XVIII.
Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs

F kategória

---

1. feladat

Mivel Micimackó és a labda tömege ugyanakkora, így a labda eldobásakor Micimackó függőleges sebessége is v_y lesz. Ezzel a sebességgel

$$t = 2\frac{v_y}{g} \tag{1.1}$$

idő múlva fog újra visszaérni a perem szintjére. Ekkorra a labdának is vissza kell érnie erre a szintre. Vegyük észre, hogy Micimáckónak és a labdának az „x-koordinátája” mindig meg fog egyezni, hiszen végig ugyanakkora vízszintes sebességük van. Tehát a találkozáshoz elég ha a labda is a perem szintjén van t idővel az eldobás után. A feladat szerint a labda a szakadék aljával is tökéletesen rugalmasan ütközik, így ugyanannyi időt tölt zuhanással, mint emelkedéssel; és a perem szintjének elérése után sebessége újra v_y lesz. A zuhanással töltött időt jelölje t_1. Ekkor ahhoz, hogy Micimackó és a labda találkozzanak a következőnek kell teljesülnie:

$$t_1 = t/2 = \frac{v_y}{g}. \tag{1.2}$$

Ekkor viszont fel tudjuk írni h_2-t:

$$h_2 = v_y t_1 + \frac{g}{2}t_1^2 = v_y\frac{v_y}{g} + \frac{g}{2}\cdot\frac{v_y^2}{g^2} = \frac{v_y^2}{g} + \frac{1}{2}\cdot\frac{v_y^2}{g} = \frac{3}{2}\cdot\frac{v_y^2}{g}. \tag{1.3}$$

Persze h_1-et is fel tudjuk írni, hiszen Micimackó éppen t_1 ideig emelkedett:

$$h_1 = v_y t_1 - \frac{g}{2}t_1^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{v_y^2}{g}. \tag{1.4}$$

A sikeres ugráláshoz még az is szükséges, hogy minden további ugrás is megvalósítható legyen. Vegyük észre, hogy Micimackó és a labda első találkozása után pont ugyanaz történik, mint az eldobás pillanatában, ez pedig garantálja nekünk azt, hogy a többi ugrás is sikeresen végbemehessen. Tehát valóban lehetséges (lenne) Micimackónak átkelnie a szakadék fölött. Az ehhez szükséges h_1/h_2 arány pedig:

$$\boxed{\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{3}}. \tag{1.5}$$

2. feladat

Egy körív tömegközéppontja a szimmetriatengelyen helyezkedik el, a kör középpontjától számított h/φ távolságra, ahol h a körívhez tartozó húr hossza, φ pedig a középponti szög radiánban. Félkörívnél ez $2R/\pi$. A gyűrű tömegközéppontjának s távolsága a geometriai közepétől (feltéve, hogy $m_1 \geq m_2$[1]):

$$m_1\left(\frac{2R}{\pi} - s\right) = m_2\left(\frac{2R}{\pi} + s\right), \tag{2.1}$$

ahonnan:

$$s = \frac{2R}{\pi} \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}. \tag{2.2}$$

A geometriai középpontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték

$$\Theta_\mathrm{K} = m_1 R^2 + m_2 R^2 = MR^2, \tag{2.3}$$

ahol $M = m_1 + m_2$. A Steiner-tétel alapján $\Theta_\mathrm{K} = \Theta_\mathrm{TKP} + Ms^2$, ahonnan

$$\Theta_\mathrm{TKP} = M\left(R^2 - s^2\right). \tag{2.4}$$

Tetszőleges, a tömegközépponttól d távolságra lévő felfüggesztési pontra

$$\Theta_d = \Theta_\mathrm{TKP} + Md^2. \tag{2.5}$$

A fenti paraméterekkel jellemezhető fizikai inga függvénytáblázatban is megtalálható lengésideje:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_d}{Mgd}} = \frac{2\pi}{\sqrt{Mg}}\sqrt{\frac{\Theta_d}{d}}, \tag{2.6}$$

mely akkor minimális, ha Θ_d/d minimális:

$$\frac{\Theta_d}{d} = \frac{\Theta_\mathrm{TKP} + Md^2}{d} = \frac{\Theta_\mathrm{TKP}}{d} + Md. \tag{2.7}$$

Ezt meghatározhatjuk például úgy, hogy alulról becsüljük a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alapján:

$$\frac{\Theta_\mathrm{TKP}}{d} + Md \geq 2\sqrt{\frac{\Theta_\mathrm{TKP}}{d} \cdot Md} = 2\sqrt{M\Theta_\mathrm{TKP}}. \tag{2.8}$$

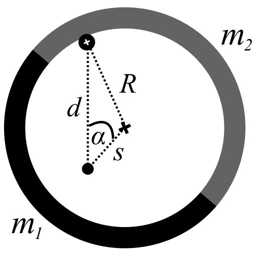
Egyenlőség akkor lép fel, amikor a két tag egyenlő, azaz

$$d = \sqrt{\frac{\Theta_\mathrm{TKP}}{M}}. \tag{2.9}$$

(2.4) és (2.9) alapján:

$$d^2 = R^2 - s^2. \tag{2.10}$$

[1]A másik eset is hasonló módon, ugyanahhoz a megoldáshoz vezet.



2.1. ábra. A felfüggesztett gyűrű.

A koszinusztétel miatt az (2.10) egyenlőség csak akkor áll fent, ha az *ábrán* szereplő α szög derékszög. Vegyük észre, hogy az *ábrán* szereplő d hosszú szakasz mindig függőleges (hiszen ekkor van a gyűrű stabil egyensúlyi helyzetben, ami körül a kis kitérésű lengések periódusidejét vizsgáljuk), így α csak akkor lehet derékszög, ha az s hosszú szakasz vízszintes. Ez pedig csak akkor fordulhat elő, ha úgy akasztjuk fel a gyűrűt, hogy **a két összeillesztési pont egy függőleges egyenes mentén helyezkedjen el**. A minimális lengésidő (2.4), (2.6), (2.7) és (2.8) alapján:

$$T_{\min} = \frac{2\pi}{\sqrt{Mg}}\sqrt{\frac{\Theta_d}{d}} = \frac{2\pi}{\sqrt{Mg}}\sqrt{2\sqrt{M\Theta_{\mathrm{TKP}}}} = 2\pi\sqrt[4]{\frac{4\Theta_{\mathrm{TKP}}}{Mg^2}} = 2\pi\sqrt[4]{\frac{4\left(R^2-s^2\right)}{g^2}}. \tag{2.11}$$

Ebbe (2.2)-t behelyettesítve adódik, hogy

$$\boxed{T_{\min} = 2\pi\sqrt[4]{\frac{4R^2\left[1-\left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2\right]}{g^2}}}. \tag{2.12}$$

Ha $m_1 \gg m_2$ akkor $1 \gg m_2/m_1 \approx 0$, így

$$s = \frac{2R}{\pi}\cdot\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} = \frac{2R}{\pi}\cdot\frac{1-m_2/m_1}{1+m_2/m_1} \approx \frac{2R}{\pi}. \tag{2.13}$$

A fenti egyenlet és (2.10) alapján:

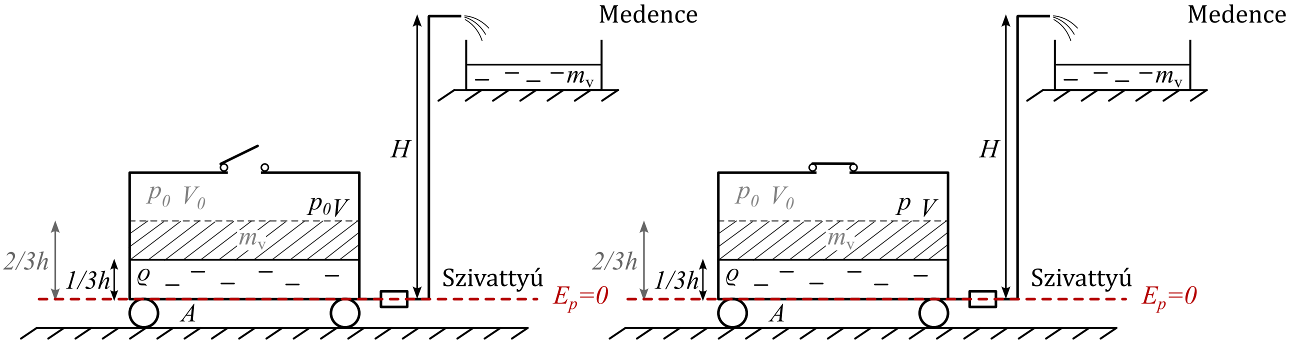
$$d = \sqrt{R^2-\frac{4R^2}{\pi^2}} = \sqrt{R^2\left(1-\frac{4}{\pi^2}\right)}. \tag{2.14}$$

Olyan, mintha az m_2 tömegű félgyűrű ott se lenne, azaz a **felfüggesztési helyek az $\boldsymbol{m_1}$ tömegű félgyűrű súlypontján átmenő, a szimmetriatengelyre merőleges egyenes, és a félkörív metszéspontjain** vannak. A lengésidő (2.10), (2.11) és (2.14) alapján:

$$\boxed{T_{\min} = 2\pi\sqrt[4]{\frac{4R^2\left(1-\frac{4}{\pi^2}\right)}{g^2}}}. \tag{2.15}$$

3. feladat

A megoldás alapgondolata, hogy a szivattyú által végzett munka megegyezik a rendszerben bekövetkező energiaváltozással a medence feltöltése során. Vizsgáljuk meg külön-külön a nyitott és zárt tartály esetét! Ezeket szemlélteti a 3.1. ábra.



(a) Nyitott tartály. (b) Zárt tartály.

3.1. ábra. A vizsgált két eset.

Nyitott tartály esete

Ebben az esetben a szivattyú által végzett munka pusztán a víz helyzeti energiájának megváltoztatására fordítódik (felhasználva, hogy a kicsurgó víz sebessége elhanyagolhatóan kicsi), hiszen a mozgó víztömeg mindkét oldalon kapcsolatban áll a külső levegővel, így a két oldalon a légkör által végzett munka épp kioltja egymást. A potenciális energia nullszintjét a szivattyú magasságában felvéve a helyzeti energia megváltozása:

$$\Delta E_\mathrm{h} = m_\mathrm{v} g H - m_\mathrm{v} g \left(\frac{1}{3}h + \frac{1}{6}h\right), \tag{3.1}$$

részletezve:

$$\Delta E_\mathrm{h} = \varrho A \frac{1}{3} h g H - \varrho A \frac{1}{3} h g \frac{1}{2} h = \varrho A g h \left(\frac{1}{3}H - \frac{1}{6}h\right). \tag{3.2}$$

Ebben az esetben a szivattyú által végzett munka tehát

$$\boxed{W_\mathrm{ny} = \varrho A g h \left(\frac{2H - h}{6}\right)}. \tag{3.3}$$

Zárt tartály esete

Zárt tartály esetén a különbséget az előző esethez képest az jelenti, hogy itt a folyadék kezdetben el van zárva a külső légkörtől, a medencébe jutva azonban kapcsolatba kerül vele; így nem egyezik a víztömeg két oldalán a gáz által végzett munka. Ebből adódóan megjelenik további két tag az energiaváltozás felírásakor.

Egyrészt a bezárt gáz izoterm módon (hiszen a tartály fala jó hővezető) kitágul, az ennek során végzett munka

$$W_\mathrm{g} = p_0 V_0 \ln \frac{V}{V_0}, \tag{3.4}$$

részletezve a térfogatokat:

$$W_\mathrm{g} = p_0 A \frac{1}{3} h \ln \left(\frac{2/3hA}{1/3hA} \right) = \frac{\ln 2}{3} p_0 A h. \tag{3.5}$$

A légkör munkája:

$$W_\mathrm{l} = -p_0 \Delta V = -\frac{1}{3} p_0 A h. \tag{3.6}$$

A szivattyú által végzett munka

$$W_\mathrm{z} = W_\mathrm{ny} - W_\mathrm{g} - W_\mathrm{l}, \tag{3.7}$$

$$W_\mathrm{z} = W_\mathrm{ny} - \frac{\ln 2}{3} p_0 A h + \frac{1}{3} p_0 A h, \tag{3.8}$$

$$\boxed{W_\mathrm{z} = W_\mathrm{ny} + \frac{1 - \ln 2}{3} p_0 A h}. \tag{3.9}$$

Mivel $(1 - \ln 2) > 0 \implies W_\mathrm{z} > W_\mathrm{ny}$, tehát valóban **kisebb munkát végzett volna a szivattyú kinyitott tartály esetén**, így Pat-nek volt igaza.

Megjegyzés: A megoldás során könnyű lehet „elfeledkezni” a légkör által okozott tagokról. Ez a hibalehetőség csökkenthető, ha a feladatot a mérnöki gyakorlatban gyakran alkalmazott *entalpia* fogalmával gondoljuk végig. Ennél a módszernél nincs más dolgunk, mint felvenni egy „ellenőrző téfogatot” a nyílt termodinamikai rendszer körül, majd az így lehatárolt térfogatban az állapotváltozásból származó *fizikai munkához* hozzáadni a rendszerhatáron történő anyag *be*-, illetve *kilépési munkáját*. E három munka összege (a rendszerben esetlegesen bekövetkező helyzeti-, illetve mozgási energiaváltozással kiegészítve) adja az úgynevezett *technikai munkát*, mely a szivattyú által végzett munkát jelenti.

4. feladat

Az első ajtó kiszakadása előtt adiabatikus változás megy végbe, hiszen minden fal hőszigetelő, így a környezettel nem cserélődik hő. Az adiabatikus folyamatkora jellemző egyenlet:

$$p_1 V_1^\kappa = p_0 V_0^\kappa. \tag{4.1}$$

Tudjuk, hogy az ajtó teherbírása

$$F_\alpha = A_1 p_\alpha. \tag{4.2}$$

Felhasználva a (4.1)-es egyenletet, felírhatjuk a gáz térfogatát közvetlenül az első ajtó kiszakadása előtt:

$$V_\alpha = V_0 \cdot \left(\frac{A_1 p_0}{F_\alpha}\right)^{1/\kappa}, \tag{4.3}$$

tehát a dugattyú magassága

$$h_\alpha = h_0 \cdot \left(\frac{A_1 p_0}{F_\alpha}\right)^{1/\kappa}. \tag{4.4}$$

Ide behelyettesítve $h_\alpha = 1{,}11\,\mathrm{m}$, ahol h_0 a kezdeti magasság. A magasságváltozás

$$\Delta h\alpha = h_0 \left[1 - \left(\frac{A_1 p_0}{F_\alpha}\right)^{1/\kappa}\right]. \tag{4.5}$$

Az idáig eltelt időt kifejezhetjük a dugattyú sebességével:

$$t_\alpha = \frac{h_0}{v} \cdot \left[1 - \left(\frac{A_1 p_0}{F_\alpha}\right)^{1/\kappa}\right]. \tag{4.6}$$

Erre behelyettesítés után $t_\alpha = 18{,}86\,\mathrm{s}$ adódik.

Az első ajtó kiszakadása után a légmentes térrészbe beáramlik a levegő, és kitölti azt; hiszen az egész térrészben azonos a nyomás, mely így kisebb lesz az előtte mért értékhez képest. Itt nem használhatjuk az adiabatikus megváltozásra vonatkozó képletet, mivel a folyamat nem közelíthető oly módon, hogy egyensúlyi állapotokon halad keresztül. Viszont a belsőenergia-megmaradás továbbra is igaz lesz, hiszen minden fal hőszigetelő, és külső erők nem végeznek munkát (hiszen a dugattyú nem mozdul el az ajtó pillanatszerű kiszakadása alatt). Ezek alapján

$$E_{\mathrm{b}_1} = E_{\mathrm{b}_2}, \tag{4.7}$$

$$\frac{f}{2} p_\alpha V_\alpha = \frac{f}{2} p_2 V_2. \tag{4.8}$$

Itt p_2, V_2 a kiszakadás utáni légtérfogat és nyomás. Mivel ugyanarról a gázról van szó végig, így f-el egyszerűsíthetünk. Innen kifejezve p_2-t:

$$p_2 = p_\alpha \cdot \frac{V_\alpha}{V_\alpha + L A_1}. \tag{4.9}$$

Itt felhasználtuk, hogy az ajtók közti térrész térfogata $\Delta V = LA_1$. Ezt követően ismét adiabatikusan csökken a gáz térfogata, és nő a nyomása egészen a második ajtó kiszakadásáig. Tehát a nyomások és a térfogatok között az alábbi formula teremt kapcsolatot:

$$p_2 V_2^\kappa = p_\beta V_\beta^\kappa. \tag{4.10}$$

Tudjuk, hogy az ajtó teherbírása F_β. Mivel az ajtón kívül p_0 nyomású levegő található, ezért a benti és a kinti nyomásból származó erők eredőjének kell túllépnie F_β-t ahhoz, hogy az ajtó kiszakadjon. Tehát a kritikus nyomás:

$$p_\beta = \frac{F_\beta}{A_1} + p_0. \tag{4.11}$$

Ezt beírva a (4.10)-es egyenletbe, majd V_β-t kifejezve:

$$V_\beta = V_2 \cdot \left(\frac{A_1 p_2}{F_\beta + A_1 p_0} \right)^{1/\kappa}. \tag{4.12}$$

A mérnök akkor nem válik palacsintává, ha a második ajtó kiszakadásának pillanatában a dugattyú legalább $\sqrt{A_1}$ magasságra van a talajtól. Ezt a térfogattal kifejezve:

$$V_\beta \geq A_1 L + A_0 \cdot \sqrt{A_1}. \tag{4.13}$$

Tehát csak be kell helyettesíteni p_2 és V_2 értékét (4.12)-be és megnézni, hogy ez a feltétel teljesül-e. A (4.9)-es egyenletbe V_α-t helyettesítve kapjuk p_2-t a megadott paraméterekkel kifejezve:

$$p_2 = \frac{F_\alpha}{A_1} \cdot \frac{V_0 \cdot \left(\frac{A_1 p_0}{F_\alpha} \right)^{1/\kappa}}{V_0 \cdot \left(\frac{A_1 p_0}{F_\alpha} \right)^{1/\kappa} + LA_1}. \tag{4.14}$$

Ezt ki is számolhatjuk, $p_2 = 3{,}74 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$ adódik. Ha külön nem számoljuk ki p_2-t, akkor paraméteresen ezt és V_2-t beírva a (4.12)-es egyenletbe:

$$V_\beta = \left(V_0 \cdot \frac{F_\alpha}{F_\beta + A_1 p_0} \right)^{1/\kappa} \cdot \left(\frac{A_1 p_0}{F_\alpha} \right)^{1/\kappa^2} \left[V_0 \cdot \left(\frac{A_1 p_0}{F_\alpha} \right)^{1/\kappa} + LA_1 \right]^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}}. \tag{4.15}$$

Ide behelyettesítve azt kapjuk, hogy $V_\beta \approx 3{,}81\,\mathrm{m}^3$. A (4.13)-as egyenlet jobb oldalát kiszámolva azt kapjuk, hogy $V_{\max} = 2{,}875\,\mathrm{m}^3$ térfogat szükséges ahhoz, hogy a mérnököt ne nyomja össze a prés. Mivel V_β nagyobb ennél, így **főhősünk élve megússza a kalandot**.

5. feladat

Első lépésként vizsgáljuk azt a folyamatot, amikor a lemez töltése Q[2] és határozzuk meg a kilövés és a becsapódás között eltelt időt. A Gauss-törvény alkalmazásával a térerősségre az $2AE = Q/\varepsilon_0$ összefüggést kapjuk. Ebből kifejezve a térerősséget:

$$E = \frac{Q}{2A\varepsilon_0}, \tag{5.1}$$

majd felhasználva Newton II. törvényét az alábbiakra jutunk:

$$ma = qE = \frac{qQ}{2A\varepsilon_0} \implies a = \frac{qQ}{2Am\varepsilon_0}. \tag{5.2}$$

Ahol $m = n \cdot m_e$ az elektroncsomag teljes tömege és $q = n \cdot e$ az elektroncsomag teljes töltése. Feltéve, hogy a kezdeti sebessége az elektronokból álló csomagoknak v_0, és L utat kell megtenniük a becsapódásig, a következőket írhatjuk fel:

$$v_0 t - \frac{1}{2}at^2 = L, \tag{5.3}$$

amit t-re megoldva:

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2aL}}{-a} = \frac{v_0 \mp \sqrt{v_0^2 - 2aL}}{a}. \tag{5.4}$$

A két gyök közül a kisebbet kell választanunk, mivel ez tartozik ahhoz, amikor először eléri az elektroncsomag a lemezt:

$$t = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2aL}}{a} = 2mA\varepsilon_0 \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2\frac{qQ}{2mA\varepsilon_0}L}}{qQ}. \tag{5.5}$$

Tudjuk, hogy $t < \tau$, azaz a következő kilövés azután következik be, hogy az előző elektroncsomag becsapódott. Ekkor a következőt írhatjuk fel a $(k+1)$-edik elektroncsomagnak az első elektroncsomag kilövésétől számított T_{k+1} becsapódási idejére (ha $k > 0$, a $k = 0$ esetben $T_0 = L/v_0$):

$$T_{k+1} = k\tau + 2mA\varepsilon_0 \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2\frac{kq^2}{2mA\varepsilon_0}L}}{kq^2}. \tag{5.6}$$

Ahol kihasználtuk, hogy a $(k+1)$-dik csomag repülése közben a lemez töltése mindvégig $Q = k \cdot q$. Ebből a két becsapódás között eltelt idő már egyszerűen meghatározható. Legyen

$$\tilde{\tau} \coloneqq T_{k+1} - T_k = \tau + 2mA\varepsilon_0 \left(\frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - \frac{kq^2}{mA\varepsilon_0}L}}{kq^2} - \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - \frac{(k-1)q^2}{mA\varepsilon_0}L}}{(k-1)\,q^2} \right). \tag{5.7}$$

Felhasználva, hogy a lemez kellően nagy[3], az alábbi egyenlőségre jutunk:

[2] Ez egy csomag repülési ideje alatt állandó.
[3] Ezt korábban is megtettük a térerősség kiszámításánál: $L/\sqrt{A} \ll 1$

$$\sqrt{v_0^2 - \frac{kq^2}{mA\varepsilon_0}L} = v_0\sqrt{1 - \frac{kq^2}{mA\varepsilon_0 v_0^2}L} \approx v_0\left(1 - \frac{kq^2}{2mA\varepsilon_0 v_0^2}L - \frac{1}{8}\left(\frac{kq^2 L}{mA\varepsilon_0 v_0^2}\right)^2\right), \tag{5.8}$$

innen

$$\frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - \frac{kq^2}{mA\varepsilon_0}L}}{kq^2} \approx v_0\left(\frac{L}{2mA\varepsilon_0 v_0^2} + \frac{1}{8}kq^2\left(\frac{L}{mA\varepsilon_0 v_0^2}\right)^2\right). \tag{5.9}$$

Ezt felhasználva, és behelyettesítve az (5.7) egyenlet zárójelében lévő kifejezésre

$$\begin{aligned}
&\frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - \frac{kq^2}{mA\varepsilon_0}L}}{kq^2} - \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - \frac{(k-1)q^2}{mA\varepsilon_0}L}}{(k-1)\,q^2} \approx \\
\approx\;& v_0\left(\frac{L}{2mA\varepsilon_0 v_0^2} + \frac{1}{8}kq^2\left(\frac{L}{mA\varepsilon_0 v_0^2}\right)^2\right) - v_0\left(\frac{L}{2mA\varepsilon_0 v_0^2} + \frac{1}{8}(k-1)\,q^2\left(\frac{L}{mA\varepsilon_0 v_0^2}\right)^2\right) \\
=\;& v_0\left(\frac{1}{8}kq^2\left(\frac{L}{mA\varepsilon_0 v_0^2}\right)^2\right) - v_0\left(\frac{1}{8}(k-1)\,q^2\left(\frac{L}{mA\varepsilon_0 v_0^2}\right)^2\right) = \frac{1}{8}v_0 q^2\left(\frac{L}{mA\varepsilon_0 v_0^2}\right)^2
\end{aligned} \tag{5.10}$$

adódik, melyből pedig

$$\boxed{\tilde{\tau} = \tau + \frac{1}{4}\frac{ne^2L^2}{m_e A\varepsilon_0 v_0^3}} \tag{5.11}$$

eredményre jutunk.