalt is le tudtad fedni valamelyik oldalával a $c \times d$-snek és a b-t is, tehát $a \leq c$-nek és $b \leq d$-nek tényleg fenn kell állnia.

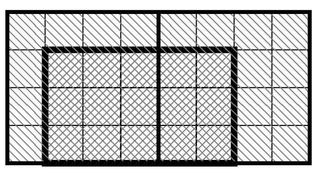
A 2×6-os, a 3×5-ös és a 4×4-es téglalapokra könnyen ellenőrizhető, hogy semelyik kettő nem teljesíti az előbbi két feltételt, tehát ezek közül tényleg semelyik nem fedhető le a másikkal.

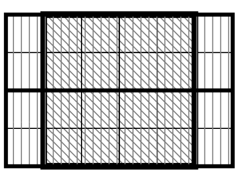
További az is teljesül, hogy bármelyik téglalap lefedhető a bármelyik másik két példányával. Ezek a lefedések az alábbi ábrákon láthatóak:

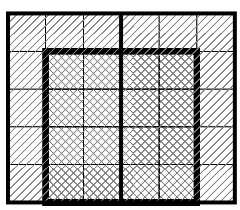

Egy 2×6-os téglalap lefedése két 3×5-össel


Egy 2×6-os téglalap lefedése két 4×4-essel


Egy 3×5-ös téglalap lefedése két 2×6-ossal


Egy 3×5-ös téglalap lefedése két 4×4-essel


Egy 4×4-es téglalap lefedése két 2×6-ossal


Egy 4×4-es téglalap lefedése két 3×5-össel

b) Az alábbi téglalapok teljesítik a feladat feltételeit:

1×31 $\qquad$ 3×15 $\qquad$ 7×7

Ezt a következőképp bizonyítjuk. Vegyük észre, hogy egy $a \times b$-s téglalap és egy $c \times d$-s téglalap legfeljebb $\min\{a, b, c, d\} \cdot \min(\max\{a, b\}, \max\{c, d\})$ területen fedi egymást ha az oldalaik párhuzamosak egymással. Ez azt jelenti, hogy a közös részük egy olyan téglalap, melynek egyik oldalhossza a négy oldalhossz közül a legrövidebb, ezzel egy irányba a másik téglalap rövidebb oldalát tegyük, és ekkor a közös rész másik oldala pedig a két téglalap hosszabbik oldalai közül lesz a kisebb. Így az első és a második fajta téglalap legfeljebb 15 egységnyi területen fedheti egymást, az első és a harmadik fajta legfeljebb 7, a második és harmadik fajta pedig 21 egységnyi területen. Mivel a téglalapok területei 31, 45 és 49, így egyik sem fedhető le két másik fajta téglalappal.

Viszont könnyen látható, hogy bármely téglalap lefedhető kettő darabbal az egyik másmilyen fajta téglalapból meg egy darab harmadik fajta téglalappal.

Az 1×31-es téglalapból két át nem fedő 1×15-ös részt le tudunk fedni két darab 3×15-ös téglalappal, a kimaradó 1×1-es részt pedig lefedhetjük egy 7×7-essel.

A 3×15-ös téglalapból két át nem fedő 3×7-es részt le tudunk fedni két darab 7×7-es téglalappal, a kimaradó 3×1-es részt pedig lefedhetjük egy 1×31-essel.

A 7×7-es téglalapból két át nem fedő 3×7-es részt le tudunk fedni két darab 3×15-ös téglalappal, a kimaradó 1×7-es részt pedig lefedhetjük egy 1×31-essel.

B6. **(Játék)** Nyomozó és Tolvaj az alábbi játékot játssza. Kilenc kártya van az asztalon lévő készletben, az 1, 2, ..., 9 számokkal jelölve. Nyomozó és Tolvaj felváltva vesz a kezébe egyet-egyet az asztalon lévő kártyák közül úgy, hogy az első kártyát Nyomozó veszi el. Tolvaj akkor nyer, ha a játék végéig összegyűjt három olyan kártyát, melyek közül az egyiken lévő szám a másik kettőnek az átlaga. Nyomozó pedig akkor nyer, ha Tolvaj nem gyűjt össze három ilyen kártyát.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! A játék elején ti dönthetitek el, hogy Nyomozó vagy Tolvaj bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás: Nyomozónak van nyerő stratégiája a játékban.

Kezdésként az 5-ös kártyát kell elvennie. (Ha más kártyát vesz el, akkor Tolvaj meg tudja nyerni a játékot, de ennek ismerete nem szükséges a játék megnyeréséhez.)

A következő lépésben, ha Tolvaj az 1, 2, 3 vagy 6 kártya valamelyikét veszi el, akkor mi vegyük el a 4-es kártyát, ha pedig a 4, 7, 8 vagy 9 kártya valamelyikét, akkor a 6-osat.

Most nézzük azokat az eseteket, amikor Nyomozó a 4-es kártyát vette el. A többi esetet (vagyis amikor a 6-ost veszi el), megkaphatjuk úgy, hogy tükrözzük a játékot az 5-re, azaz tetszőleges x szám helyett a $9-x$-et nézzük.

A játék ezen a pontján Tolvaj még az alábbi, neki megfelelő, hármasokat tudja kialakítani: (1,2,3), (3,6,9), (6,7,8) és (7,8,9).

Mivel Tolvaj már csak három kártyát fog elvenni, így a maradék elérhető hármasok egy lépés múlva azok, amikből Tolvaj már elvett addigra legalább egyet, de Nyomozó még nem vett el egyet se. Ezt figyelembe véve tölthetjük ki az alábbi táblázatokat.

Ha Tolvaj először 1-est vagy 2-est vett el, akkor Nyomozó így folytathatja a 4-es után:

Tolvaj elvesz:	1 vagy 2	3	6	7	8	9
Nyomozó elvesz:	3	1 vagy 2	3	8	7	3
Maradék elérhető hármasok:	-	(3,6,9)	(6,7,8)	(1,2,3)	(1,2,3)	(7,8,9)

Ha Tolvaj először a 3-ast vette el, akkor Nyomozó így folytathatja a 4-es után:

Tolvaj elvesz:	1	2	6	7	8	9
Nyomozó elvesz:	2	1	9	6	6	6
Maradék elérhető hármasok:	(3,6,9)	(3,6,9)	(1,2,3), (6,7,8)	(1,2,3), (7,8,9)	(1,2,3), (7,8,9)	(1,2,3), (7,8,9)

Ha Tolvaj először a 6-ost vette el, akkor Nyomozó így folytathatja a 4-es után:

Tolvaj elvesz:	1	2	3	7	8	9
Nyomozó elvesz:	3	3	9	8	7	3
Maradék elérhető	(6,7,8)	(6,7,8)	(1,2,3)	(3,6,9)	(3,6,9)	(6,7,8), (7,8,9)

Vegyük észre, hogy a maradék hármasok között nincs olyan, aminek már két számával is rendelkezik Tolvaj, így nem tud egyből nyerni. Ekkor ha a maradék elérhető hármasok száma egy, akkor Nyomozó abból egyet elvéve nyer. Ha két megmaradt hármas van, akkor ezeknek vagy nulla, vagy két közös száma van. Amennyiben kettő, akkor ezek közül el tudja majd venni az egyiket, amivel nyer. Ha pedig nulla, akkor a következő két lépésben abból tud még elvenni, amiből épp Tolvaj vett el, ezzel szintén nyer.