XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Kifejtős megoldókulcs

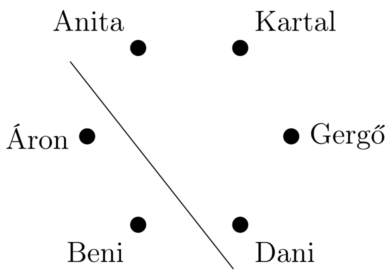
C kategória

C1. Dürerlandiát egyetlen folyó, az egyenes Düna vágja két részre. A folyó egyik oldalán csak nyomozók, a folyó másik oldalán csak bűnözők laknak. A nyomozók mindig igazat mondanak, a bűnözők mindig hazudnak. Anita, Áron, Beni, Dani, Gergő és Kartal, Dürerlandia hat lakója, éppen egy szabályos hatszög hat csúcsában laknak, ebben a sorrendben. Közülük öten az alábbi állításokat teszik:

- Anita: Dani nyomozó.
- Áron: Gergővel a Düna ugyanazon oldalán lakunk.
- Beni: Kartal bűnöző.
- Gergő: Áron és Dani a Düna különböző oldalán laknak.
- Dani: Kartallal a Düna ugyanazon oldalán lakunk.

A hat lakó közül ki nyomozó és ki bűnöző? A megoldásotok során indokoljátok meg azt is, hogy miért nincs más lehetőség!
Szűcs Gábor feladata

Megoldás:



Ha Dani nyomozó, akkor igazat mond, így Kartal vele azonos oldalon lakik, így nyomozó. Ha Dani bűnöző, akkor hazudik, tehát Kartal vele ellentétes oldalon lakik, így nyomozó. Tehát Kartal biztosan nyomozó. Ekkor viszont Beni hazudik, így Beni bűnöző.

Ha Áron nyomozó, akkor igazat mond, így Gergő vele azonos oldalon lakik, így nyomozó. Ha Áron bűnöző, akkor hazudik, tehát Gergő vele ellentétes oldalon lakik, így nyomozó. Tehát Gergő biztosan nyomozó.

Gergő igazat mond, tehát Áron és Dani a Düna két különböző oldalán lakik. Ha Dani bűnöző, akkor Áron nyomozó, ekkor viszont mivel a Düna egyenes, így a bűnözők partján csak Beni és Dani lakhat, így Anita nyomozó. Viszont Anita így igazat mond, de Dani nem nyomozó, azaz ez az eset nem lehetséges.

Ha Dani nyomozó, akkor Áron bűnöző, és Anita igazat mond, tehát ő is nyomozó. Ekkor Áron és Beni bűnözők, a többiek nyomozók, és ez lehetséges is, ha a Düna Anita és Áron, valamint Beni és Dani között folyik keresztül.

C2. **a)** Máté egy 4×4-es táblázatba 12 nem feltétlenül különböző számot írt, minden mezőbe legfeljebb egy számot. Azt a feladatot adta Áronnak, hogy fejezze be szabályosan az általa elkezdett kitöltést bűnös négyzetté. Észrevették, hogy Áron ezt többféleképpen is meg tudja valósítani. Adjatok példát a Máté által készített táblázatra és annak többféle szabályos befejezésére!
b) Bizonyítsátok be, hogy ha Máté 13 számot írt volna a táblázatba, akkor mindenképp legfeljebb egy szabályos befejezés létezne!
Bűnös négyzet alatt azon 4×4-es táblázatokat értjük, melynek minden mezőjében pontosan egy szám áll, továbbá bármely sorában, oszlopában és a két nagy átlójában is ugyanaz a négy szám összege.
Dürer Matekest feladat

Megoldás: a)

Máté táblázata:

2	2	2	2
	2	2	
	2	2	
2	2	2	2

Egy lehetséges befejezés:

2	2	2	2
3	2	2	1
1	2	2	3
2	2	2	2

Egy másik befejezés:

2	2	2	2
1	2	2	3
3	2	2	1
2	2	2	2

b) Mivel Máté már 13 mezőt kitöltött, így van olyan oszlop, amelynek minden mezőjében már áll szám. Ugyanis ha minden oszlopból legfeljebb 3 mező lenne kitöltve, akkor összesen csak legfeljebb $4 \cdot 3 = 12$ kitöltött mező lehetne. Azaz ebből az oszlopból már meg tudja határozni, hogy mennyi lehet a sorok és az oszlopok összege egy szabályos befejezett kitöltésben.

Ekkor viszont egy üres mezőt csak akkor nem tud Áron egyértelműen kitölteni, ha a sorában és az oszlopában is van még rajta kívül üres mező. Hiszen ha például egy sorban csak egy üres mező lenne, akkor azt ki lehetne tölteni úgy, hogy a már meghatározott sorösszegből kivonjuk a sorban lévő három számot.

Ha valamikor két különböző összeg keletkezik, csak az előbbiekben leírt típusú lépések után, vagy valahová kétféle számot kellene írni, mert a sorában, oszlopában, vagy nagyátlójában kétféle a maradék 3 szám összege, akkor az igazolja, hogy nem lehet szabályosan befejezni a kitöltést, így ez az eset nem lehetséges.

Tegyük fel, hogy Áron kitöltött mindent, amit egyértelműen ki tudott tölteni, és még többféleképpen is szabályosan befejezhető a táblázat. Ekkor még biztosan van kitöltetlen mező. Ezt nem tudta egyértelműen kitölteni, így a sorában van még legalább egy üres mező. Ezt a két mezőt szintén nem tudta még egyértelműen kitölteni a feltevésünk szerint, azaz mindkettő oszlopában van rajta kívül üres mező. Ezek a mezők különbözők, így legalább 4 kitöltetlen mező van, ami ellentmondás. Azaz nem fejezhető be többféleképpen szabályosan bűnös négyzetté a táblázat.

C3. **a)** Anett, Andris, Kartal és Benedek kártyáznak. Négy különböző színű paklijuk van, mindegyik négy lapot tartalmaz, megszámozva 1-től 4-ig. Először összekeverik a 16 lapot, majd mind a négyen húznak négy lapot a kezükbe, amiket megmutatnak egymásnak. Ezután közösen eldöntik, hogy milyen sorrendben ülnek le körben, és azt is, hogy ki kezd. A játék folyamán a kör mentén óramutató járásával megegyező irányban sorban raknak le egy-egy lapot, de egy lapot csak akkor rakhatnak le, ha már minden nála kisebb számú, vele azonos színű le lett rakva. Akkor nyernek, ha az összes lapot lerakják. Ha valaki a sorra kerülésekor nem tud rakni és még van lap a kezében, veszítenek. Mutassatok olyan húzást, amelynél akárhogy is döntenek és játszanak, veszítenek!
b) Mutassátok meg, hogy ha mind a négy pakliból csak az 1-es és 2-es lapokkal játszanak, akkor mindig tudnak nyerni!
Kocsis Anett feladata

Megoldás: **a)** Jelöljük a négy színt A-val, B-vel, C-vel és D-vel, továbbá innentől a kártyalapokat úgy fogjuk jelölni, hogy a színük mögé írjuk a számukat (például a C színű 3-as számú lapra innentől $C3$-ként fogunk hivatkozni).

Legyenek Anett lapjai $A1, A2, B1$ és $B2$, Andris lapjai $C1, C2, D1$ és $D2$, Kartal lapjai $A3, A4, B3$ és $B4$, továbbá Benedek lapjai $C3, C4, D3$ és $D4$. Ekkor ahhoz, hogy Kartal le tudjon rakni egy lapot az első körben, az kell, hogy vagy a $A1$ és $A2$ is le legyen már rakva, vagy pedig $B1$ és $B2$ is (hiszen $A3$ és $A4$ lerakásának előfeltétele $A2$ lerakása, $B3$ és $B4$ lerakásának pedig $B2$ lerakása). Viszont mivel $A1$ és $A2$, illetve $B1$ és $B2$ is Anett kezében van, és mivel Anett legfeljebb egyszer kerülhet sorra Kartal előtt, nem lehet egyik lappár sem lerakva, mielőtt Kartal sorra kerül, így legkésőbb Kartal sorra kerülésekor veszíteni fognak ebben az osztásban.

b) Vegyük észre, hogy ha az összes 1-es le lett már rakva, akkor akármelyik lap lerakható.

Ha mind a négy embernek van 1-es kártyája, akkor azt le tudja rakni mindegyikük az első körben és a második körben utána a 2-est.

Ha csak három embernek van 1-es kártyája, akkor pontosan az egyikőjüknél két 1-es van és pontosan az egyiküknél két 2-es. Ekkor, ha a két 1-essel rendelkező kezdi a kört, majd utána az egy 1-essel rendelkezők lerakják a saját 1-esüket, akkor az utolsó ember valamelyik 2-esének színéből már biztosan szerepelt az 1-es korábban, így azt a lapját ki tudja rakni. Ezután ismét az a játékos jön, akinek eredetileg két 1-ese volt és miután a másikat lerakja, már az összes 1-es le lesz rakva, azaz a többiek már be tudják fejezni a kört.

Ha csak két embernek van 1-es kártyája, akkor a másik két ember két-két 2-essel rendelkezik. Kezdjen ebben az esetben az a két játékos, akinek csak 1-ese van. Miután az első játékos kijátszott egy 1-est, valamelyik csupa 2-esel rendelkező játékos már biztosan ki tudja játszani a 2-esét abból a színből. Ezután a másodikként sorra kerülő játékos biztosan tud úgy lerakni egy 1-est, hogy arra utána a másik kizárólag 2-essel rendelkező játékos is le tudja már rakni valamelyik 2-esét. Így az első körben még nem veszítenek, a második pedig azzal kezdődik, hogy az első két játékos lerakja a megmaradó 1-eseit, tehát azt a kört is biztosan be tudják fejezni.

Az nem lehetséges, hogy kettőnél kevesebb ember rendelkezik 1-es kártyával, tehát a feladat állítását bebizonyítottuk.

C4. Az ABC háromszögben az AB oldal hossza 5 cm, a BC oldal hossza 4 cm, a CA oldal hossza 3 cm. Tükrözzük a C pontot a B csúcs belső szögfelezőjére, így kapjuk a D pontot. Tükrözzük a C pontot az AB oldalegyenesre, így kapjuk az E pontot. Határozzátok meg a DE szakasz hosszát!
Takács Tamás és Hegedűs Dániel feladata

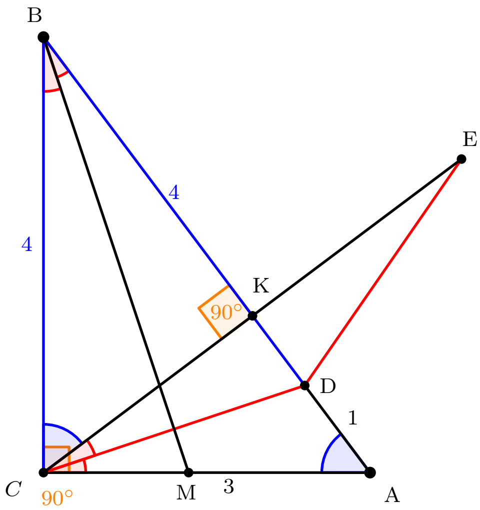
1. Megoldás:

Használjuk a lenti ábra jelöléseit. Vegyük észre, hogy CK az ABC háromszögnek az AB oldalához tartozó magassága. A háromszög területét így kétféleképp felírva a következőt kapjuk: $\frac{BC\cdot AC}{2}=\frac{AB\cdot CK}{2}$, így $CK=\frac{12}{5}$, valamint a tükrözés miatt $KE=CK=\frac{12}{5}$. A CKB háromszög derékszögű, így a Pitagorasz-tételt felírva rá megkapjuk, hogy $BK^2+CK^2=BC^2$, így $BK=\frac{16}{5}$. Tudjuk továbbá, hogy D az AB oldalra esik és $BD=BC=4$, hiszen D-t a B csúcs szögfelezőjére tükrözve kaptuk. Ekkor $KD=BD-BK=4-\frac{16}{5}=\frac{4}{5}$. Ekkor viszont az EKD háromszög derékszögű, így felírhatjuk rá a Pitagorasz-tételt: $DE^2=KD^2+KE^2=\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2=\frac{32}{5}$, így $DE=\sqrt{\frac{32}{5}}$ cm $=\frac{4\sqrt{10}}{5}$ cm.

2. Megoldás:

Használjuk az ábra jelöléseit. Mivel a háromszög három oldalaira $3^2+4^2=5^2$, ezért a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt $ACB\sphericalangle=90°$. Mivel a B belső szögfelezőjére tükröztük C-t, így D az AB oldalra esik. Mivel a tükrözés távolságtartó, így a DE szakasz hossza azonos a CD szakasz hosszával. Sőt $DEK\triangle$ egybevágó $DCK\triangle$-gel. Továbbá $BCK\triangle$ hasonló $ABC\triangle$-höz, mert a tükrözés miatt $BKC\sphericalangle=90°=ACB\sphericalangle$, így a B-nél lévő szög azonos, vagyis két-két szögük megegyezik. Ebből $\frac{CK}{BC}=\frac{CK}{4}=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}$, tehát $CK=\frac{12}{5}$.

Ismét a tükrözés távolságtartása miatt $BC=BD$, így $BCD\triangle$ egyenlőszárú és $BCD\sphericalangle=\frac{180°-ABC\sphericalangle}{2}$. Utóbbiból és az $ABC\sphericalangle+BAC\sphericalangle=90°$ egyenlőségből: $DCK\sphericalangle=BCD\sphericalangle-BCK\sphericalangle=90°-\frac{ABC\sphericalangle}{2}-BAC\sphericalangle=90°-\frac{ABC\sphericalangle+2\cdot BAC\sphericalangle}{2}=90°-\frac{90°+BAC\sphericalangle}{2}=\frac{90°-BAC\sphericalangle}{2}=\frac{ABC\sphericalangle}{2}$. $(*)$
Ugyanakkor $ACD\sphericalangle=90°-BCD\sphericalangle=\frac{ABC\sphericalangle}{2}$, tehát az $ACK\triangle$-ben CD szögfelező és a háromszög szögei páronként megegyeznek $ABC\triangle$ szögeivel, így hasonló a két háromszög. Ebből következik, hogy $\frac{AK}{AC}=\frac{AK}{3}=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}$, vagyis $AK=\frac{9}{5}$, valamint $AD=AB-BD=AB-BC=5-4=1$, ezért $DK=AK-AD=\frac{4}{5}$. Mivel $CDK\triangle$ derékszögű, ezért a Pitagorasz-tétel miatt $CD^2=CK^2+DK^2=\frac{144}{25}+\frac{16}{25}=\frac{160}{25}=10\cdot\frac{16}{25}$. Tehát a válasz $DE=CD=\sqrt{10}\cdot\frac{4}{5}$ cm.



3. Megoldás, szögfelező-tétellel

$(*)$-tól folytatva: Vegyük észre, hogy $CDK\triangle$ és $BCM\triangle$ hasonló, mert mindkettő derékszögű és $DCK\sphericalangle=CBM\sphericalangle$. Ebből következik, hogy $\frac{CD}{CK}=\frac{CD\cdot 5}{12}=\frac{BM}{BC}=\frac{BM}{4}$, így kell még a BM szakasz hossza. A szögfelező-tétel miatt $\frac{BC}{AB}=\frac{CM}{AM}$, amiből $CM=\frac{4}{5}\cdot AM$, valamint $CM+AM=\left(\frac{4}{5}+1\right)\cdot AM=\frac{9}{5}\cdot AM=AC=3$, így $AM=\frac{5}{3}$ és $CM=\frac{4}{3}$. A $BCM\triangle$-re Pitagorasz-tételt alkalmazva kapjuk, hogy $BM^2=BC^2+CM^2=16+\frac{16}{9}=\frac{16\cdot 10}{9}$, tehát $BM=\frac{4\cdot\sqrt{10}}{3}$. Ekkor tehát a válasz: $DE=CD=\frac{BM\cdot 12}{4\cdot 5}=\frac{4\sqrt{10}\cdot 3}{3\cdot 5}=\frac{4\cdot\sqrt{10}}{5}$ cm.

C5. **a)** Áron felírt egy hatjegyű számot a táblára. Ezután Máté megcserélheti a táblán lévő szám első jegyét a második jegyével. Ezután Benedek megcserélheti a táblán lévő szám harmadik jegyét a negyedikkel. Ezután Zsuzsi megcserélheti a táblán lévő szám ötödik jegyét a hatodikkal. Írhatott-e Áron olyan számot, hogy abból kiindulva nyolc, páronként különböző hatjegyű számot kaphatnak, melyek mindegyike osztható 7-tel?
b) Áron egy másik táblára is felírt egy hatjegyű számot. Ezután Domonkos letörölheti a szám első néhány, akár nulla, de legfeljebb öt jegyét, amiket aztán ugyanolyan sorrendben a szám végére kell írnia. Írhatott-e Áron olyan számot, hogy abból kiindulva hat, páronként különböző hatjegyű számot kaphat Domonkos, melyek mindegyike osztható 17-tel?
Egy hatjegyű szám első jegye nem lehet 0.
Dürer Matekest feladat

Megoldás: a) Igen, Áron írhatott ilyen számot.

Jelöljük a hatjegyű számot, és a megcserélhető számpárokat így:

$$\overline{abcdef}; \quad (a;b); \quad (c;d); \quad (e;f)$$

Ahhoz, hogy nyolc különböző, hatjegyű számot képezhessünk, a számpároknak két-két különböző számjegyet kell tartalmaznia, valamint az $(a;b)$ számpár nem tartalmazhatja a 0 számjegyet.

Képezzünk két olyan számot, melyek az utolsó számpár számjegyeinek felcserélésével egymásba alakíthatóak. Írjuk fel a számokat helyiérték szerint!

$$100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + 1f$$
$$100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10f + 1e$$

Az összegek 7-es osztási maradéka a tagok maradékainak összege. Ha a két, 7-tel osztható összeget kivonjuk egymásból, akkor egy 7-tel osztható számot kapunk. Mivel a különbség $9e - 9f$, és a 7 és a 9 relatív prímek, így a megcserélt $(e;f)$ számpár két tagjának 7-es maradéka azonos, különben nem lehetne a különbség 7-tel osztható.

Azaz olyan számpárokat használhatunk, ahol a különbség 7 lesz csere esetén, és ez ugyanígy megmutatható az $(a;b)$ és $(c;d)$ számpárokra is. Ezek csak a $(0;7), (1;8)$ és $(2;9)$ számpárok. Nézzük meg, hogy számpárok mennyit adnak a hatjegyű szám 7-es maradékához, ha az egyes helyiértékpárokon szerepelnek:

	$(a;b)$	$(c;d)$	$(e;f)$
$(0;7)$	0	0	0
$(1;8)$	2	1	4
$(2;9)$	4	2	1

Mivel a számok 7-tel oszthatók, a számpárok maradékainak összege a 7-nek egy többszöröse. Ez a táblázatból kiolvasható módon csak úgy valósítható meg, ha a három számpár:

$$(0;7),(0;7),(0;7) \quad \text{vagy} \quad (1;8),(1;8),(1;8) \quad \text{vagy} \quad (2;9),(2;9),(2;9).$$

Ezek közül azonban a $(0;7)$ párt nem használhatjuk fel az első helyen, mivel nem hatjegyű számot is eredményez.

Tehát például az 181818, vagy a 292929 szám megfelel a feltételeknek.

b) Nem, Áron nem írhatott ilyen számot.

Tegyük fel, hogy van ilyen 17-tel osztható szám! Írjuk fel ezt a számot, valamint azt a számot, amit az első számjegy letörlésével, majd a szám végére írásával kapunk, helyiérték szerinti összegben!

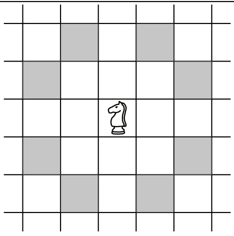
$$x_0 = 100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + 1f$$
$$x_1 = 100000b + 10000c + 1000d + 100e + 10f + 1a$$

Jelöljük a $10000b + 1000c + 100d + 10e + 1f$ összeget S-el! Ekkor a két szám:

$$x_0 = 10^5 a + S$$
$$x_1 = 10S + 1a$$

Ha x_0-t megszorozzuk 10-el, akkor $10x_0 = 10^6 a + 10S$. Ekkor $10x_0 - x_1 = (10^6 - 1)a$. Mivel x_0 és x_1 a feltételezésünk szerint osztható 17-tel, így a $10x_0 - x_1$ különbség is osztható 17-tel.

Ekkor $(10^6 - 1) = 999999 = 999 \cdot 1001 = 9 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Mivel a 17 nem szerepel a prímtényezős felbontásban, ezért a $(10^6 - 1)a$ szorzat akkor és csak akkor lehet 17-tel osztható, ha a osztható 17-tel. Mivel a egy 1 és 9 közé eső számjegy, ez ellentmondás. Tehát nem létezhet a feladatnak megfelelő x_0 szám.

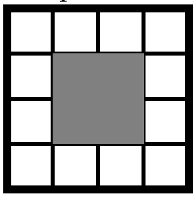


C6. Játék: Egy 4×4-es tábla egyik mezőjén kezdetben egy huszár áll. Két játékos felváltva lép a huszárral. Nem szabad olyan mezőre lépni, amelyen korábban már járt a huszár, így a kezdőmezőre sem. Az veszít, aki nem tud lépni.
Az ábrán a szürke mezők mutatják, hogy hogyan lehet lépni egy huszárral.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a huszár kezdőmezőjének ismeretében, hogy kezdők szeretnétek lenni, vagy másodikok.

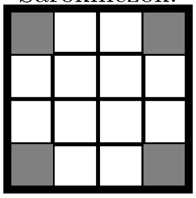
Hegedűs Dániel feladata

Megoldás: A stratégia szempontjából a táblát 4 fajta mezőre bontjuk:

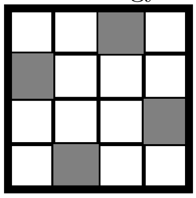
Középső mezők:



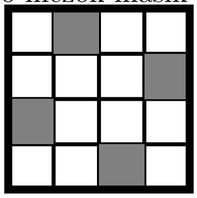
Sarokmezők:



Szélső mezők egyik köre:

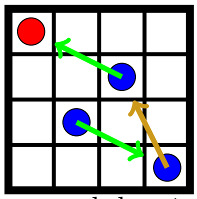


Szélső mezők másik köre:



Szimmetria miatt csak 3 különböző kezdőmező esetét kell megnéznünk.

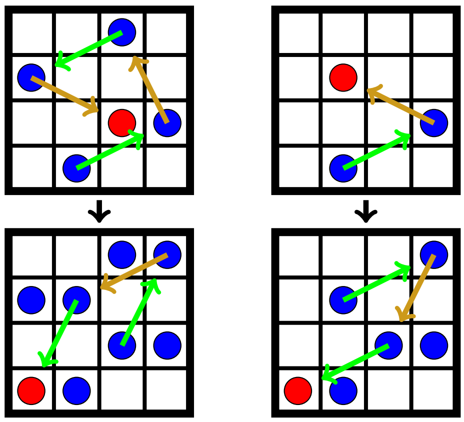
1. eset: A huszár a négy középső mező egyikéről indul.



Ilyenkor a kezdőjátékos könnyen tud nyerni. A kezdőjátékos először belép a sarokba, ezután a második játékosnak csak 1 lehetséges lépése van az ábrán látható módon. Ezt követően a kezdőjátékos belép a szemközti sarokba, és nyer.

A táblázat szélén, de nem a sarokban lévő mezőket a fenti felosztásnál úgy osztottuk ketté, hogy a 4-4 mezőn körbe tud ugrálni a huszár. A következő két esetben a nyerő stratégia olyan lesz, hogy a győztes játékos sose hagy el egy ilyen kört, hanem továbbugrik körbe.

2. eset: A huszár egy szélső, de nem sarokmezőről indul.



Ilyenkor is a kezdőjátékos tud nyerni. A fent leírtaknak megfelelően kezdjen a körön körbemenni, a második játékosnak az első vagy a második lépésében be kell lépni egy középső mezőre. A két lehetséges állás a jobb oldalon látható.

Bármelyik eset is áll fenn, a kezdőjátékos az előző esethez hasonlóan beugrik egy sarokba, majd onnan a második játékosnak csak egy lehetősége van, innen a kezdőjátékos a szemközti sarokba lépve nyer.

3. eset: A huszár egy sarokmezőről indul.

Ilyenkor is a kezdőjátékos nyer. Az első lépésben belép középre. A második játékos vagy a sarokba lép, ilyenkor egyértelmű a folytatás, vagy egy szélső, de nem sarokmezőre. Ezek után a második játékos egy szélső, de nem sarokmezőre kell, hogy lépjen, innen az első játékos ismét elindul körbe.

Az előző esethez hasonlóan az első játékos a kör mentén lép addig, ameddig a második játékos belép egy középső mezőre.

Végül ismét belép az első játékos az egyik sarokba, a második játékos egyértelmű lépése után pedig a szemközti sarokba lépve nyer.