XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Kifejtős megoldókulcs

D kategória

D1. **a)** Máté egy 4×4-es táblázatba 12 nem feltétlenül különböző számot írt, minden mezőbe legfeljebb egy számot. Azt a feladatot adta Áronnak, hogy fejezze be szabályosan az általa elkezdett kitöltést bűnös négyzetté. Észrevették, hogy Áron ezt többféleképpen is meg tudja valósítani. Adjatok példát a Máté által készített táblázatra és annak többféle szabályos befejezésére!
b) Bizonyítsátok be, hogy ha Máté 13 számot írt volna a táblázatba, akkor mindenképp legfeljebb egy szabályos befejezés létezne!
Bűnös négyzet alatt azon 4×4-es táblázatokat értjük, melynek minden mezőjében pontosan egy szám áll, továbbá bármely sorában, oszlopában és a két nagy átlójában is ugyanaz a négy szám összege.
Dürer Matekest feladat

Megoldás: a)

Máté táblázata:

2	2	2	2
	2	2	
	2	2	
2	2	2	2

Egy lehetséges befejezés:

2	2	2	2
3	2	2	1
1	2	2	3
2	2	2	2

Egy másik befejezés:

2	2	2	2
1	2	2	3
3	2	2	1
2	2	2	2

b) Mivel Máté már 13 mezőt kitöltött, így van olyan oszlop, amelynek minden mezőjében már áll szám. Ugyanis ha minden oszlopból legfeljebb 3 mező lenne kitöltve, akkor összesen csak legfeljebb $4 \cdot 3 = 12$ kitöltött mező lehetne. Azaz ebből az oszlopból már meg tudja határozni, hogy mennyi lehet a sorok és az oszlopok összege egy szabályos befejezett kitöltésben.

Ekkor viszont egy üres mezőt csak akkor nem tud Áron egyértelműen kitölteni, ha a sorában és az oszlopában is van még rajta kívül üres mező. Hiszen ha például egy sorban csak egy üres mező lenne, akkor azt ki lehetne tölteni úgy, hogy a már meghatározott sorösszegből kivonjuk a sorban lévő három számot.

Ha valamikor két különböző összeg keletkezik, csak az előbbiekben leírt típusú lépések után, vagy valahová kétféle számot kellene írni, mert a sorában, oszlopában, vagy nagyátlójában kétféle a maradék 3 szám összege, akkor az igazolja, hogy nem lehet szabályosan befejezni a kitöltést, így ez az eset nem lehetséges.

Tegyük fel, hogy Áron kitöltött mindent, amit egyértelműen ki tudott tölteni, és még többféleképpen is szabályosan befejezhető a táblázat. Ekkor még biztosan van kitöltetlen mező. Ezt nem tudta egyértelműen kitölteni, így a sorában van még legalább egy üres mező. Ezt a két mezőt szintén nem tudta még egyértelműen kitölteni a feltevésünk szerint, azaz mindkettő oszlopában van rajta kívül üres mező. Ezek a mezők különbözők, így legalább 4 kitöltetlen mező van, ami ellentmondás. Azaz nem fejezhető be többféleképpen szabályosan bűnös négyzetté a táblázat.

D2. Egy pingpongbajnokságon 100 játékos vett részt, mindenki mindenkivel egy meccset játszott. A győzelem 1 pontot ért, a vereség 0-t. Tudjuk, hogy a bajnokság befejeztével bármely három résztvevőre igaz, hogy valamelyikük legyőzte a másik kettőt. Határozzátok meg a játékosok végső pontszámait!
Minden meccsnek egy győztese és egy vesztese lett, döntetlen nem született.
Hegedűs Dániel feladata

1. Megoldás:

Tegyük fel, hogy van két olyan résztvevő, A és B, akiknek azonos a pontszáma, ez legyen x. Feltehetjük továbbá az általánosság megszorítása nélkül, hogy B legyőzte A-t. Ekkor B további $x-1$ embert győzött le, A pedig további x-et. Ekkor skatulyaelv alapján biztosan lesz olyan játékos, nevezzük C-nek, akit A legyőzött, de B nem.

Vegyük ekkor az A, B és C játékosokat és vizsgáljuk meg a közöttük zajló meccseket. B legyőzte A-t, A legyőzte C-t, míg C pedig nyert B ellen. Tehát találtunk 3 olyan embert, ahol nincs senki, aki legyőzte volna a másik kettőt, ami ellentmondás.

Így nem lehet kettő játékosnak azonos a pontszáma. Egy játékos pontszáma 0 és 99 között bármilyen egész szám lehet. Ez éppen 100 darab szám, tehát mindegyik szám valamely csapatnak a végső pontszáma: 0, 1, 2, …, 99. Ez lehetséges is, ha a játékosokat sorba állítjuk, és mindenki legyőzte a mögötte állókat. Ekkor bármely három játékos közül a legelöl álló legyőzte a másik kettőt.

2. Megoldás:

Indukcióval bizonyítjuk azt, hogy tetszőleges játékosszámú bajnokságban van olyan játékos, aki mindenki mást legyőzött. 3 játékos esetén a feladat feltételei miatt az egyik játékos biztosan megverte a másik kettőt, így ekkor igazoltuk az állítást. Most tegyük fel, hogy az állítást már beláttuk k játékosból álló bajnokságra.

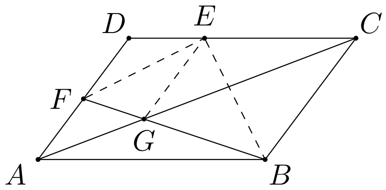
Most bizonyítsuk az állítást $k+1$ játékos esetén. Jelöljük az egyik játékost A-val. Az A-n kívüli k játékos közt is mindenki játszott mindenkivel pontosan egyszer, így az indukció miatt csak őket nézve létezik egy B játékos, aki mindenki mást megvert köztük. Vizsgáljuk az A és B játékos közti meccs eredményét. Ha B megverte A-t, akkor B mindenkit legyőzött, így igazoltuk az állítást. Ha pedig A verte meg B-t, akkor a feladat feltételei miatt tetszőleges másik C játékost is meg kellett, hogy verjen A, hiszen B legyőzte C-t és A legyőzte B-t. Így ez esetben A az a játékos, aki mindenki mást legyőzött. Indukcióval beláttuk, hogy van a bajnokságban olyan játékos, aki mindenki mást legyőzött.

Tekintsük most a 100 fős pingpongbajnokságot. Az állításunkat felhasználva létezik játékos, aki mindenki mást legyőzött, így neki 99 pontja lett. Csak a maradék 99 játékost tekintve köztük szintén lesz valaki, aki mindenki mást legyőzött, az előbb látott állítás miatt. Így neki 98 pontja lett. Őt is kivéve, hasonlóan haladva a végső pontszámok: 99, 98, ..., 1 és 0.

Ez lehetséges is, ha a játékosokat sorba állítjuk, és mindenki legyőzte a mögötte állókat. Ekkor bármely három játékos közül a legelöl álló legyőzte a másik kettőt. Valójában a megoldás során beláttuk, hogy minden a feladat feltételeinek megfelelő bajnokságban a játékosok sorbaállíthatóak ilyen módon.

D3. Az $ABCD$ paralelogrammában az AB oldal hossza 3 egység és a BC oldal hossza 2 egység. A CD oldal D-hez közelebbi harmadolópontja legyen E, továbbá a DA oldal felezőpontja legyen F. Az AC és BF egyenesek metszéspontját jelöljük G-vel.
a) Bizonyítsátok be, hogy az FEB szög derékszög!
b) Határozzátok meg az EG szakasz hosszát!
Osztényi József feladata

Megoldás:



a) Legyen $DAB\sphericalangle = BCD\sphericalangle = \alpha$. Ekkor $ABC\sphericalangle = CDA\sphericalangle = 180° - \alpha$.

Mivel E a CD szakasz D-hez közelebbi harmadolópontja, ezért $CE = 2$, $DE = 1$. Mivel F az AD oldal felezőpontja, ezért $DF = 1$.

Ebből kapjuk, hogy a BCE háromszög egyenlő szárú, mivel $BC = CE = 2$, valamint az EDF háromszög is egyenlő szárú, mert $ED = DF = 1$.

Ekkor tudjuk, hogy $CEB\sphericalangle = 90° - \frac{180°-\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$, valamint $DEF\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Ebből már következik, hogy $FEB\sphericalangle = 180° - \frac{\alpha}{2} - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 90°$.

b) Vegyük észre, hogy az AGF és CGB háromszögek hasonlóak, mert szögeik egyenlők, hiszen $AGF\sphericalangle$ és $CGB\sphericalangle$ csúcsszögek, és $FAG\sphericalangle$ és $GCB\sphericalangle$ pedig váltószögek. Mivel $\frac{FA}{BC} = \frac{1}{2}$, ezért $\frac{GF}{GB} = \frac{1}{2}$. Vagyis G az FB szakasz F-hez közelebbi harmadoló pontja.

Mivel AD és BC párhuzamos, továbbá E és G is harmadolópontok, ezért EG is párhuzamos BC-vel és DA-val. Ebből viszont már hasonlóság miatt következik, hogy $\frac{EG}{AD} = \frac{CE}{CD}$, azaz $EG = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$.

D4. Egy kegyetlen király olyan börtönt építtetett, melyben a 36 cella egy 6×6-os négyzetrács alakban helyezkedik el és bármely két élszomszédos cella között fal található. Néhány cella már most is egy-egy rab kijelölt helye, de minden cella legfeljebb egy rabhoz tartozik. A király idővel arra jut, hogy túl kegyetlen a rabokkal, ezért lebontat néhány falat olyan módon, hogy bármelyik cellából bármelyik másikba el lehessen jutni. Azt viszont nem szeretné, hogy a rabok túl jól érezzék magukat, ezért bármely két, eredetileg egy sorban vagy oszlopban lévő rab között szeretne meghagyni legalább egy falat, hogy ne lássák egymást a kijelölt helyükről. Legfeljebb hány rabot tarthat fogva a király, ha a feltételeknek megfelelően le tud bontatni falakat?
Nagy Kartal feladata

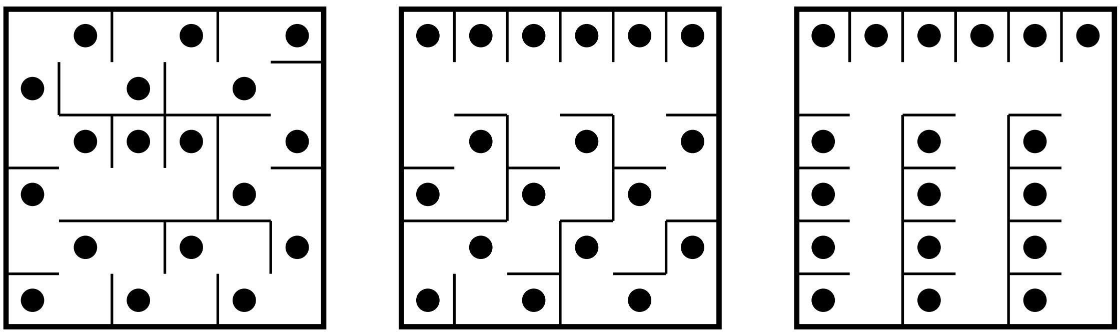
1. Megoldás:

Tekintsük a cellákat külön-külön tartományoknak, amiket falak választanak el egymástól. A király célja, hogy a kezdetben 36 tartományból 1 tartomány maradjon, azaz bármelyik cellából el lehessen jutni bármelyik cellába. Ennek eléréséhez egyesével rombolja le a falakat. Egy fal lerombolásakor vagy eggyel csökken a tartományok száma, ha két különböző tartomány között van a fal vagy nem változik, ha egy tartományon belül van a fal. Tehát ahhoz, hogy a király 1 tartományt kapjon, legalább 35 falat le kell romboljon. Mivel kezdetben 60 fal volt, ezért maximum $60 - 35 = 25$ fal maradhat a rombolás után.

Ha egy sorban s rab van, akkor legalább $s-1$ falat meg kell tartani abban a sorban, hogy ne lássák egymást. Így a sorokban összesen legalább $r-6$ fal van, ha r a rabok száma az egész börtönben. Hasonlóképpen az oszlopokban is legalább $r-6$ fal van, így a rabok számából és a falak maximális számából ezt az egyenlőtlenséget írhatjuk fel:

$$2r - 12 \leq 25$$

Ebből következik, hogy $r \leq 18{,}5$, azaz legfeljebb 18 rabot tarthat fogva a király. Erre van több példa is, három lehetséges konstrukció:



2. Megoldás:

Tekintsük a 6×6-os rács celláit egy gráf csúcsainak, és a lebontott falakat a csúcsokat összekötő éleknek. Így egy 36 csúcsú gráfunk van, melynek kezdetben 0 éle van.

A király célja egy feszítőfa létrehozása, hogy bármelyik csúcsból bármelyik csúcsba el lehessen jutni az élek mentén. Ehhez legalább 35 él szükséges, azaz legalább 35 falat le kell bontani. Kezdetben $2 \cdot 5 \cdot 6 = 60$ fal van, így a lebontás után legfeljebb $60 - 35 = 25$ fal marad. Innentől kezdve követhetjük az 1. Megoldást.

D5. **a)** Áron felírt egy hatjegyű számot a táblára. Ezután Máté megcserélheti a táblán lévő szám első jegyét a második jegyével. Ezután Benedek megcserélheti a táblán lévő szám harmadik jegyét a negyedikkel. Ezután Zsuzsi megcserélheti a táblán lévő szám ötödik jegyét a hatodikkal. Írhatott-e Áron olyan számot, hogy abból kiindulva nyolc, páronként különböző hatjegyű számot kaphatnak, melyek mindegyike osztható 7-tel?
b) Áron egy másik táblára is felírt egy hatjegyű számot. Ezután Domonkos letörölheti a szám első néhány, akár nulla, de legfeljebb öt jegyét, amiket aztán ugyanolyan sorrendben a szám végére kell írnia. Írhatott-e Áron olyan számot, hogy abból kiindulva hat, páronként különböző hatjegyű számot kaphat Domonkos, melyek mindegyike osztható 17-tel?
Egy hatjegyű szám első jegye nem lehet 0. Dürer Matekest feladat

Megoldás: **a)** Igen, Áron írhatott ilyen számot.

Jelöljük a hatjegyű számot, és a megcserélhető számpárokat így:

$$\overline{abcdef}; \quad (a;b); \quad (c;d); \quad (e;f)$$

Ahhoz, hogy nyolc különböző, hatjegyű számot képezhessünk, a számpároknak két-két különböző számjegyet kell tartalmaznia, valamint az $(a;b)$ számpár nem tartalmazhatja a 0 számjegyet.

Képezzünk két olyan számot, melyek az utolsó számpár számjegyeinek felcserélésével egymásba alakíthatóak. Írjuk fel a számokat helyiérték szerint!

$$100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + 1f$$
$$100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10f + 1e$$

Az összegek 7-es osztási maradéka a tagok maradékainak összege. Ha a két, 7-tel osztható összeget kivonjuk egymásból, akkor egy 7-tel osztható számot kapunk. Mivel a különbség $9e - 9f$, és a 7 és a 9 relatív prímek, így a megcserélt $(e; f)$ számpár két tagjának 7-es maradéka azonos, különben nem lehetne a különbség 7-tel osztható.

Azaz olyan számpárokat használhatunk, ahol a különbség 7 lesz csere esetén, és ez ugyanígy megmutatható az $(a; b)$ és $(c; d)$ számpárokra is. Ezek csak a $(0; 7)$, $(1; 8)$ és $(2; 9)$ számpárok. Nézzük meg, hogy számpárok mennyit adnak a hatjegyű szám 7-es maradékához, ha az egyes helyiértékpárokon szerepelnek:

	$(a;b)$	$(c;d)$	$(e;f)$
$(0;7)$	0	0	0
$(1;8)$	2	1	4
$(2;9)$	4	2	1

Mivel a számok 7-tel oszthatók, a számpárok maradékainak összege a 7-nek egy többszöröse. Ez a táblázatból kiolvasható módon csak úgy valósítható meg, ha a három számpár:

$$(0;7),(0;7),(0;7) \quad \text{vagy} \quad (1;8),(1;8),(1;8) \quad \text{vagy} \quad (2;9),(2;9),(2;9).$$

Ezek közül azonban a $(0; 7)$ párt nem használhatjuk fel az első helyen, mivel nem hatjegyű számot is eredményez.

Tehát például az 181818, vagy a 292929 szám megfelel a feltételeknek.

b) Nem, Áron nem írhatott ilyen számot.

Tegyük fel, hogy van ilyen 17-tel osztható szám! Írjuk fel ezt a számot, valamint azt a számot, amit az első számjegy letörlésével, majd a szám végére írásával kapunk, helyiérték szerinti összegben!

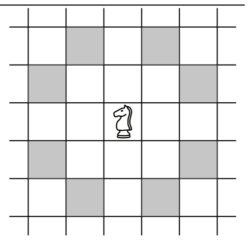
$$x_0 = 100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + 1f$$
$$x_1 = 100000b + 10000c + 1000d + 100e + 10f + 1a$$

Jelöljük a $10000b + 1000c + 100d + 10e + 1f$ összeget S-el! Ekkor a két szám:

$$x_0 = 10^5 a + S$$
$$x_1 = 10S + 1a$$

Ha x_0-t megszorozzuk 10-el, akkor $10x_0 = 10^6 a + 10S$. Ekkor $10x_0 - x_1 = (10^6 - 1)a$. Mivel x_0 és x_1 a feltételezésünk szerint osztható 17-tel, így a $10x_0 - x_1$ különbség is osztható 17-tel.

Ekkor $(10^6 - 1) = 999999 = 999 \cdot 1001 = 9 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Mivel a 17 nem szerepel a prímtényezős felbontásban, ezért a $(10^6 - 1)a$ szorzat akkor és csak akkor lehet 17-tel osztható, ha a osztható 17-tel. Mivel a egy 1 és 9 közé eső számjegy, ez ellentmondás. Tehát nem létezhet a feladatnak megfelelő x_0 szám.

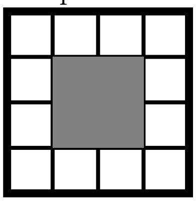


D6. **Játék:** Egy 4×4-es tábla egyik mezőjén kezdetben egy huszár áll. Két játékos felváltva lép a huszárral. Nem szabad olyan mezőre lépni, amelyen korábban már járt a huszár, így a kezdőmezőre sem. Az veszít, aki nem tud lépni.
Az ábrán a szürke mezők mutatják, hogy hogyan lehet lépni egy huszárral.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a huszár kezdőmezőjének ismeretében, hogy kezdők szeretnétek lenni, vagy másodikok.

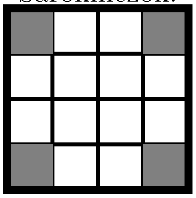
Hegedűs Dániel feladata

Megoldás: A stratégia szempontjából a táblát 4 fajta mezőre bontjuk:

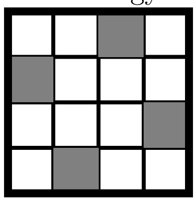
Középső mezők:



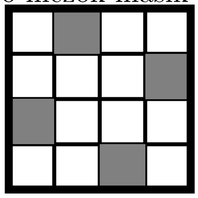
Sarokmezők:



Szélső mezők egyik köre:

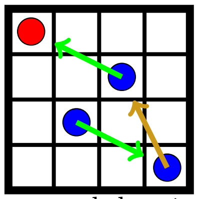


Szélső mezők másik köre:



Szimmetria miatt csak 3 különböző kezdőmező esetét kell megnéznünk.

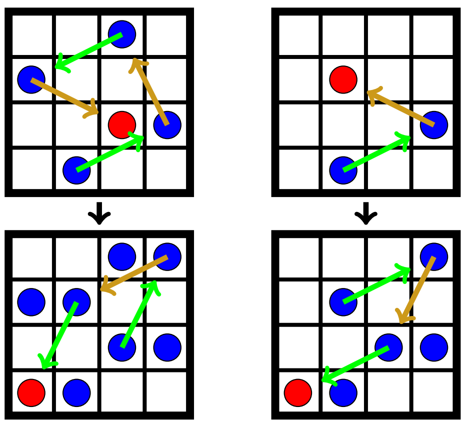
1. eset: A huszár a négy középső mező egyikéről indul.



Ilyenkor a kezdőjátékos könnyen tud nyerni. A kezdőjátékos először belép a sarokba, ezután a második játékosnak csak 1 lehetséges lépése van az ábrán látható módon. Ezt követően a kezdőjátékos belép a szemközti sarokba, és nyer.

A táblázat szélén, de nem a sarokban lévő mezőket a fenti felosztásnál úgy osztottuk ketté, hogy a 4-4 mezőn körbe tud ugrálni a huszár. A következő két esetben a nyerő stratégia olyan lesz, hogy a győztes játékos sose hagy el egy ilyen kört, hanem továbbugrik körbe.

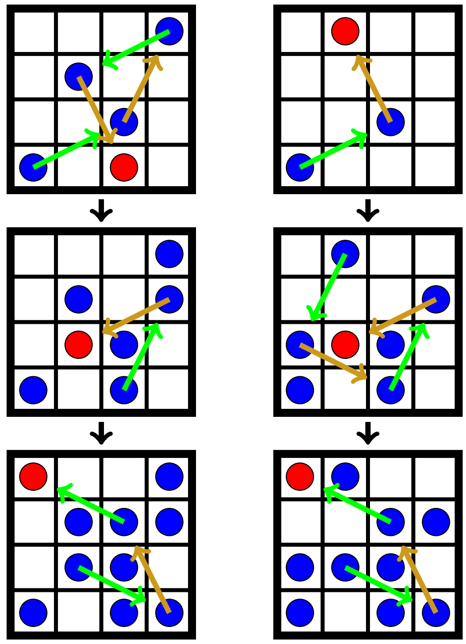
2. eset: A huszár egy szélső, de nem sarokmezőről indul.



Ilyenkor is a kezdőjátékos tud nyerni. A fent leírtaknak megfelelően kezdjen a körön körbemenni, a második játékosnak az első vagy a második lépésében be kell lépni egy középső mezőre. A két lehetséges állás a jobb oldalon látható.

Bármelyik eset is áll fenn, a kezdőjátékos az előző esethez hasonlóan beugrik egy sarokba, majd onnan a második játékosnak csak egy lehetősége van, innen a kezdőjátékos a szemközti sarokba lépve nyer.

3. eset: A huszár egy sarokmezőről indul.



Ilyenkor is a kezdőjátékos nyer. Az első lépésben belép középre. A második játékos vagy a sarokba lép, ilyenkor egyértelmű a folytatás, vagy egy szélső, de nem sarokmezőre. Ezek után a második játékos egy szélső, de nem sarokmezőre kell, hogy lépjen, innen az első játékos ismét elindul körbe.

Az előző esethez hasonlóan az első játékos a kör mentén lép addig, ameddig a második játékos belép egy középső mezőre.

Végül ismét belép az első játékos az egyik sarokba, a második játékos egyértelmű lépése után pedig a szemközti sarokba lépve nyer.