

XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



1. feladat

(a)

Amíg a hullám visszajut a denevérhez, összesen két Doppler-effektuson megy keresztül. Először, mikor a hullám találkozik a kővel, majd utána, mikor a visszavert hullám eléri a denevért. Amikor a hullám eléri a követ, akkor a hullám forrása a denevér, a megfigyelő pedig a kő. A forrás a megfigyelő felé halad, a megfigyelő pedig a forrástól távolodik, tehát a Doppler-effektus miatt az új frekvencia:

$$f' = f_0 \cdot \frac{c - u_1}{c - v_D}, \quad (1.1)$$

ahol u_1 jelöli a kő sebességét abban a pillanatban, amikor elérte a hullám. Amikor a visszavert hullám eléri a denevért, akkor a forrás a kő, ami távolodik a megfigyelőtől, azaz a denevértől. Ez alapján a denevér által érzékelt frekvencia:

$$f_1 = f' \cdot \frac{c + v_D}{c + u_1}. \quad (1.2)$$

Ide (1.1)-et behelyettesítve:

$$f_1 = \frac{c + v_D}{c + u_1} \cdot \frac{c - u_1}{c - v_D} \cdot f_0. \quad (1.3)$$

Ebből az egyenletből szeretnénk először u_1 -et kifejezni. Bevezetve az $\eta = f_0/f_1$ jelölést, illetve keresztbe szorozva:

$$(c + u_1)(c - v_D) = \eta(c + v_D)(c - u_1). \quad (1.4)$$

Ezeket kifejtve, és a közös tagokat összevonva:

$$u_1(c - v_D + \eta c + \eta v_D) = c^2(\eta - 1) + cv_D(\eta + 1), \quad (1.5)$$

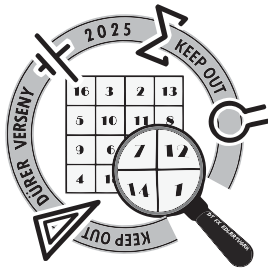
majd innen a kő sebességét kifejezve:

$$u_1 = c \cdot \frac{c(\eta - 1) + v_D(\eta + 1)}{c(\eta + 1) + v_D(\eta - 1)}. \quad (1.6)$$

Bevezetve a $k = v_D/c$ jelölést, egy kicsit szebb alakra hozható a fenti egyenlet:

$$u_1 = c \cdot \frac{\eta(k + 1) + (k - 1)}{\eta(k + 1) - (k - 1)}. \quad (1.7)$$

Ez lesz a kő sebessége akkor, amikor a hullám eléri; tehát ez még nem a keresett sebesség. Ahhoz, hogy azt megkapjuk, vizsgáljuk a testek közti távolságokat!



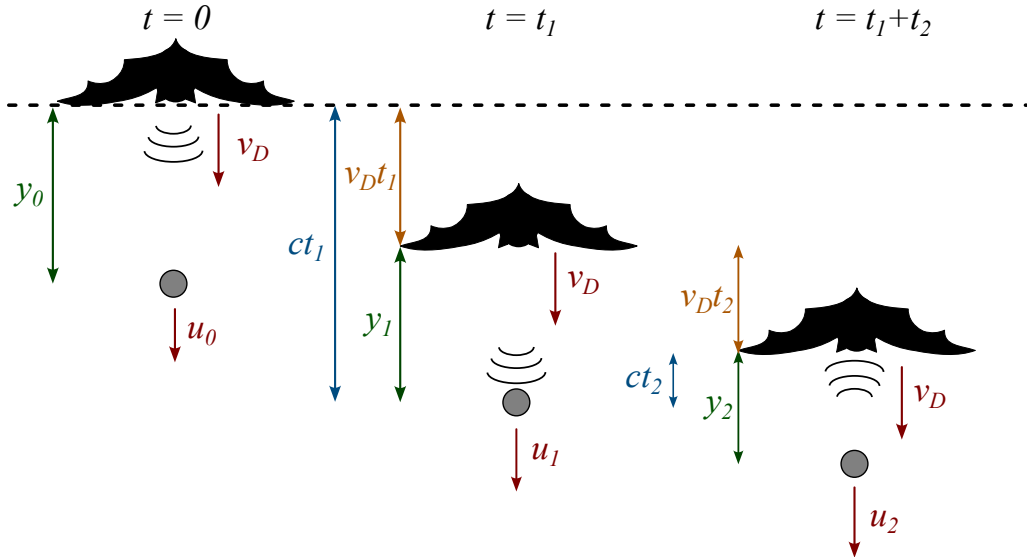
XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



kategória



1.1. ábra. A denevér és a kő helyzete a kritikus pillanatokban.

Az 1.1-es ábrán látható távolságokat kifejezhetjük, felhasználva, hogy a denevér egyenes vonalú egyenletes mozgást végez v_D sebességgel, a kő pedig szabadesik, így gyorsulása g . Az ábra alapján felírhatjuk az alábbi egyenleteket:

$$y_1 = ct_1 - v_D t_1, \quad (1.8)$$

majd hasonló módon a második helyzetre:

$$y_1 = ct_2 + v_D t_2. \quad (1.9)$$

Ezekből t_2 -t kifejezve:

$$t_2 = \frac{c - v_D}{c + v_D} t_1. \quad (1.10)$$

Felhasználva, hogy a teljes idő $T = t_1 + t_2$:

$$T = \frac{2c}{c + v_D} t_1, \quad (1.11)$$

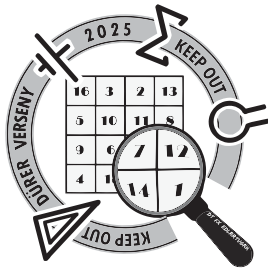
melyből t_1 kifejezhető:

$$t_1 = \frac{c + v_D}{2c} T. \quad (1.12)$$

Használva a korábban bevezetett k paramétert, szép formulával felírhatjuk t_1 és t_2 kifejezéseket:

$$t_1 = \frac{1 + k}{2} T, \quad (1.13)$$

$$t_2 = \frac{1 - k}{2} T. \quad (1.14)$$



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



F+

 kategória

Innen t_1 -et (1.8)-ba behelyettesítve:

$$y_1 = cT \cdot \frac{1 - k^2}{2}. \quad (1.15)$$

Visszatérve az 1.1-es ábrához, felírható a kiindulási és a t_1 beli távolságok közti kapcsolat:

$$y_1 = y_0 - v_D t_1 + u_0 t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2. \quad (1.16)$$

Továbbá a második helyzetben a kő sebessége a kezdeti sebességgel kifejezve:

$$u_1 = u_0 + g t_1, \quad (1.17)$$

ezt rendezve u_0 -ra:

$$u_0 = u_1 - g t_1, \quad (1.18)$$

amit beírva az (1.16)-os képletbe:

$$y_1 = y_0 + (u_1 - v_D) t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2. \quad (1.19)$$

Ezt y_0 -ra rendezve:

$$y_0 = y_1 + (v_D - u_1) t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2. \quad (1.20)$$

Ide behelyettesítve a (1.13)-mas és (1.15)-ös egyenletekből t_1 -et és y_1 -et:

$$y_0 = cT \cdot \frac{1 - k^2}{2} + \left(k - \frac{u_1}{c}\right) \cdot cT \cdot \frac{1 + k}{2} + \frac{1}{2} g T^2 \left(\frac{1 + k}{2}\right)^2, \quad (1.21)$$

ahonnan kiemelések után:

$$y_0 = cT \cdot \frac{1 + k}{2} \cdot \left(1 - \frac{u_1}{c}\right) + \frac{1}{2} g T^2 \left(\frac{1 + k}{2}\right)^2. \quad (1.22)$$

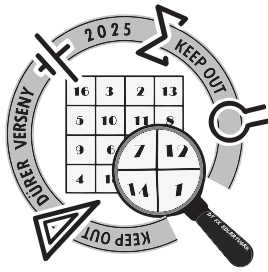
Ide az (1.7)-es egyenletet behelyettesítve kapjuk a keresett távolságot:

$$y_0 = cT \cdot \frac{1 + k}{2} \cdot \left(1 - \frac{\eta(k + 1) + (k - 1)}{\eta(k + 1) - (k - 1)}\right) + \frac{1}{2} g T^2 \left(\frac{1 + k}{2}\right)^2. \quad (1.23)$$

A középső zárójelben közös nevezőre hozva, és egyszerűsítések után:

$$\boxed{y_0 = cT \cdot \frac{1 - k^2}{\eta(k + 1) - (k - 1)} + \frac{1}{2} g T^2 \left(\frac{1 + k}{2}\right)^2}. \quad (1.24)$$

A keresett sebességet pedig úgy kapjuk, hogy az (1.7)-es egyenletbe behelyettesítjük az (1.18)-as és az (1.13)-as egyenleteket:



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



F+

kategória

$$u_0 = c \cdot \frac{\eta(k+1) + (k-1)}{\eta(k+1) - (k-1)} - gT \cdot \frac{1+k}{2}. \quad (1.25)$$

Behelyettesítve a megadott adatokat azt kapjuk, hogy a kő sebessége a hanghullám indulásának pillanatában $u_0 = 6,5 \text{ m/s}$, amikor elérte a hullám, akkor pedig $u_1 = 7 \text{ m/s}$. A kő és a denevér közti kezdei távolságra pedig az adódik, hogy $y_0 \approx 17,4 \text{ m}$.

(b)

Itt is ugyanúgy két Doppler-effektus fog lejátszódni, és használhatjuk az előző részben levezetett (1.3)-as képletet:

$$f_1 = \frac{c + v_b}{c + u_{\max}} \cdot \frac{c - u_{\max}}{c - v_b} \cdot f_0, \quad (1.26)$$

ahol v_b jelöli a denevér sebességét, ami 0 és v_D között van. Tudjuk, hogy a h_0 magasságba dobott kő maximális sebessége (amivel becsapódik a talajba) $u_{\max} = \sqrt{2gh_0}$. Ezt beírva a fenti egyenletbe:

$$f_1 = \frac{c + v_b}{c + \sqrt{2gh_0}} \cdot \frac{c - \sqrt{2gh_0}}{c - v_b} \cdot f_0. \quad (1.27)$$

Az biztos, hogy a hullám frekvenciája nőni fog, tehát a denevér egy magasabb hangot érzékel. A fenti egyenletből könnyen látható, hogy akkor lesz a frekvenciák aránya maximális, ha v_b is maximális, tehát $v_b = v_D$. Ahhoz tehát, hogy bármilyen gyorsan haladva is érzékelje a követ, a denevérnek legalább

$$f_{\max} = \frac{c + v_D}{c + \sqrt{2gh_0}} \cdot \frac{c - \sqrt{2gh_0}}{c - v_D} \cdot f_{\min} \quad (1.28)$$

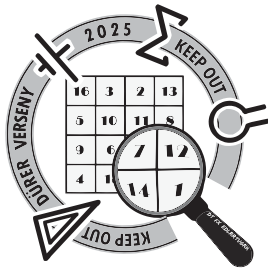
frekvenciájú hullámok érzékelésre kell képesnek lennie. **Ez behelyettesítések után 46,37 kHz-nek adódik.**

(c)

Itt is két Doppler-effektus fog lejátszódni, azonban változik a testek egymáshoz viszonyított mozgási iránya, hiszen a kő a denevér felé repül. Élhetünk a feltételezéssel, hogy a denevér által kibocsájtott egyik hangimpulzus éppen a dobás utáni pillanatban éri el a követ. (Ez teljesen reális, a denevérek hanghullámai nagyon gyorsan követik egymást.) Ekkor az első Doppler-effektus után a kőről visszavert hang frekvenciája:

$$f' = f_0 \cdot \frac{c + v_0}{c}, \quad (1.29)$$

ahol v_0 a kő kezdeti sebessége. A képletben nem szerepel a denevér sebessége, hiszen az nulla. A második Doppler-effektus is hasonlóan fest, csak ott most is felcserélődik a megfigyelő és a forrás szerepe, így



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



kategória

$$f_1 = f' \cdot \frac{c}{c - v_0}, \quad (1.30)$$

$$f_1 = \frac{c + v_0}{c - v_0} \cdot f_0. \quad (1.31)$$

Megint bevezetve az $\eta = f_0/f_1$ jelölést, és a fenti egyeletet rendezve:

$$v_0 = c \cdot \frac{1 - \eta}{1 + \eta}. \quad (1.32)$$

Mivel a hullámok most is „összenyomódnak” (nő a frekvenciájuk), így a denevérnek úgy van a legjobb esélye érzékelni a követ, ha a legalacsonyabb frekvenciájú hullámaival pásztázza a környezetet. Tehát $f_0 = 45$ kHz, $f_1 = 80$ kHz (a hallási tartomány teje). Ezeket és c értékét behelyettesítve:

$$v_0 = 95,2 \text{ m/s} = 342,72 \text{ km/h}. \quad (1.33)$$

Ha ennél nagyobb kezdősebességgel dobja fel Watson a követ, akkor a Doppler-effektus révén annyira megnő a denevér által érzékelt hullámok frekvenciája, hogy az már kiesik az érzékelési tartományából. Láthatjuk, hogy óriási sebességgel kellene elindítani a követ ahhoz, hogy ez megtörténjen, ezért nem jelent ez problémát a denevéreknek a természetben.

2. feladat

(a)

A megoldás során a vektorokat félkövérrel jelöljük, míg nagyságukat hagyományos betűvel, tehát $|\mathbf{v}| = v$. A robbanás a pálya síkjában minden irányban Δv sebességgel szórta szét a darabokat. Ahol ez a sebesség egy irányba esett a \mathbf{v}_0 kerületi sebességgel ott a darabkák felgyorsultak annyira, hogy elérjék a szökési sebességet, és így elhagyták a Düránusz gravitációs terét.

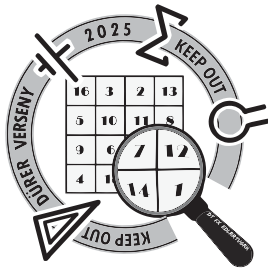
(b)

A problémát érdemes energetikai szempontból vizsgálni. A hold körpályán keringett a Düránusz körül, ezért kezdeti potenciálja:

$$U_0 = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\gamma M}{r_0} = -\frac{v_0^2}{2}, \quad (2.1)$$

mivel a körmozgás feltételéből következik hogy:

$$v_0^2 = \frac{\gamma M}{r_0}. \quad (2.2)$$



XVIII. Dürer Verseny

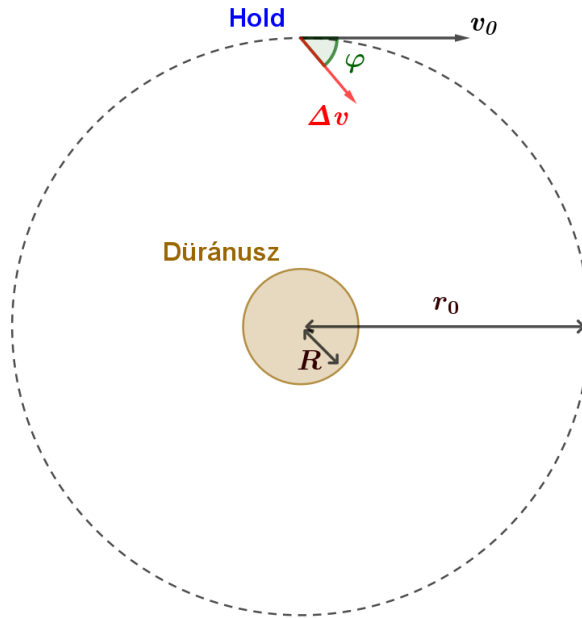
Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



F+

kategória



2.1. ábra. A hold szétrobbanásának pillanata.

A 2.1-es ábra alapján vizsgáljuk meg azt a törmelékdarabkát, mely a robbanás következtében a v_0 kerületi sebességhez képest φ szöget bezáróan kapott Δv nagyságú sebességet. Ennek érintőirányú sebesség komponense $v_0 + \Delta v \cdot \cos \varphi$, sugárirányú komponense pedig $\Delta v \cdot \sin \varphi$. Tehát a teljes sebességének nagysága:

$$v(\varphi) = \sqrt{(v_0 + \Delta v \cdot \cos \varphi)^2 + (\Delta v \cdot \sin \varphi)^2}. \quad (2.3)$$

Ez alapján a vizsgált darabka potenciálja:

$$U(\varphi) = \frac{(v_0 + \Delta v \cos \varphi)^2 + (\Delta v \sin \varphi)^2}{2} - \frac{\gamma M}{r_0} \quad (2.4)$$

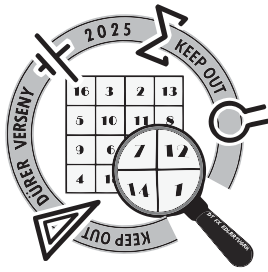
A zárójeleket kibontva, majd az utolsó tag helyére (2.2)-ből v_0^2 -et behelyettesítve:

$$U(\varphi) = \frac{v_0^2 + 2\Delta v v_0 \cos \varphi + \Delta v^2}{2} - v_0^2 = \frac{-v_0^2 + 2\Delta v v_0 \cos \varphi + \Delta v^2}{2}. \quad (2.5)$$

Egy törmelékdarabka elhagyhatja a Düránusz gravitációs terét, ha $U(\varphi) \geq 0$. Vizsgáljuk a kritikus $\varphi = \alpha$ határesetet, amikor $U(\alpha) = 0$. A (2.5) egyenletből látszik, hogy $U(\varphi)$ monoton csökkenő függvény a $\varphi \in [0, \pi]$ intervallumon, ezért ha $\varphi \leq \alpha$, akkor $U(\varphi) \geq 0$.

A (2.5) egyenletet Δv -re megoldva:

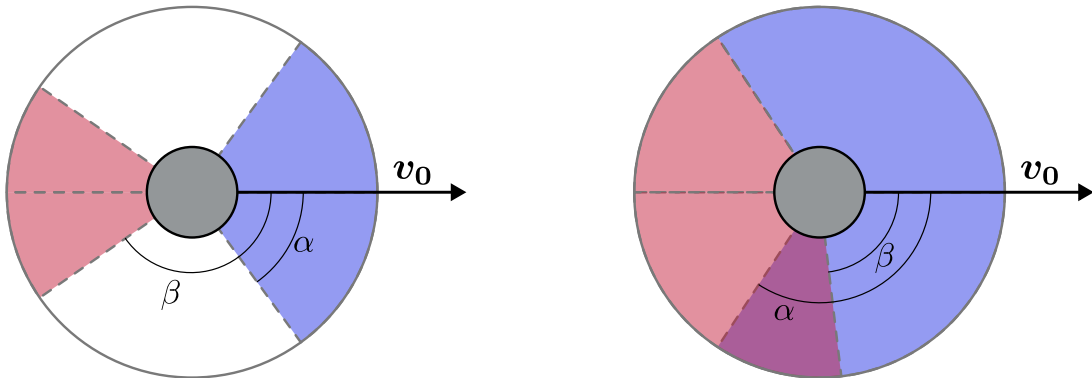
$$\begin{aligned} \Delta v &= \frac{-2v_0 \cos \alpha \pm \sqrt{4v_0^2 \cos^2 \alpha + 4v_0^2}}{2} \\ \Delta v &= -v_0 \cos \alpha \pm v_0 \sqrt{\cos^2 \alpha + 1}. \end{aligned} \quad (2.6)$$



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



- (a) Vannak a Düránusz körül pályára álló darabok, melyek a fehér tartományból indulnak. (b) Nincsenek a Düránusz körül pályára álló darabok, mivel a piros és kék tartomány átfed.

2.2. ábra. A törmelékdarabok egyes kategóriáihoz tartozó kiindulási szögtartományok a robbanás pillanatában. Azon törmelékek, melyekre $U(\varphi) \geq 0$ a kékkel jelölt tartományból indulnak, míg a bolygóba becsapódó darabok a pirossal jelölt tartományból.

Honnan tudjuk, hogy nincs olyan törmelékdarabka, mely elhagyhatná a bolygó gravitációs terét, de becsapódik abba? Tegyük fel, hogy van olyan $\varphi = \varphi^*$ szöghöz tartozó darabka, melyre $U(\varphi^*) \geq 0$, viszont mégis becsapódik (ezt a 2.2b. ábra szemlélteti). Ez azt jelenti, hogy minden $\varphi > \varphi^*$ szöghöz tartozó darabka is be fog csapódni, mert az energiája és perdülete is kisebb. Ebből az következik, hogy nincs olyan törmelék mely pályára áll, így ellentmondásra jutottunk a feladat szövegét figyelembe véve. Ezzel bizonyítottuk, hogy minden törmelék ami megszökhet ténylegesen meg is szökik (ezt a 2.2a. ábra szemlélteti).

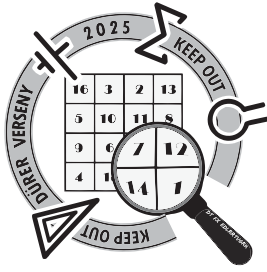
A darabok impulzumomentuma és energiája megegyezik a φ és $-\varphi$ szögekre, mivel sebességeik nagysága és érintő irányú komponenseik megegyeznek. Ezek alapján a holdnak α/π része hagyja el a Düránusz gravitációs terét. Ez éppen a „hiányzó” 23 %, így az alábbi egyenlet írható fel:

$$0,23 = \frac{\alpha}{\pi} \Rightarrow \cos \alpha \approx \frac{3}{4}. \quad (2.7)$$

Ezek alapján a keresett arány egyszerűen kiszámolható ¹:

$$\frac{\Delta v}{v_0} \approx \frac{1}{2}. \quad (2.8)$$

¹Megjegyzés: $(\Delta v/v_0)_1 = 0,5$; $(\Delta v/v_0)_2 = -2$. Nyilvánvalóan csak a pozitív megoldásnak van fizikai értelme.



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



F+

kategória

(c)

Vizsgáljunk most egy olyan m tömegű törmelékdarabkát, mely a robbanás következtében a v_0 kerületi sebességhez képest φ szöget bezáróan kapott $\Delta v = v_0/2$ sebességet. A potenciálját a (b) feladatrészben már felírtuk, most nézzük meg a pályaperdületét:

$$N = m(v_0 + \Delta v \cos \varphi)r_0 = m \left(1 + \frac{\cos \varphi}{2}\right) v_0 r_0. \quad (2.9)$$

Jellemezze ezen darabka pályájának fókuszponthoz legközelebbi pontját egy v^* sebesség (mely érintőirányú) és egy r^* sugár. Ismét keressük azt a $\varphi = \beta$ határesetet (mely már a 2.2. ábrán szerepelt) amikor ez a darabka pont becsapódik a Düránusz felszínébe, azaz $r^* = R$. Ekkor a becsapódás előtti pillanatban a perdülete:

$$N^* = m v^* R. \quad (2.10)$$

A perdületmegmardás alapján² $N = N^*$, tehát v^* kifejezhető:

$$v^* = v_0 \left(1 + \frac{\cos \beta}{2}\right) \frac{r_0}{R}. \quad (2.11)$$

Az energiamegmaradásból következik, hogy a kezdeti és a *-al jelölt helyzetben a potenciál megegyezik, tehát $U = U^*$:

$$\frac{(v_0 + \Delta v \cos \beta)^2 + (\Delta v \sin \beta)^2}{2} - \frac{\gamma M}{r_0} = \frac{(v^*)^2}{2} - \frac{\gamma M}{R}. \quad (2.12)$$

Bal oldalt a (2.4)-ben már felírt potenciált látjuk, melynek eredményét megkapjuk, ha (2.5)-be behelyettesítjük a $\Delta v = 1/2 v_0$ értéket. Emellett v^* értékét behelyettesítve, és az utolsó tagot r_0 -al bővítve:

$$\frac{-v_0^2 + v_0^2 \cos \beta + \frac{1}{4}v_0^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} \left(1 + \frac{\cos \beta}{2}\right)^2 \left(\frac{r_0}{R}\right)^2 - \frac{\gamma M}{r_0} \left(\frac{r_0}{R}\right). \quad (2.13)$$

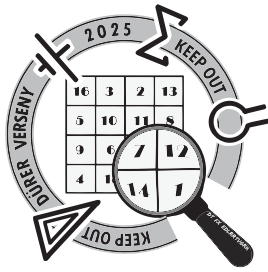
Kihasználva, hogy $\gamma M/r_0 = v_0^2$ és bal oldalon a műveleteket elvégezve:

$$\frac{v_0^2}{2} \left(\cos \beta - \frac{3}{4}\right) = \frac{v_0^2}{2} \left(1 + \frac{\cos \beta}{2}\right)^2 \left(\frac{r_0}{R}\right)^2 - v_0^2 \left(\frac{r_0}{R}\right). \quad (2.14)$$

Végül nullára rendezve:

$$0 = \left(1 + \frac{\cos \beta}{2}\right)^2 \left(\frac{r_0}{R}\right)^2 - 2 \left(\frac{r_0}{R}\right) - \left(\cos \beta - \frac{3}{4}\right). \quad (2.15)$$

²A pályaperdület megmaradása következik abból, hogy a sajátperdülete a törmelékdarabkáknak nem változik a gravitációs vonzóerő hatására.



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



F +

kategória

Ez egy másodfokú egyenlet a keresett r_0/R arányra, melynek megoldása:

$$\begin{aligned} \frac{r_0}{R} &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \left(1 + \frac{\cos \beta}{2}\right)^2 \left(\cos \beta - \frac{3}{4}\right)}}{2 \left(1 + \frac{\cos \beta}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + \left(1 + \frac{\cos \beta}{2}\right)^2 \left(\cos \beta - \frac{3}{4}\right)}}{\left(1 + \frac{\cos \beta}{2}\right)^2}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Minden darabka, aminek Δv sebessége β -nál nagyobb szöget zár be \mathbf{v}_0 -al, ugyanúgy a Düránusz felszínén fog landolni, hiszen minél nagyobb β , annál kisebb az eredő és a radiális sebesség is. Természetesen most is csak egy félkört vizsgálunk, hiszen az elrendezés továbbra is rendelkezik a (b) részben leírt szimmetriával. Ezek alapján, mivel a holdnak 12%-át találták meg a Düránusz felszínén:

$$0,12 = \frac{\pi - \beta}{\pi} \Rightarrow \cos \beta \approx -0,93. \quad (2.17)$$

Ezt felhasználva a keresett arány egyszerűen kiszámolható ³:

$$\boxed{\frac{r_0}{R} \approx 6}. \quad (2.18)$$

3. feladat

Korrektció: Sajnos az elméleti feladatsorban ezen feladat szövege hibásan jelent meg. A helyes megfogalmazás szerint: „Mivel a csőben a víz elég gyorsan folyik, ezért a cső hossza mentén nem alakul ki termikus egyensúly, továbbá a víz a réz által **leadottleadható** hőnek csak η -szorosát veszi fel.”

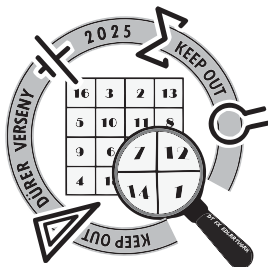
Jelöljük a réztömb hőmérsékletét egy tetszőleges t időpontban T_r -rel, a csőből kifolyó víz hőmérsékletét pedig T_v -vel. Mivel a réz T_1 -ről hűl a víz hatására, a víz pedig T_0 -ról melegszik a réz hatására, ezért $T_0 < T_v < T_r < T_1$ -nek teljesülnie kell minden időpillanatban. Rövid Δt idő alatt (mialatt a réztömb hőmérséklete állandónak tekinthető) a csőbe $\phi \Delta t$ tömegű, T_0 hőmérsékletű víz folyik be, és ugyanekkora tömegű T_v hőmérsékletű víz folyik ki. Ezek alapján a víz által elvont hő mértéke:

$$\Delta Q = m_v c_v \Delta T_v = \phi \Delta t \cdot c_v \cdot (T_v - T_0). \quad (3.1)$$

Tudjuk, hogy ez az η -szorosa annak a hőmennyiségnek, amit akkor kapnánk, ha a termikus egyensúly beállt volna a víz és a réz között, vagyis, ha $T_v = T_r$ lenne:

$$\Delta Q = \eta \cdot \Delta Q|_{T_v=T_r} = \eta \cdot \phi \Delta t \cdot c_v \cdot (T_r - T_0). \quad (3.2)$$

³Megjegyzés: $(r_0/R)_1 = 6,01$; $(r_0/R)_2 = 0,98$. Nyilvánvalóan a második megoldás nem értelmezhető.



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



kategória

Mivel ezt a hőmennyiséget a víz a réztömbtől vonja el, ezért a Δt időszakasz végére a réztömb hőmérséklete kicsiny ΔT_r -rel kevesebbnek tekintendő. Az előzőekhez hasonló összefüggés alapján:

$$\Delta Q = -m \cdot c_r \cdot \Delta T_r, \quad (3.3)$$

hiszen a réztömb hűl, így ΔT_r értéke negatív. A (3.2) és a (3.3) egyenletek jobb oldalát egyenlővé téve megkapjuk, hogy a Δt időtartam és az ez alatt történő ΔT_r hőmérsékletváltozás hányadosa lineárisan függ a réz aktuális hőmérsékletétől:

$$\frac{\Delta T_r}{\Delta t} = -\frac{\eta \phi c_v}{m c_r} (T_r - T_0), \quad (3.4)$$

ami megegyezik a Newton-féle lehűlési törvény alakjával. Ez alapján a vízzel hűtött réztömb rendszere matematikailag ekvivalens egy olyan rendszerrel, amely egy állandó T_0 hőmérsékletű környezetben hűl, viszont az $\eta \phi c_v$ szorzat tölti be a hőátadási tényező és a felület szorzatának szerepét. A Newton-féle lehűlési törvényből származó hőmérséklet-idő-függvény ismeretében (ez egy általánosan ismert összefüggés, de a függvénytáblázatok is tartalmazzák) a réz hőmérsékletének időfüggésére az alábbiakat kapjuk:

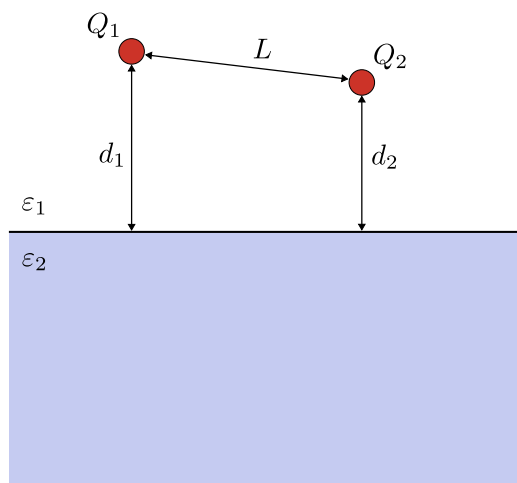
$$T_r(t) = T_0 + (T_1 - T_0) \cdot e^{-\frac{\eta \phi c_v}{m c_r} t}. \quad (3.5)$$

Ebből már algebrai átalakításokkal megkaphatjuk azt az időt, ami alatt a réz hőmérséklete T_2 -re hűl:

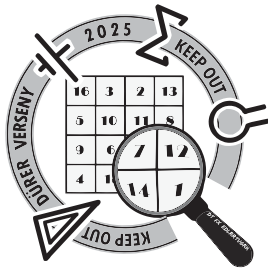
$$T_r(t_2) = T_2 \quad \Longrightarrow \quad t_2 = \frac{m c_r}{\eta \phi c_v} \cdot \ln \left(\frac{T_1 - T_0}{T_2 - T_0} \right) = 114 \text{ s}. \quad (3.6)$$

4. feladat

A feladat szövege szerint a két vizsgált töltésünk (Q_1, Q_2) egy sík dielektromos határfelülethez közel helyezkedik el (lásd 4.1. ábra). A potenciális energia kiszámításához számoljuk ki, hogy mennyi munkát kell végeznünk a töltéselrendezés összeállításának során.



4.1. ábra. A feladat szövegében felvázolt töltéselrendezés.



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

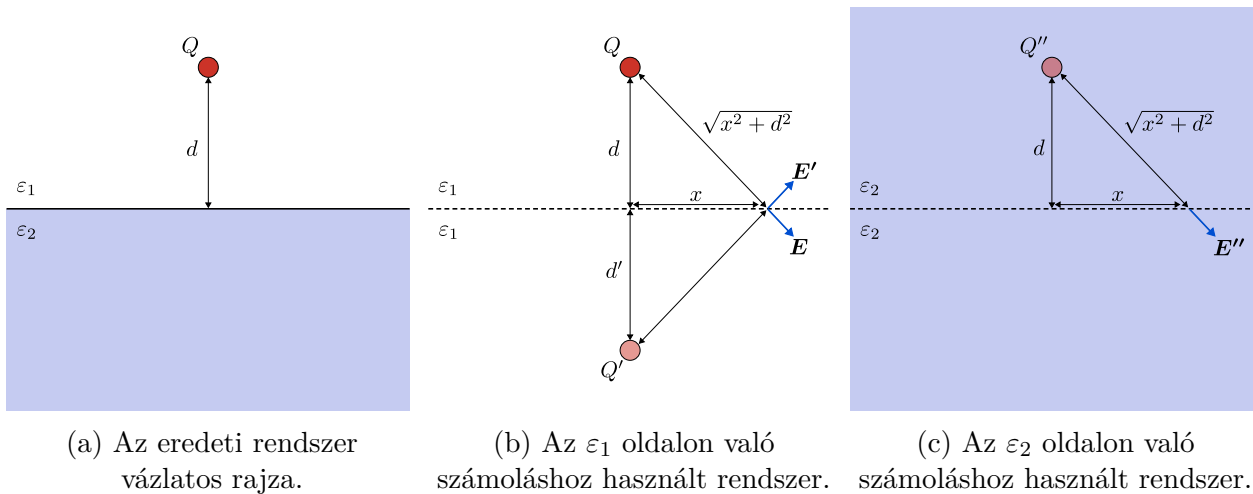
Elméleti megoldókulcs



F +

kategória

A töltésekre ható erők ilyen dielektromos határfelület esetén megadhatók a tükörtöltések módszerének használatával. Először vezessük le, hogy egyetlen Q töltés esetén milyen megoldást ad az eljárás. Legyen a Q töltés egy ε_1 relatív dielektromos állandójú anyagban, míg a határfelület túloldalán legyen a dielektromos állandó ε_2 (lásd 4.2a. ábra).



4.2. ábra. Egyetlen Q töltés esetén a tükörtöltések módszere.

A célunk legyen annak meghatározása, hogy mekkora erő hat a Q töltésre. Ehhez két esetet kell vizsgálnunk aszerint, hogy a határfelület melyik oldalán keressük az elektromos mezőt. Ha az ε_1 oldalon akarjuk kiszámolni az elektromos térerősséget, akkor feltesszük, hogy az egész teret ε_1 anyag tölti ki (lásd 4.2b. ábra). Az elektromos tér felírásához tegyük fel, hogy a Q töltésen kívül egy Q' töltés is jelen van valahol. A tükörtöltések módszere csak akkor használható, ha ezt a Q' töltést a határfelület Q -val ellentétes oldalára helyezjük, továbbá most tegyük fel, hogy Q' helye pontosan a Q helyének határfelületre vett tükrözésével kapható, tehát $d = d'$. Ekkor az *Útmutatásban* említett határfelületi illesztéshez szükséges komponensek:

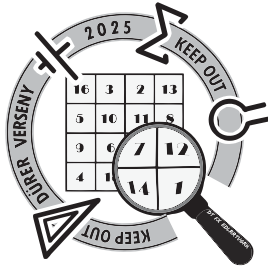
$$E_{\parallel}^t = E_{\parallel} + E'_{\parallel} = \frac{(Q + Q')}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1(d^2 + x^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{d^2 + x^2}}, \quad (4.1)$$

$$D_{\perp}^t = \varepsilon_0\varepsilon_1(E_{\perp} + E'_{\perp}) = \frac{(Q - Q')}{4\pi(d^2 + x^2)} \cdot \frac{d}{\sqrt{d^2 + x^2}}. \quad (4.2)$$

Ahol E_{\parallel} a határfelülettel párhuzamos, míg E_{\perp} az arra merőleges elektromos térerősség komponensét jelölik. Továbbá D^t , E^t a teljes térerősséget, E a Q töltés terét és E' a Q' töltés terét jelentik.

Ha az ε_2 oldalon vizsgáljuk a teret, akkor szintén fel kell tennünk, hogy az egész teret ε_2 anyag tölti ki (lásd 4.2c. ábra). Ekkor viszont nem helyezhetünk töltést az eredetileg is ε_2 -höz tartozó oldalra, így a helyes feltétel úgy kapható, ha az eredeti Q töltés helyére egy Q'' töltést

⁴Ez az illesztési feltételekből is levezethető, hiszen azoknak a határfelület tetszőleges pontjában teljesülniük kell.



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



kategória

képzelnünk, és így vizsgáljuk a kialakuló elektromos teret⁵. Ekkor a határfelületi illesztéshez szükséges komponensek:

$$E_{\parallel}^t = E''_{\parallel} = \frac{Q''}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2(d^2 + x^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{d^2 + x^2}}, \quad (4.3)$$

$$D_{\perp}^t = \epsilon_0\epsilon_2 E''_{\perp} = \frac{Q''}{4\pi(d^2 + x^2)} \cdot \frac{d}{\sqrt{d^2 + x^2}}. \quad (4.4)$$

Ahol \mathbf{E}'' a Q'' töltés elektromos terét jelöli.

A két esetben a határon egyeznie kell a E_{\parallel}^t és D_{\perp}^t komponenseknek⁶, amiből a következő egyenleteket kapjuk:

$$E_{\parallel} + E'_{\parallel} = E''_{\parallel} \implies \frac{Q + Q'}{\epsilon_1} = \frac{Q''}{\epsilon_2}, \quad (4.5)$$

$$D_{\perp} + D'_{\perp} = D''_{\perp} \implies Q - Q' = Q''. \quad (4.6)$$

Az egyenleteket rendezve a következő eredményre jutunk:

$$Q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q, \quad (4.7)$$

$$Q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q. \quad (4.8)$$

Ezáltal tehát a Q töltésre ható erő már egyszerűen kiszámítható:

$$F = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1 \cdot (2d)^2} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0\epsilon_1 d^2}. \quad (4.9)$$

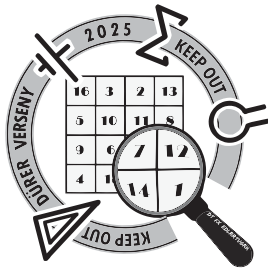
Az előző levezetés alapján ismerjük a megoldást egyetlen töltés esetén, így ennek segítségével már kiszámolhatjuk a feladatban vázolt kéttöltéses elrendeződés potenciális energiáját. Határozzuk meg először, hogy mennyi munkát kell végeznünk ahhoz, hogy a Q_1 töltést a helyére vigyük egy végtelen messzi pontból úgy, hogy közben még a Q_2 töltést végtelen messze tartjuk. Q_1 -et mozgassuk például a határfelületre merőlegesen, ekkor a végzett munka:

$$W_{1-1'} = \int_{d_1}^{\infty} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{d_1}^{\infty} dx \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \frac{Q_1^2}{16\pi\epsilon_0\epsilon_1 x^2} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \frac{Q_1^2}{16\pi\epsilon_0\epsilon_1 d_1}. \quad (4.10)$$

Felmerülhet a kérdés, hogy miért nem használtuk a két ponttöltés közti potenciális energiára vonatkozó képletet ebben az esetben. Ennek az oka az, hogy a szükséges munka éppen fele annak a potenciális energiának, amire a hagyományos képlet vezetne, így az nem alkalmazható. Az eltérés oka szemléletesen az, hogy nekünk csak az eredeti töltést kell mozgatnunk, míg a tükörképe úgy mond „magától” mozog, így nekünk mindig csak $\Delta r/2$ távot kell elmozdítani a töltést ahhoz, hogy a tükörkép és az eredeti töltés közt a távolság Δr -et változzon.

⁵A töltés helye itt is megkapható a határfeltételekből.

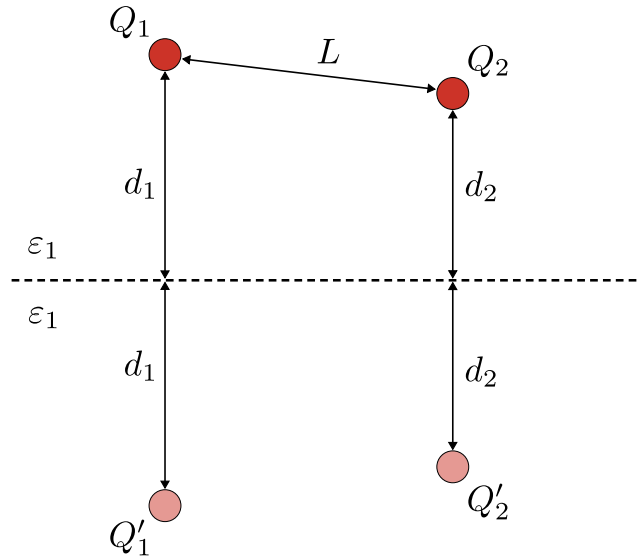
⁶Ezek az illesztési feltételek megkaphatók a Maxwell-egyenletek felhasználásával.



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



4.3. ábra. A kéttöltéses elrendeződés megoldása az ε_1 oldalról nézve.

A következő lépésben rögzítsük a Q_1 töltést és hozzuk végtelen távról a végső helyére a Q_2 töltést. Ekkor három tagból fog állni a szükséges munka (lásd 4.3. ábra):

- (1) A Q_1 és Q_2 közötti taszítás miatt fellépő tag, aminél használható a két ponttöltés esetén jól ismert potenciális energiára vonatkozó képlet, mivel egyik sem tükörtöltés:

$$W_{1-2} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 L}. \quad (4.11)$$

- (2) A Q'_1 és Q_2 közötti taszításból származó tag, ahol szintén használható a jól ismert képlet, mivel Q'_1 ebben a lépésben már nem mozog:

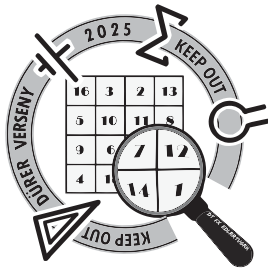
$$W_{1'-2} = \frac{Q'_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 \sqrt{L^2 + 4d_1 d_2}} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 \sqrt{L^2 + 4d_1 d_2}}, \quad (4.12)$$

ahol kihasználtuk, hogy a végső elrendezésben Q'_1 és Q_2 távolsága a következőképp kapható a Pitagorasz-tétel alapján:

$$\Delta s = \sqrt{\Delta s_x^2 + \Delta s_y^2} = \sqrt{(L^2 - (d_1 - d_2)^2) + (d_1 + d_2)^2} = \sqrt{L^2 + 4d_1 d_2}. \quad (4.13)$$

- (3) A Q_2 és Q'_2 közötti taszítás miatti tag, ahol a $W_{1-1'}$ esetén alkalmazott módszert kell használnunk:

$$W_{2-2'} = \int_{d_2}^{\infty} dx \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{Q_2^2}{16\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 x^2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{Q_2^2}{16\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 d_2}. \quad (4.14)$$



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



kategória

A rendszer potenciális energiája az eddig kiszámolt négy tag összegeként kapható meg, így a végeredmény:

$$E_{\text{pot}} = W_{1-1'} + W_{2-2'} + W_{1-2} + W_{1'-2}. \quad (4.15)$$

$$E_{\text{pot}} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{1}{16\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \left(\frac{Q_1^2}{d_1} + \frac{Q_2^2}{d_2} \right) + \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 L} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 \sqrt{L^2 + 4d_1 d_2}}. \quad (4.16)$$

Látszik, hogy az eredmény $Q_1 \leftrightarrow Q_2$ és $d_1 \leftrightarrow d_2$ cseréssel nem változik, amit el is várunk, mivel nem számíthat, hogy melyik töltést helyezzük el először.

5. feladat

A feladat megoldása során végig érdemes hengerkoordináta-rendszerben felírni a megjelenő mennyiségeket, hiszen az egész elrendezés ilyen szimmetriát mutat. Ilyen felírásnál a z tengely lesz a henger szimmetriatengelye, r jelöli az erre merőleges, radiális irányt, illetve φ az érintő irányt. Biztosan tudjuk, hogy a mágneses mező forrásmentes (Maxwell II. törvénye), tehát egy tetszőleges térfogat lapjain be- és kilépő mágneses fluxusok megegyeznek.⁷ A hengerszimmetria miatt legyen a vizsgált térfogat egy kis dz hosszúságú, r sugarú henger az z tengely mentén. Ennek a lapjaira felírva a mágneses fluxusokat:

$$B_z(z) \cdot r^2 \pi - B_z(z + dz) \cdot r^2 \pi + B_r(z) \cdot 2r\pi dz = 0. \quad (5.1)$$

Itt úgy vettük, hogy a B_z komponens csökken, tehát a B_r a cső felé mutat, de mint látni fogjuk, fordítva is ugyanazt az eredményt kapnánk. Emellett a fenti egyenletben azért nem kell vektormennyiségekkel számolnunk, mert a két komponens merőleges a két felületre. Az (5.1)-es egyenletet $B_r(z)$ -re rendezve:

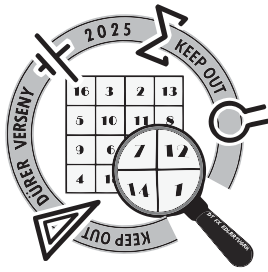
$$B_r(z) = -\frac{r}{2} \frac{B_z(z + dz) - B_z(z)}{dz}. \quad (5.2)$$

Ahogy dz tart nullához úgy a jobb oldalt éppen megjelenik B_z deriváltja:

$$B_r(z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}. \quad (5.3)$$

A feladat lényegi felismerése, hogy ez a komponens fogja megváltoztatni a cső mozgását. Végig a Lorentz-erő hat a csőre, amelynek irányát a jól ismert jobbkéz-szabályból kapjuk. Az egyenesen haladó csőre a z irányú komponens nem fejt ki erőt, az r komponens pedig először olyan erőt fejt ki, hogy a cső elkezd forogni a tengelye körül. Ezután a forgó csőre már a z irányú komponens is erőt fejt ki, de ennek az eredője zérus, így itt is csak az r komponens kell vizsgálni. Az ebből eredő erő éppen egy z irányú fékezést fog okozni. Szerencsére a forgás és a mozgás egyenletei

⁷Azt is mondhatjuk, hogy a mágneses mezőnek a térfogat határológörbéjére vett felületi integrálja zérus, vagy, hogy nulla a mező rotációja. Ez mind ekvivalens megfogalmazása ugyanannak.



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



kategória

külön tárgyalhatóak, ugyanis a cső haladó mozgása csak a forgást befolyásolja közvetlenül, a forgás pedig csak a haladó mozgást (saját magukat nem).

Először megmutatjuk, hogy milyen egyenletekre jutunk a mágneses mező általánosságát feltételezve, majd csak ezután helyettesítjük be a megadott lineáris függést. Nézzük meg először, hogy a $v(t)$ sebességgel haladó csőre mekkora forgatónyomaték hat! A Lorentz-erő egy kis dz hosszúságú darabka esetén, amely z helyen helyezkedik el:

$$dF_1(z, t) = dQ \cdot v(t) \cdot B_r(z). \quad (5.4)$$

Bevezetve a $\sigma = Q/\ell$ vonalmenti töltéssűrűséget, illetve (5.3)-ból B_r -t (5.4)-be helyettesítve:

$$dF_1(z, t) = -\frac{\sigma r}{2} v(t) \frac{dB_z}{dz} dz. \quad (5.5)$$

Erre a darabkára ható forgatónyomaték:

$$dM_k(z, t) = -\frac{\sigma r^2}{2} v(t) \frac{dB_z}{dz} dz. \quad (5.6)$$

A teljes csőre külső B tér miatt ható forgatónyomatékot úgy kapjuk, hogy integráljuk ezt a cső teljes hosszára. Ehhez célszerű azt venni, hogy a bal oldali vége $z = \chi$ pontban van.

$$\sum M_k(z, t) = -\frac{\sigma r^2}{2} v(t) \int_{\chi}^{\chi+\ell} \frac{dB_z}{dz} dz. \quad (5.7)$$

Jobb oldalt éppen egy deriváltfüggvényt integrálunk, így csak a $B(z)$ függvényt kell kiértékelni a kezdeti és végpontokban, így a teljes forgatónyomaték:

$$\sum M_k(z, t) = -\frac{\sigma r^2}{2} v(t) [B_z(z + \ell) - B_z(z)]. \quad (5.8)$$

Továbbá még figyelembe kell vennünk az önindukció hatását is, mely egy ellentétes irányú forgatónyomaték komponenst eredményez. Ehhez közelítsük a forgó hengert egy szolenoiddal, melynek az árama a következőképp kapható:

$$I = \frac{\omega}{2\pi} Q. \quad (5.9)$$

A szolenoid által generált mágneses tér a szolenoid belsejében:

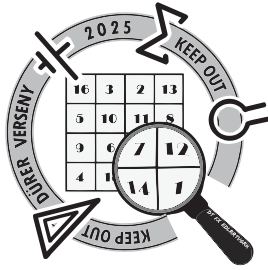
$$B_{sz} = \frac{\mu_0 I}{\ell} = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi \ell}. \quad (5.10)$$

Mivel a henger szögsebessége változik az időben, így a szolenoid fluxusa is. A III. Maxwell-egyenletet felírva a fluxusváltozás miatt kialakuló tangenciális elektromos térerősségre a z tengelytől r távolságban:

$$2\pi r E_{\text{ind}} = r^2 \pi \frac{dB_{sz}}{dt} \quad (5.11)$$

Behelyettesítve az (5.10)-ben kapott eredményt:

$$E_{\text{ind}} = \frac{\mu_0 r Q}{4\pi \ell} \dot{\omega} \quad (5.12)$$



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



F +

kategória

Mivel $M_{\text{ind}} = Q \cdot E \cdot r$, így az önindukció miatti forgatónyomaték, mely fékező hatású a Lenz-törvény értelmében:

$$M_{\text{ind}} = \frac{\mu_0 r^2 Q^2}{4\pi\ell} \dot{\omega} \quad (5.13)$$

A forgásegyenlet alapján:

$$\sum M(z, t) = \dot{\omega}(z, t) \cdot \Theta, \quad (5.14)$$

ezt behelyettesítve:

$$\begin{aligned} \Theta \cdot \dot{\omega}(z, t) &= -\frac{\sigma r^2}{2} v(t) [B_z(z + \ell) - B_z(z)] - \frac{\mu_0 r^2 Q^2}{4\pi\ell} \dot{\omega}(z, t), \\ \left(\Theta + \frac{\mu_0 r^2 Q^2}{4\pi\ell} \right) \dot{\omega}(z, t) &= -\frac{\sigma r^2}{2} v(t) [B_z(z + \ell) - B_z(z)]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

A megoldás további részében használjuk ki, hogy $\mu_0 r^2 Q^2 / 4\pi\ell\Theta \ll 1$, tehát a henger tehetetlenségi nyomatékának önindukció miatti effektív növekedését elhanyagolhatjuk, ezentúl a következő egyenletet használjuk:

$$\dot{\omega}(z, t) = -\frac{\sigma r^2}{2\Theta} v(t) [B_z(z + \ell) - B_z(z)]. \quad (5.16)$$

Vizsgáljuk most a forgás miatt létrejövő fékező erőt! Itt is egy dz hosszúságú darabkát vizsgálunk, amely $\omega(t)$ szögsebességgel forog és dQ a töltése. Ekkor a rá ható Lorentz-erő:

$$dF_z(z, t) = -dQ \cdot r\omega(t) \cdot B_r(z). \quad (5.17)$$

A negatív előjel fontos, hiszen az erő a negatív z irányba fog mutatni. Itt végiggondolhatjuk, hogy tényleg nem számít B_z monotonitása, tehát a deriváltjának (B_r -nek) az előjele. Ha B_r kifelé mutat, akkor a z tengely szerinti pozitív irányba forgatja a csövet, és B_r ezért lassítja; ha pedig B_r befelé mutat, akkor a másik irányba forog a cső, és B_r amiatt lassítja. Az (5.17)-es egyenletbe megint σ és $B_r(z)$ értékét behelyettesítve:

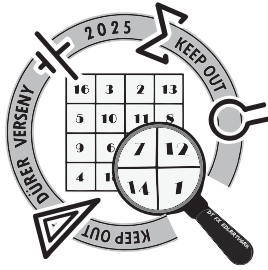
$$dF_z(z, t) = \frac{\sigma r^2}{2} \omega(t) \cdot \frac{dB_z}{dz} dz, \quad (5.18)$$

innen ismét integrálva kapjuk meg a teljes erőt:

$$\sum F_z(z, t) = \frac{\sigma r^2}{2} \omega(t) \cdot \int_x^{x+\ell} \frac{dB_z}{dz} dz. \quad (5.19)$$

Most is kihasználhatjuk, hogy az integrál argumentumában egy deriváltfüggvény található, illetve a mozgásegyenletet is behelyettesíthetjük:

$$\dot{v}(z, t) = \frac{\sigma r^2}{2m} \omega(t) [B_z(z + \ell) - B_z(z)]. \quad (5.20)$$



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



Kaptunk tehát két teljesen általános egyenletet, az (5.16)-os és (5.20)-as egyenleteket. Teljesen általános alatt azt értjük, hogy a cső bármilyen paraméterezése, és bármilyen mágneses mező esetén igazak maradnak. Ezeket együtt felírva:

$$\dot{\omega}(z, t) = -\frac{\sigma r^2}{2\Theta} v(t) [B_z(z + \ell) - B_z(z)], \quad (5.21)$$

$$\dot{v}(z, t) = \frac{\sigma r^2}{2m} \omega(t) [B_z(z + \ell) - B_z(z)]. \quad (5.22)$$

Innentől érdemes tárgyalni a speciális $B_z = B_0 + \alpha z$ esetet. Ekkor ugyanis

$$B_z(z + \ell) - B_z(z) = \alpha \ell, \quad (5.23)$$

tehát az egyenletrendszerünk az alábbi alakot ölti:

$$\dot{\omega}(z, t) = -\frac{\sigma r^2 \alpha \ell}{2\Theta} v(t), \quad (5.24)$$

$$\dot{v}(z, t) = \frac{\sigma r^2 \alpha \ell}{2m} \omega(t). \quad (5.25)$$

A második egyenletet idő szerint deriválva:

$$\ddot{v}(t) = \frac{\sigma r^2 \alpha \ell}{2m} \cdot \dot{\omega}(t). \quad (5.26)$$

Felhasználva, hogy vékony falú cső esetén $\Theta = mr^2$, és a kapott egyenletbe (5.24)-et behelyettesítve:

$$\ddot{v}(t) = -\frac{\sigma^2 r^2 \alpha^2 \ell^2}{4m^2} \cdot v(t). \quad (5.27)$$

Bevezetve az

$$\Omega^2 = \frac{\sigma^2 r^2 \alpha^2 \ell^2}{4m^2} \quad (5.28)$$

jelölést, egy ismert differenciálegyenletre jutunk:

$$\ddot{v}(t) = -\Omega^2 v(t), \quad (5.29)$$

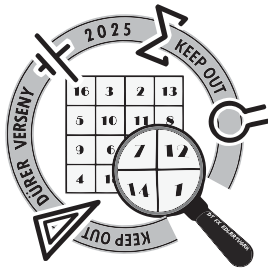
melynek megoldása természetesen

$$v(t) = A \sin(\Omega t + \phi). \quad (5.30)$$

A kezdeti feltételekből határozzuk meg A és ϕ paramétereiket! Ehhez először deriváljuk a kapott $v(t)$ függést, hogy azt utána (5.22)-be visszaírva kifejezhessük $\omega(t)$ -t:

$$\dot{v}(t) = \Omega A \cos(\Omega t + \phi) = \frac{\sigma r^2 \alpha \ell}{4m} \cdot \omega(t). \quad (5.31)$$

Mivel kezdetben nem forog a henger, így $\omega(0) = 0$. Ezt a fenti egyenletbe beírva:



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



F+
kategória

$$\omega(0) = 0 = \frac{4m\Omega A}{\sigma r^2 \alpha \ell} \cdot \cos(0 \cdot t + \phi), \quad (5.32)$$

ami csak akkor teljesülhet, ha

$$\phi = \frac{\pi}{2}. \quad (5.33)$$

Ezt visszaírva (5.30)-ba, illetve felhasználva, hogy $v(0) = v_0$:

$$A = v_0. \quad (5.34)$$

A végeredmény tehát:

$$v(t) = v_0 \cos\left(\frac{Qr\alpha}{2m}t\right). \quad (5.35)$$

Érdekes, hogy a kapott eredmény három paramétertől is független, amire nem feltétlenül számítottunk:

- B_0 : Teljesen mindegy, hogy mekkora a mágneses mező kezdeti értéke, csak az számít, hogy hogyan változik, hiszen a B_z komponens nincsen hatással a mozgásra, csak ennek a deriváltja.
- α előjele: Észrevehető, hogy a kapott végeredmény független attól, hogy a mágneses mező z komponense nő vagy csökken. Mint már korábban írtuk a B_r komponens biztos, hogy fékezni fogja a csövet, hiszen így teljesül csak a Lenz-törvény. Itt talán az az érdekes, hogy ez matematikailag is szépen megjelent, hiszen $\cos(z) = \cos(-z)$.
- ℓ : A végeredményben nem szerepel a cső hossza. Ez azért lehet elsőre furcsa, mert nagyon hosszú cső esetén óriási különbség lenne a mágneses indukció nagyságában a cső elejénél és végénél, amiről azt gondolhatjuk, hogy számítani kell. Itt is az a magyarázat, hogy ebben a lineáris esetben csak a B_r komponens számít, ami viszont konstans α mindenhol.