XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 01. 24-25.)

Váltó Megoldókulcs

B kategória

B1. Egy rablóbanda bankokat és pénzszállítókat rabolt ki. Minden bank kirablásánál 11 zsák pénzt és 7 aranytömböt, minden pénzszállító kirablásánál pedig 6 zsák pénzt és 3 aranytömböt szereztek. Az eddigi akcióik során összesen 26 aranytömböt sikerült szerezniük. Hány zsák pénzt szereztek eddig a rablásaikból?

Megoldás: A banda minden bankrabláskor 7 aranytömböt, minden pénzszállító kirablásakor 3 aranytömböt szerez. Összesen 26 aranytömböt zsebeltek be, tehát legfeljebb 3 bankot raboltak ki, hiszen $4 \cdot 7 > 26$.

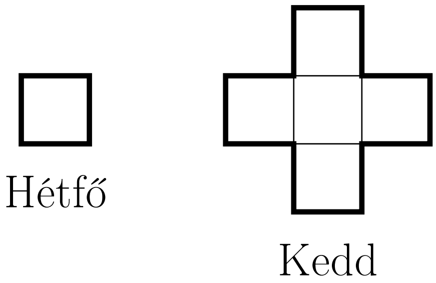
Nem rabolhattak ki 0 bankot, mert akkor 26 aranytömböt kellett volna szerezniük a pénzszállítók kirablásával, azonban a pénzszállítók rablásából mindig 3-mal osztható számú aranytömböt szereznek.

Ugyanígy nem rabolhattak ki 1 vagy 3 bankot sem, mivel egy bank esetén $26 - 7 = 19$, három bank esetén $26 - 21 = 5$ aranytömböt kellett szerezniük a pénzszállítók kirablásával, azonban se 19, se 5 nem osztható 3-mal.

Tehát csak úgy szerezhettek 26 aranytömböt, ha két bankot raboltak ki, ugyanis ekkor a két bankrabláskor 14 aranytömböt szereztek és a maradék $26 - 14 = 12$ osztható 3-mal. Azaz ekkor $\frac{12}{3} = 4$ pénzszállítót raboltak ki.

A két bankrablásból $2 \cdot 11 = 22$, míg a négy pénzszállító kirablásából $4 \cdot 6 = 24$ pénzeszsákhoz jutottak hozzá, azaz összesen $22 + 24 = 46$ zsák pénzt szereztek.

B2. Columbo hétfőn rajzolt egy egységnégyzetet a füzetébe. Ezután keddtől kezdve minden nap délben megrajzolja az összes olyan egységnégyzetet, amelynek valamelyik oldala egybeesik az addigi ábra egyik oldalával. Hány egységnégyzetből áll Columbo ábrája vasárnap este?



Megoldás: Hétfőn 1 négyzet volt az ábrán és kedden 5, majd szerdán 8 új négyzetet rajzolt mellé, csütörtökön 12 négyzetet, pénteken 16 négyzetet, szombaton 20-at, vasárnap 24-et. Tehát vasárnap a kis négyzetek száma $1 + 4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 = 85$, amint az alábbi ábra is mutatja.

						V						
					V	Szo	V					
				V	Szo	P	Szo	V				
			V	Szo	P	Cs	P	Szo	V			
		V	Szo	P	Cs	Sze	Cs	P	Szo	V		
	V	Szo	P	Cs	Sze	K	Sze	Cs	P	Szo	V	
V	Szo	P	Cs	Sze	K	H	K	Sze	Cs	P	Szo	V
	V	Szo	P	Cs	Sze	K	Sze	Cs	P	Szo	V	
		V	Szo	P	Cs	Sze	Cs	P	Szo	V		
			V	Szo	P	Cs	P	Szo	V			
				V	Szo	P	Szo	V				
					V	Szo	V					
						V						

B3. Négy mókus – Lili, Mónika, Nándor és Tamás – négy különböző fán él: fenyőfán, tiszafán, tölgyfán és nyárfán. Mindannyian gyűjtöttek diót: 18, 21, 22, illetve 27 darabot. Ha az alábbi adatokat tudjuk, akkor hány diót gyűjtött Tamás és Mónika összesen?

- Mónika fenyőn lakik, Lili nem a tölgyfába költözött be.
- A tölgyfa lakója eggyel kevesebb diót gyűjtött, mint a tiszafán lakó mókus.
- Nándor gyűjtötte a legkevesebb diót.

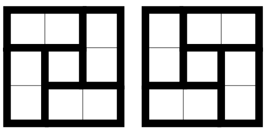
Megoldás: Az adatok alapján a tölgyfa lakója 21, a tiszafáé 22 db diót gyűjtött. Mivel Nándor gyűjtötte a legkevesebbet, így a fenyőn lakó Mónika 27 db diót gyűjtött és Nándor csak a nyárfán lakhat a 18 diójával. Lili nem a tölgyfán él, így övé a tiszafa, Tamásé a tölgyfa. Összefoglalva Mónika 27, Tamás 21 db diót szedett, összesen 48 darabot gyűjtöttek be.

B4. Orsi farmján kilencféle állat él, mind külön karámban. A kilenc négyzet alakú karám 3×3-as alakzatban helyezkedik el. Egy nap Orsi a karámok közti kerítésekből néhányat lebontott, így négy 1×2-es és egy 1×1-es karámot hozott létre. Hányféleképpen tehette meg ezt?

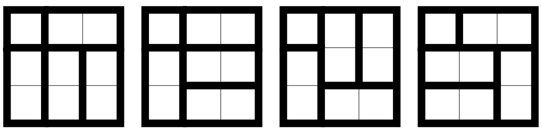
Két lebontás akkor számít különbözőnek, ha van olyan kerítés, amit az egyik esetben lebontott, a másikban pedig nem.

Megoldás: Három esetet különböztetünk meg az 1×1-es karám helyzete alapján.

- Amikor oldalközépen van: Ekkor a mellette lévő két sarokmezőből csak egyféleképpen lehet berajzolni az 1×2-eseket, és látható, hogy nem tudjuk kitölteni a maradék helyet további 1×2-esekkel.
- Amikor középen van: Ekkor induljunk el a bal felső sarokból. A bal felső sarkot kétféleképpen tudjuk lefedni 1×2-esekkel. Mindkét esetben viszont ez a lehelyezés egyértelműen meghatározza a többi 1×2-es helyét. Így itt két jó elrendezésünk van.



- Amikor sarokban van: Ekkor bármely sarokba rakva az 1×1-est, 4-féleképpen tudjuk lefedni a maradék helyeket. Mivel 4 sarokba rakhatjuk az 1×1-est, így $4\cdot4=16$ jó elrendezésünk van.



Összesítve $16+2=18$ jó elrendezésünk van.

B5. Egy görög falanx 60 emberből áll, akik egy 10 sorból és 6 oszlopból álló téglalapban helyezkednek el. Tudjuk, hogy mindegyikük igazmondó vagy hazug. Mindegyikük ezt állítja: „A velem egy sorban vagy oszlopban lévő társaim mindegyike hazug.” Hány hazug van a 60 ember között?

Az igazmondók mindig igazat mondanak, a hazugok pedig mindig hazudnak.

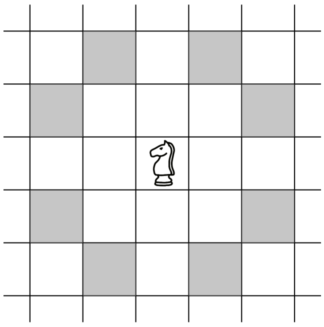
Megoldás: Vegyük észre, hogy egy igazmondóval egy sorban vagy egy oszlopban nem lehet másik igazmondó, mivel az azt jelentené, hogy az az állítása, hogy a vele egy sorban vagy oszlopban lévő társai mindegyike hazug, hazugság lenne. Tehát az igazmondók száma nem lehet több annál, ahány oszlop van, azaz 6-nál.

Amennyiben az igazmondók száma legfeljebb 5, azon sorok és oszlopok száma is legfeljebb 5, amikben van igazmondó, tehát van olyan sor és olyan oszlop is, amiben nincs igazmondó. Viszont ekkor ha megvizsgálnánk egy olyan hazug embert, aki ezen sorok és ezen oszlopok közös részében van (ami legalább egyelemű), neki az az állítása, hogy a vele egy sorban vagy oszlopban lévő társai mindegyike hazug, igaz lenne, ami ellentmond annak, hogy hazug.

Tehát az igazmondók száma nem lehet kisebb, mint 6. de nagyobb sem, tehát pontosan 6 igazmondó van. Azaz a hazugok száma: $6\cdot10-6=54$.

B6. Egy 8×8-as sakktáblának a jobb felső sarkában egy fehér huszár, míg a bal alsó sarkában egy fekete huszár található. Leila a fehér huszárral, Korina a feketével lépett pontosan háromszor, így végül ugyanarra a mezőre érkeztek. Hányféle lehet az a mező, ahova végül a huszárok érkeztek?

Az ábrán a szürke mezők mutatják, hogy hova tud egy huszár egy lépésben eljutni.



Megoldás: Az alábbi három ábra mutatja, hogy Korina a fekete huszárral mely mezőkre juthat el 1, 2, illetve 3 lépésben. Az ábrákat úgy kaphatjuk, hogy a bal alsó sarokban lévő kiinduló helyről (ló figura), illetve a korábbi lépésben megkapott helyekről kipróbáljuk az összes lehetséges huszárlépést.

	1						
		1					
♘							

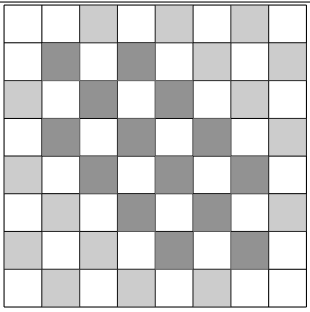
2		2					
	2		2				
2	1			2			
		1	2				
2		2		2			

	3		3				
3		3		3			
2	3	2	3		3		
3	2	3	2	3		3	
2	3		3	2	3		
3		3	2	3		3	
2	3	2	3	2	3		

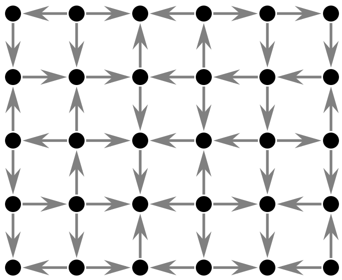
Középpontos tükrözéssel megkapható, hogy Leila pedig a következő ábrán látható mezőkbe tud eljutni 2, illetve 3 lépésben.

		3	2	3	2	3	2
	3		3	2	3		3
		3	2	3		3	2
	3		3	2	3	2	3
		3		3	2	3	2
			3		3		3
				3		3	

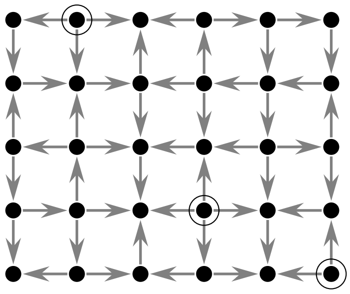
Azokon a mezőkön találkozhatott Leila és Korina bábuja, amelyik mező mindkettőjük ábráján szerepel a 3 lépéssel elérhető mezők között. A következő ábrán világosszürkével színeztük azokat a mezőket, ahova csak az egyikük, sötétszürkével pedig azokat, ahova mindketten eljuthattak. Így látható, hogy 14 mezőn találkozhatott a két huszár.



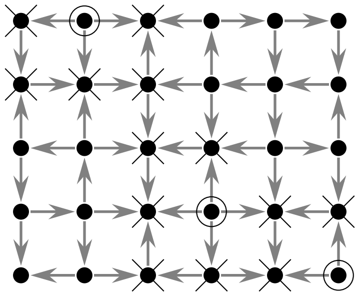
B7. Az ábrán látható egy ország térképe, melyen 30 város és a köztük futó repülőjáratok szerepelnek. A nyilak jelölik, hogy milyen irányba jár repülő az adott két város között. A Gombóc Artúr Csokigyár szeretne minden városba küldeni a termékükből. Ehhez néhány városban bérelnek raktárat és onnan repülőkkel hordják szét a termékeket. Legalább hány városban kell raktárat bérelniük, hogy azokból minden városba tudjanak szállítani csokikat?



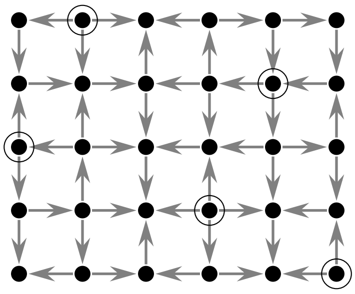
Megoldás: Azon városokban, melyekbe nem megy repülőjárat, Gombóc Artúréknak mindenképpen kell raktárat bérelniük, hiszen ezekbe semelyik másik városból nem lehetne elszállítani a csokit. Ezek az alábbi ábrán bekarikázott városok (összesen 3 darab):



Jelöljük X-szel azokat a városokat, melyekbe ebből a 3 városból el lehet szállítani a csokit:



Az ábrán látható, hogy ezen 3 raktár bérlése mellett még mindig kimarad két terület, melyekbe nem jut el Gombóc Artúr csokija. Tehát még legalább 2 raktárat ki kell bérelnie célja elérése érdekében, tehát összesen legalább 5-öt. Viszont könnyen ellenőrizhető, hogyha a következő ábrán jelölt 5 raktárat bérli ki, azzal már el tudja az érni a célját.



B8. Kansas City-t és Denvert egy 1001 km hosszú egyenes út köti össze. Az út mellett fogadók találhatók, Kansas City-től kilométerben mérve 1001-nek minden pozitív osztójánál van egy. Ádám el szeretne jutni az 1. km-nél lévő fogadóból az 1001. km-nél lévőbe úgy, hogy közben minden más fogadóba pontosan egyszer tér be. Legfeljebb hány kilométert tehet meg Ádám az út során, ha ő dönti el, hogy milyen sorrendben látogatja meg a fogadókat, és a meglátogatott fogadók közt végig egyenes úton halad?

Az 1. és 1001. km-nél lévő fogadókba csak az út elején, illetve végén tér be. 0

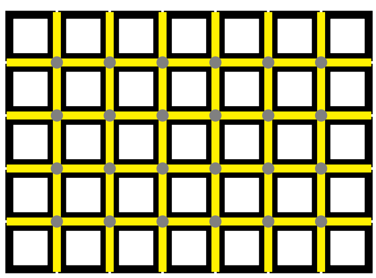
Megoldás: Mivel $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, az alábbi kilométereknél állnak fogadók: $1, 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001$. Nézzük meg a fogadók közötti szakaszokat. Az $[1, 7]$ szakaszt legfeljebb 1-szer teszi meg Ádám, hiszen az 1-ből indul, és a szakaszon belül nincsen további fogadó, ahova később visszaléphetne. A $[7, 11]$ szakaszt legfeljebb 3-szor teszi meg Ádám: elhalad egyszer előrefelé egy későbbi fogadóhoz, majd visszalép 7-be, majd megint előremegy. Hasonló logikával azt kapjuk, hogy a $[11, 13]$ szakaszt utat legfeljebb 5-ször teszi meg, egyszer biztosan elhalad előrefelé, és két olyan korábbi fogadó van, ahova még vissza tud ugrani.

Az út végén is elmondhatjuk ugyanezt a gondolatmenetet, ezért a $[143, 1001]$ szakaszt legfeljebb 1-szer, a $[91, 143]$-at legfeljebb 3-szor, a $[77, 91]$-et legfeljebb 5-ször, és végül a $[13, 77]$-et legfeljebb 7-szer teheti meg Ádám.

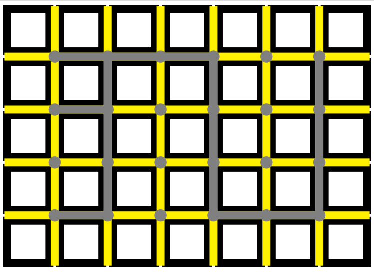
Az $1, 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001$ km-eknél lévő fogadókra a szomszédosak közti távolságok rendre: $6, 4, 2, 64, 14, 52, 858$. Ha Ádám a lehető leghosszabb utat akarja bejárni, akkor az legfeljebb $1 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 64 + 5 \cdot 14 + 3 \cdot 52 + 1 \cdot 858 = 1560$. Ez a összeg valóban meg is valósítható, ha az alábbi sorrendben látogatja meg a fogadókat: $1, 143, 7, 91, 11, 77, 13, 1001$.

B9. Egy faluban 35 darab négyzet alakú telek található 7×5-ös elrendezésben. A telkek közötti kereszteződések már le vannak aszfaltozva, de a köztes útszakaszok még földutak. Legalább hány útszakaszt kell leaszfaltozni, hogy bármelyik telekről el tudjunk sétálni bármelyik másik telekre csupán aszfaltozott úton járva?

Egy útkereszteződésről egy telekre akkor tudunk rálépni, ha a telek egyik sarka érinti az útkereszteződést.



Megoldás: Az alábbi konstrukcióval látható hogy, 16 útszakasz lebetonozása elég tud lenni:



Most belátjuk, hogy 15 útszakasz nem elég. A bal felső telek kalandos kedvű lakója szeretné meglátogatni az összes telket. Ehhez minden telekre tervez egy útvonalat az aszfaltozott utakon keresztül, majd sorban ezeken elmegy az adott telkekig, majd haza. Mindig, amikor áthalad egy olyan útszakaszon, amit korábban még nem használt, akkor ezt bejelöli a térképén, majd összeszámolja, hogy az addig felfedezett utakon összesen hány telket ér el. Minden ilyen útszakasz berajzolásakor legfeljebb egy olyan kereszteződést fedez fel, ahova eddig nem tudott volna eljutni a térképén berajzolt utakon, így új elérhető telek csak az ezen kereszteződéssel szomszédos telkek közül kerülhet ki. E négy telek közül kettő már azon kereszteződésből is elérhető, ami az újonnan aszfaltozott út másik végpontja. Így minden újonnan felfedezett útszakasz berajzolásával az elérhető telkek száma legfeljebb 2-vel nő. Az indulás előtti, üres térképen 4 telek érhető el, így a maradék 31 telek meglátogatásához több, mint 15 útszakasz felfedezésére van szükség.

B10. Salamon király hírt kapott, hogy éjszaka megtámadják a várát, így elrendelte, hogy a bástyákon erősítsék meg az őrséget. A várnak két bástyája van (egy az északi oldalon és egy a délin), mindkettő ötszintes, minden szinten egy őrszobával. A király mind az 55 katonáját beosztja valamelyik szobába úgy, hogy az alábbi feltételek teljesüljenek:

- Minden szobában kell legalább egy katonának lennie, és bármely két szobában különböző számú katona legyen.
- Szintenként ugyanannyi legyen a katonák száma (a két bástyában összesen).
- Az északi bástyába összesen eggyel több katona kerüljön, mint a délibe.

Hányféleképpen rendezheti el katonáit a 10 őrszobába Salamon király?

Két elrendezést különbözőnek tekintünk, ha van olyan szoba, melybe nem ugyanannyi katona kerül.

Megoldás: Minden szobába legalább 1 katonát be kell osztani és mindben különböző mennyiségűt, így a legkisebb létszámmal rendelkező szobába legalább 1 katonának kell kerülnie, a második legkisebb létszámmal rendelkezőbe legalább 2-nek, a harmadik legkisebbel rendelkezőbe legalább 3-nak, …, a legnagyobb létszámú szobába pedig legalább 10-nek. Viszont $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55$, tehát semelyik szobában sem lehet több katona az előbb leírtnál, így a szobák létszáma $1, 2, 3, \ldots, 10$, valamilyen sorrendben.

Mivel minden szinten ugyanannyi katona kell legyen, így mind az 5 szintre $55 : 5 = 11$ katonát kell helyeznie Salamon királynak. Tehát ha valamelyik szobába 1 katona kerül, akkor a másik bástyában ugyanarra a szintre 10, hiszen csak így jön ki a 11 összegként, ha valamelyikbe 2, akkor a másikba az azonos szintre 9, ha 3, akkor 8, ha 4, akkor 7, ha pedig 5, akkor 6.

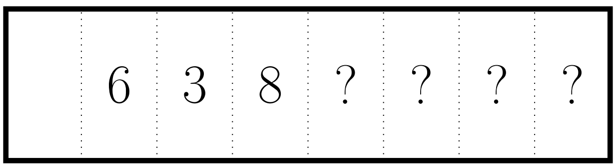
Salamon király azt is szeretné, ha az északi bástyába összesen eggyel több katona kerülne, mint a délibe. Ez csak akkor történhet meg, ha az északiba 28, a délibe pedig összesen 27 kerül. Vizsgáljuk meg, hogy melyik toronyba mely szobák kerülhetnek (egyelőre figyelmen kívül hagyva azt, hogy milyen magasra).

Ha az északi bástyába helyezné Salamon király a 10, a 9, a 8, a 7 és a 6 fős szobát, akkor összesen 40 katona kerülne oda, ez 12-vel több annál, mint amit el szeretnénk érni. A második bekezdésben leírtak miatt az 1 és a 10 fős szoba más bástyába kell, hogy kerüljön; a 2 és a 9 fős is, a 3 és a 8 fős is, a 4 és a 7 fős is, továbbá az 5 és a 6 fős is. Azaz Salamon király a létszám 12 fővel való csökkenésének elérése érdekében nem tehet mást, mint azt, hogy az előbbi szobapárok közül néhányban a két szobát megcseréli. Ha ez a csere az 1 és a 10 fős szoba között történik, akkor a létszám $10-1=9$ fővel csökken az északi bástyában, ha a 2 és a 9 fős közt, akkor $9-2=7$-tel, ha a 3 és a 8 fős közt, akkor $8-3=5$-tel, ha a 4 és a 7 fős közt, akkor $7-4=3$-mal, ha pedig az 5 és a 6 fős közt, akkor $6-5=1$-gyel.

Vegyük észre, hogy minden csere esetén páratlannal csökken az északi toronyban lévő katonák száma. Tehát csak akkor érheti el a király a 12-vel való létszámcsökkenést, ha páros sok cserét hajt végre. 4 csere már túl sok lenne, hiszen az összesen legalább $1+3+5+7=16$-tal csökkentené az északi toronyban lévő katonák számát, így csak 2 csere lehetséges. 2 csere esetén akkor áll elő 12 összegként, ha Salamon vagy a 7-es és az 5-ös, vagy pedig a 9-es és a 3-as eltéréssel rendelkező szobapárokat cseréli. Az első esetben az északi bástyába a 6, 7, 3, 2 és 10 fős szobák kerülnek, a másodikban pedig a 6, 4, 8, 9 és 1 fősek.

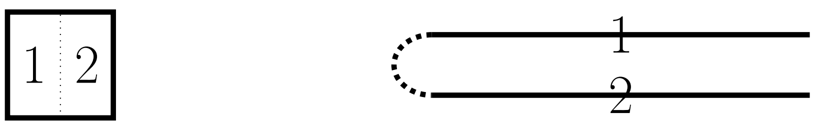
Ezek közül mindkét esetben $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$-féle lehet a szintek sorrendje az északi bástyában, és a déli bástyában lévő szintek sorrendjét már egyértelműen meghatározza az északi bástyában lévő szintek sorrendje amiatt, hogy szintenként összesen 11-11 katona van. Ez összesen $2\cdot120=240$ lehetőség.

B11. Hajtsátok össze a lenti keretben lévő lapot a szaggatott vonalak mentén úgy, hogy az egyes részekre írt számok azt jelöljék, hogy az adott darab felülről számolva hányadik réteg. Ezután a kérdőjelekre írjátok rá, hogy azok felülről nézve hányadik rétegben szerepelnek a hajtogatásban. Adjátok meg, hogy milyen négyjegyű szám lesz kiolvasható a négy kérdőjel helyén.

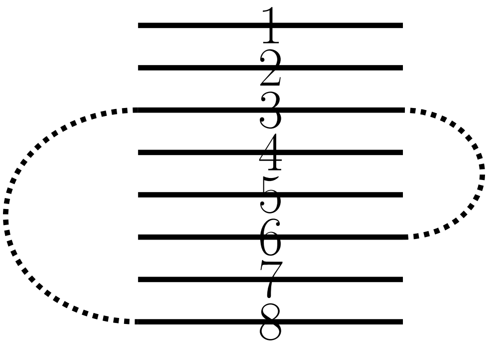


Megoldás: Rajzoljuk le oldalnézetből az összehajtogatott papírt úgy, hogy az egyes lapos részek vízszintes vonalak, rájuk írva hogy hanyadikak felülről (ezen számokat írjuk az egyes részekre), és a kihajtott lapon szomszédos részeket összekötő szaggatott vonalat a lapos részek melletti szaggatott ívekkel jelöljük.

Például ha csak egy hajtás lenne a lapon, akkor azt így jelölnénk:

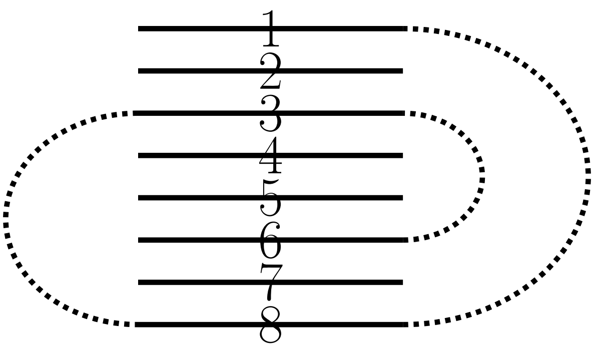


Rajzoljuk ezen a módon le a feladatban szereplő összehajtogatott lapot. Pontosabban, először csak azon hajtásokat jelöljük be szaggatott vonallal, amelyekről tudjuk, hogy szomszédos részek amikor a lap szét van hajtva, vagyis a 6-3 és 3-8 hajtásokat. Ezek a 3-as rész két különböző oldalain vannak, így az ábránk a következőképp néz ki:

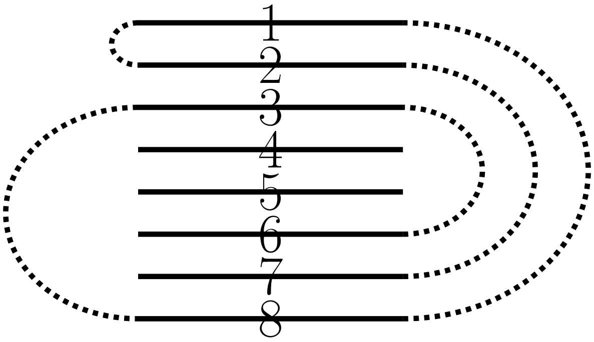


A megoldás ötlete az, hogy ha minden részt összekötünk a vele szomszédos végekkel, akkor az összekötő ívek nem metszik egymást. Ennek az az oka, hogy az összekötő ívek megfelelnek a hajtások íveinek, amik tényleg nem metszik egymást.

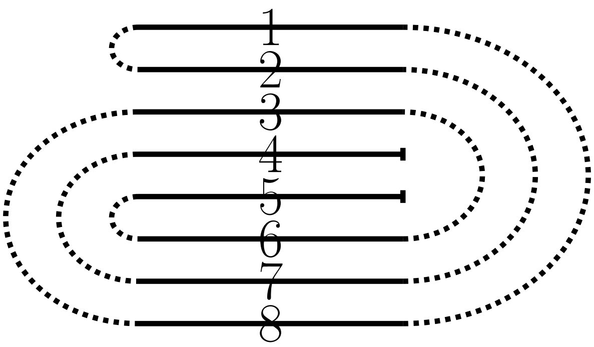
Látható, hogy a 8-as rész még össze nem kötött vége nem lehet a 7-es rész végével összekötve, hiszen ekkor az 1 és 2-es részek nem tudnának szabad véghez csatlakozni a többi rész végei közül. Továbbá nem lehet a 2-es rész végével sem összekötve a 8-as rész még össze nem kötött része, hiszen ekkor a 2-es rész másik vége csak az 1-es rész végével lehetne összekötve, és az 1-es rész másik vége nem lehetne mással összekötve, így a lapot kihajtva a 8-as számtól két rész lenne az egyik irányban. Tehát a 8-as rész az 1-es rész mellett kell legyen.



Ekkor az 1-es rész másik oldalán a 2-es rész kell legyen, mely másik oldalán a 7-es rész kell legyen.



A 6-os rész még szabad oldalán nem lehet a 4-es rész, hiszen ekkor az 5-ös részt a 4-es résszel kéne összekötni, azonban ekkor a 6-os rész mindkét oldalán legalább 2 rész lenne a kihajtott lapon. Illetve a 6-os rész még szabad vége a 7-es résszel sem lehet összekötve hiszen ekkor a 6-7-2-1-8-3-6 körbeérne. Tehát a 6-os rész másik vége az 5-ös részhez van kötve, ahol a papírnak a vége van, továbbá a 7-es rész még szabad vége a 4-es részhez van kötve, ahol a papír másik vége van.



Így a lapot kihajtogatva a számok sorrendje 5-6-3-8-1-2-7-4, így a válasz 1274.

B12. Egy kutatócsoport tanulmányozni szeretné a medúzákat, rájákat, angolnákat és teknősöket. Összesen 600 darab állatot fogtak be ebből a négy állatból. Tudjuk, hogy rájából prímszámnyi darabot fogtak be, az angolnák száma harmincötszöröse a medúzák számának, teknősből pedig nyolccal többet fogtak be, mint medúzából. Hány angolnát fogtak be összesen?

Megoldás:

Az angolnák száma 35-szerese a medúzák számának, a teknősök pedig 8-cal többen vannak, mint a medúzák. Ezért, ha összeadjuk a medúzák, az angolnák és a teknősök számát, akkor megkapjuk a medúzák számát 37-szer és még 8-at. Mivel öszesen 600 állat van, ezért ha összeadjuk a ráják számát, a medúzák számának 37-szeresét és a 8-at, akkor 600-at kapunk. Tehát a ráják számának és a 37-szer a medúzák számának összege éppen $600 - 8 = 592$. 592 osztható 37-tel ($592 = 37 \cdot 16$) és a medúzák számának 37-szerese is osztható 37-tel, azaz a ráják száma is osztható 37-tel. Mivel a ráják száma prímszám, és osztható 37-tel, így a ráják száma 37. 592 a ráják számának és 37-szer a medúzák számának az összege, azaz a medúzák számának a 37-szerese $592 - 37 = 555 = 37 \cdot 15$. Tehát a medúzák száma 15. Innen kiszámolhatjuk, hogy a teknősök száma $15 + 8 = 23$ és az angolnák száma $35 \cdot 15 = 525$. Ellenőrizzünk: az állatok számainak összege $15 + 23 + 525 + 37 = 600$, azaz a feladat feltételei teljesülnek.

Az angolnák száma 525.

B13. Herkulesnek három hétfejű sárkány állja útját, melyeket le kell győznie. Herkules egy körben legfeljebb három fejet képes levágni, ám minden kör végén minden sárkánynak visszanő egy feje. Ráadásul ha Herkules két egymás utáni körben sem vágja le valamelyik sárkánynak egyik fejét sem, akkor az a sárkány halálos tüzet okád rá. Legalább hány kör kell ahhoz, hogy Herkules legyőzze a sárkányokat?

Herkules akkor győz le egy sárkányt, ha annak az összes fejét levágja. Ezután ennek a sárkánynak már nem nő vissza feje, és nem is okád tüzet. Ha egy sárkánynak hét feje van, akkor neki nem nő vissza újabb.

Megoldás:

Vegyük észre, hogy bármely két egymás utáni kör alatt a három sárkányon léve fejek száma összesen legfeljebb 2-vel csökken amíg egyik sárkányt sem győzte még le. Ez onnan látszik, hogy két kör alatt legfeljebb 6 fejet vág le, ebből mindhárom sárkánynak legalább 1 fejét levágja (hogy elkerülje a halálos tüzet). Így mindhárom sárkány legalább 1 fejet visszanöveszt a két kör alatt, hiszen abban a körben, amikor levág egy sárkányról legalább egy fejet, akkor az a sárkány visszanöveszt egyet. Ha Herkules legfeljebb 5 fejet vágott le, akkor legfeljebb 2-vel csökkenhetett a fejek száma. Nézzük azt az esetet, amikor pontosan 6 fejet vág le. Az, hogy pontosan 3 fej nő vissza a két kör alatt, nem lehetséges, hiszen az első körben ha az egyik sárkányon legalább két fejet levág, az mindkét körben növeszt vissza fejet, ha pedig mindhárom sárkányon 1-1 fejet vág le, a második körben lesz sárkány aki visszanöveszt fejet. Tehát két kör alatt legalább 4 fej növesztődik vissza, így legfeljebb $6-4=2$-vel csökken az fejek összes száma.

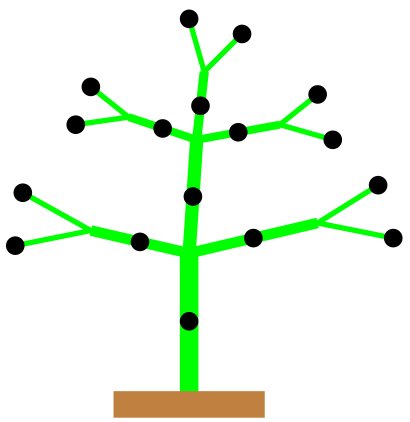
Hasonlóan, amennyiben egy sárkányt már legyőzött Herkules és kettőt még nem, két kör alatt 6 vágásból legalább 3 fej fog visszanőni, amíg le nem győz egy második sárkányt. Mikor már két sárkányt legyőzött, minden körben 2-vel csökken a fejek száma a visszanövés után, amíg le nem győzi a sárkányt, mikor 3-mal csökken a fejek száma.

Tehát két kör alatt a fejek száma legfeljebb 2-vel csökken, amíg Herkules egyik sárkányt se győzte le, legfeljebb 3-mal, amikor 2, és legfeljebb 4-gyel, mikor 1 sárkány van még életben. Így leghamarabb az 5. körben tud legyőzni egy sárkányt, amennyiben az 1-2. és 3-4. körben is neki csökken a fejeinek száma 2-2-vel és az 5. körben Herkules legyőzi. Ezután leghamarabb a 9. körben tudja legyőzni a második sárkányt, hiszen a 6-7. körök alatt összesen 3-mal csökkenhet legfeljebb annak a fejeinek a száma, így 4 marad, melyet le tud gyűrni a 9. körben. Az utolsó sárkányt még 3 körbe telik legyőznie, így leghamarabb a 12. körre tudja elérni hogy a fejek száma 0-ra csökkenjen le.

hányadik kör	1. sárkány	2. sárkány	3. sárkány
	7	7	7
1	4	7	7
1	5	7	7
2	4	6	6
2	5	7	7
3	2	7	7
3	3	7	7
4	2	6	6
4	3	7	7
5	0	7	7
5	vége	7	7
6		5	6
6		6	7
7		3	7
7		4	7
8		2	6
8		3	7
9		0	7
9		vége	7
10			4
10			5
11			2
11			3
12			0
12			vége

B14. Viki a zselés, Kitti a marcipános szaloncukrot szereti, ezekkel díszítik fel a fát. Azt a feltételt találják ki, hogy bárhol is vágnának el egy ágat, a leeső részen a kétféle ízű szaloncukor számának különbsége legfeljebb 1 lehet. Hányféle módon díszíthetik fel a fát, ha a szaloncukrokat a feketével jelölt pontokra helyezik és mindegyik pontra pontosan egyet tesznek?

A vágás egy ágra merőlegesen történik, és nem érint egy elágazást sem.



Megoldás:

Nézzük meg az **Y** alakú favégződéseket. Ezeknek a két végén különböző ízű szaloncukrok lesznek, mivel ha pont ezeket vágnánk le és ugyanolyanok lennének, akkor a vizsgált különbség 2 lenne.

Ha egy ilyen favégződést végleg levágunk a fáról, akkor egy kisebb fát kapunk, aminek a díszítéseinek a száma az eredeti fa díszítéseinek a számának a fele lesz, mivel egy **Y** alakú ágat kétféleképpen díszíthetünk, és a többi levágást nem befolyásolja, mert mindkét ízhez 1-gyel járul hozzá, azaz a különbséget nem módosítja.

Vágjuk le az 5 külső ilyen favégződést a fáról. Ez egy $2^5 = 32$-vel való szorzást fog jelenteni.

A megmaradt fánk tetején van egy hármas elágazás, melynek végén lévő szaloncukorhelyekre hatféleképpen lehet szaloncukrot rakni, mivel kiválaszthatjuk, hogy melyik ízből és melyik helyre $(2 \cdot 3 = 6)$ kerüljön az egyik ízű szaloncukor, a másik kettő meg már egyértelmű a másik ízűből.

Vegyük észre, hogy ezek után a két elágazás közti szaloncukor helyen is egyértelmű, hogy milyen íz lesz, mivel ugyanolyannak kell lennie, minta fenti 3 közül az egyedüli íz.

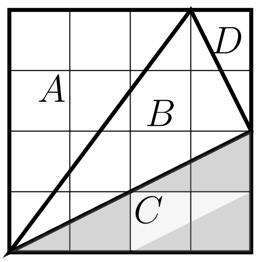
Ha ezeket az ágakat is levágjuk (6-os szorzó), akkor még egy **Y** alakot levágva (2-es szorzó) egy olyan fát kapunk, ami egy ágból áll rajta egy szaloncukorhellyel, amin kétféle szaloncukor lehet (2-es szorzó).

Tehát a díszítések száma: $2^5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 = 768$.

B15. Bontsatok fel egy 4 egység oldalú négyzetet négy derékszögű háromszögre úgy, hogy a háromszögek területei különböző egész számok legyenek. Mennyi a négy háromszög területének szorzata?

Megoldás:

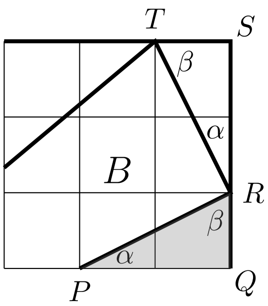
A háromszögekre bontás (jelöljük a négy háromszöget az ábra szerint az A, B, C és D betűkkel):



Lássuk be, hogy ezek a háromszögek derékszögűek és a területük egész.

Az A, C és D háromszögek két-két oldala illeszkedik a négyzet két szomszédos oldalára, így ezek derékszöget zárnak be. Egy derékszögű háromszög területe egyenlő a két befogó szorzatának a felével. Azaz az A területe $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$, a C területe $\frac{4 \cdot 2}{2} = 4$ és a D területe $\frac{2 \cdot 1}{2} = 1$ egység.

A C háromszög két befogójának hossza éppen kétszerese a D két befogójának. Azaz, ha vesszük a C háromszög oldalfelező pontjait, és össszekötjük őket, akkor a C háromszöget négy darab D-re bontottuk. Ezeket az ábrán szürkével jelöltük.



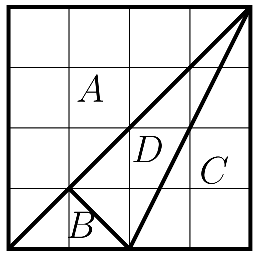
Vegyük a felső szürke háromszöget! Valamint jelöljük ennek a háromszögnek és D-nek a csúcsait a bal oldali ábra szerint. Mivel a két háromszög két oldala és a közbezárt szögük is egyezik, ezért egybevágóak. Azaz a szögeik egyeznek. Mivel a háromszög szögeinek összege 180°, az ábrán α-val és β-val jelölt szögek összege 90°.

Tehát a B háromszögnek az R-nél lévő csúcsa 90°-os, hiszen egy α és egy β szög éppen 180°-ra egészíti ki. Azaz beláttuk, hogy a B háromszög derékszögű.

Mivel a négy háromszög lefedi a négyzetet, aminek a területe $4 \cdot 4 = 16$ egység, ezért a negyedik háromszög területe $16 - 6 - 4 - 1 = 5$.

Tehát a négy háromszög területének szorzata $6 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 = 120$.

A másik lehetőség háromszögekre bontásra (jelöljük a négy háromszöget az ábra szerint az A, B, C és D betűkkel):



Lássuk be, hogy ezek a háromszögek derékszögűek és a területük egész. Az A és C háromszögek két-két oldala illeszkedik a négyzet két szomszédos oldalára, így ezek derékszöget zárnak be. A B háromszög két egyenlőszárú derékszögű háromszögből áll össze, így a legnagyobb belső szöge $2 \cdot 45° = 90°$. Ezt a D háromszög egyik belső szöge $180°$-ra egészíti ki, így az is $90°$-os. Egy derékszögű háromszög területe egyenlő a két befogó szorzatának a felével. Azaz az A területe $\frac{4 \cdot 4}{2} = 8$, a C területe $\frac{4 \cdot 2}{2} = 4$. A B területe $2 \cdot \frac{1 \cdot 1}{2} = 1$ egység. Így a D háromszög területe $16 - 8 - 4 - 1 = 3$ egység.

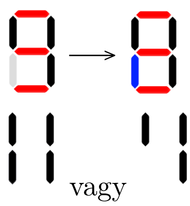
A négy háromszög területének szorzata $8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 96$.

B16. Egy bombán a számláló másodpercenként számol vissza egyesével 99-től 00-ig. Sajnálatos módon a két jegy néhány vonalkijelzője kiégett, ezek nem világítanak. A bomba kijelzőjén épp az ábrán látható vonalak világítanak. Hányféleképpen világíthatnak ez alapján a vonalkijelzők a bombán 1 másodperc múlva?

Alul látható, hogy a kijelző hibátlan állapotban milyen módon jelezné ki az egyes számjegyeket.

Megoldás: A kijelzőn az első számjegy 6-féle lehet: 2, 3, 5, 6, 8 és 9. A második számjegy pedig 0, 4, 8 vagy 9 lehet.

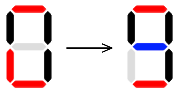
Egy másodperccel később a számlálón 1-gyel kisebb szám áll, azaz ha eredetileg a szám 0, 4, 8, vagy 9-re végződött, akkor most 9, 3, 7, vagy 8-ra.



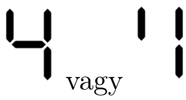
Ha a szám 9-re végződött, akkor a jobb oldali ábrán pirossal jelölt vonalak biztosan nem működnek, míg a fekete vonalak pedig biztosan világítanak. Tehát az ez után következő 8-as szám kiírásánál a fekete vonalak biztos világítanak, a pirosak biztos nem, a kékekről pedig nem tudjuk. Ezért az ábra kétféleképpen nézhet ki, attól függően, hogy jól működik-e a kék vonal.

Ugyanilyen módon nézzük meg, hogy hogyan nézhet ki a tábla utolsó számjegye egy másodperccel 0, 4 vagy 8 után. Szürkével jelöljük azokat a vonalakat, amik nem világítanak, mert nincsenek benne a számban.

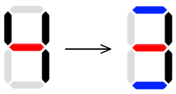
Ha 0-ra végződött:



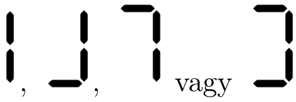
Egy másodperccel később tehát kétféle ábra állhat az utolsó helyen attól függően, hogy a kék vonal működik-e.



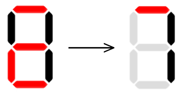
Ha 4-ra végződött:



Egy másodperccel később tehát négyféle ábra állhat az utolsó helyen attól függően, hogy a kék vonalak közül melyik működik. Lehet, hogy egyik sem, csak a felső, csak az alsó, vagy mindkettő világít.



Ha 8-ra végződött:

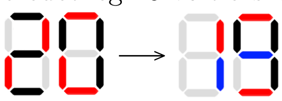


Egy másodperccel később tehát csak egyféleképpen nézhet ki az ábra.

Abban az esetben, ha a második számjegy nem 0, akkor a következő másodpercben ugyanaz áll a tízesek helyén, mint eddig, tehát ugyanaz a három vonalka világít. Azaz, ha a második számjegy 4, 8 vagy 9 volt eredetileg, akkor egy másodperccel később a kijelzőn az első szám nem változott, míg a második ábra **hatféle** lehet. Ugyanis 4-hez 4, a 8-hoz 1, a 9-hez pedig 2 ábra tartozik, de ezek közül kettő azonos. Tehát a talált megoldások:

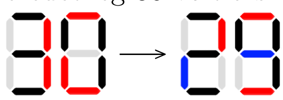
Ha az utolsó számjegy eredetileg 0 volt, akkor egy másodperccel később az első számjegy 1-gyel csökken. Nézzük meg, hogy mi történik, ha a tízesek helyén kezdetben 2, 3, 5, 6, 8 vagy 9 állt.

Ha eredetileg 20 volt a szám:

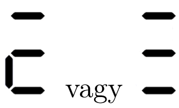


Egy másodperccel később tehát kétféle ábra állhat az első helyen attól függően, hogy a kék vonal működik-e.

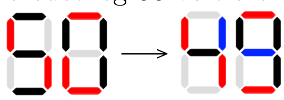
Ha eredetileg 30 volt a szám:



Egy másodperccel később tehát kétféle ábra állhat az első helyen attól függően, hogy a kék vonal működik-e.

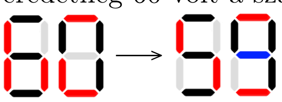


Ha eredetileg 50 volt a szám:



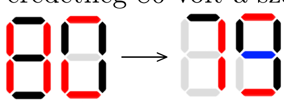
Egy másodperccel később tehát kétféle ábra állhat az első helyen attól függően, hogy a kék vonal működik-e.

Ha eredetileg 60 volt a szám:



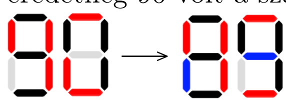
Egy másodperccel később tehát csak egyféleképpen nézhet ki az első számjegy.

Ha eredetileg 80 volt a szám:

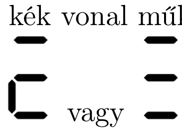


Tehát egy másodperc múlva az első ábra egyféleképpen nézhet ki.

Ha eredetileg 90 volt a szám:



Egy másodperccel később tehát kétféle ábra állhat az első helyen attól függően, hogy a kék vonal működik-e.



Azaz, ha az eredeti szám 0-ra végződött, akkor az első számjegy helyén egy másodperccel később 7 ábra lehet, míg a második számjegy (9) kétféleképpen nézhet ki. Ez 14 lehetőség, azonban ebből egy (Ξ'¦) egyezik a korábbi 6 egyikével, azaz **13** új megoldást találtunk.

Tehát összesen **19-féleképpen** világíthatnak a vonalkijelzők egy másodperccel később.