



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Kifejtős feladatsor



1. a) Anett, Andris, Kartal és Benedek kártyáznak. Négy különböző színű paklijuk van, mindegyik négy lapot tartalmaz, megszámozva 1-től 4-ig. Először összekeverik a 16 lapot, majd mind a négyen húznak négy lapot a kezükbe, amiket megmutatnak egymásnak. Ezután közösen eldöntik, hogy milyen sorrendben ülnek le körben, és azt is, hogy ki kezd. A játék folyamán a kör mentén óramutató járásával megegyező irányban sorban raknak le egy-egy lapot, de egy lapot csak akkor rakhatnak le, ha már minden nála kisebb számú, vele azonos színű le lett rakva. Akkor nyernek, ha az összes lapot lerakják. Ha valaki a sorra kerülésekor nem tud rakni és még van lap a kezében, veszítenek. Mutassatok olyan húzást, amelynél akárhogy is döntenek és játszanak, veszítenek!

b) Mutassátok meg, hogy ha mind a négy pakliból csak az 1-es és 2-es lapokkal játszanak, akkor mindig tudnak nyerni!

c) Ha mind a négy pakliból három lapot használnak, 1-től 3-ig számozva, akkor is tudnak mindig nyerni?

2. Legyen az ABC háromszög olyan, hogy $CAB \sphericalangle = CBA \sphericalangle = 72^\circ$. A D pont az AC oldalon helyezkedik el úgy, hogy $DA = AB$ teljesül. A C -ből az ABD háromszög köréírt köréhez húzott érintők érintési pontjait jelölje E és F . Bizonyítsátok be, hogy az EF szakasz felezőpontja éppen az ABC háromszög köréírt körének középpontja!

3. a) Áron felírt egy hatjegyű számot a táblára. Ezután Máté megcserélheti a táblán lévő szám első jegyét a második jegyével. Ezután Benedek megcserélheti a táblán lévő szám harmadik jegyét a negyedikkel. Ezután Zsuzsi megcserélheti a táblán lévő szám ötödik jegyét a hatodikkal. Írhatott-e Áron olyan számot, hogy abból kiindulva nyolc, páronként különböző hatjegyű számot kaphatnak, melyek mindegyike osztható 7-tel?

b) Áron egy másik táblára is felírt egy hatjegyű számot. Ezután Domonkos letörölheti a szám első néhány, akár nulla, de legfeljebb öt jegyét, amiket aztán ugyanolyan sorrendben a szám végére kell írnia. Írhatott-e Áron olyan számot, hogy abból kiindulva hat, páronként különböző hatjegyű számot kaphat Domonkos, melyek mindegyike osztható 17-tel?

Egy hatjegyű szám első jegye nem lehet 0.

4. Geronimo gondolt egy egész együtthatós P polinomra. Ezt szeretné kitalálni Thea, aki ehhez minden percben kérdezhet Geronimótól egy q racionális számot, amire Geronimo rögtön elmondja Theának $P(q)$ értékét.

a) Van-e olyan P polinom, amelyre létezik Theának véges sok olyan kérdése, amikből együtt ki tudja találni P -t?

b) Geronimo elárulta Theának, hogy P foka 2025 és főegyütthatója 1. Bizonyítsátok be, hogy semmilyen ilyen P -re nem létezik 2024 olyan kérdése Theának, amikből együtt ki tudja találni P -t!

Egy 2025-ödfokú $P(x) = a_{2025}x^{2025} + a_{2024}x^{2024} + \dots + a_1x + a_0$ polinom együtthatói az a_{2025}, \dots, a_0 számok, főegyütthatója a_{2025} . Thea akkor tudja kitalálni a P polinomot, ha az általa ismert információknak az egész együtthatós polinomok közül csak P felel meg.

5. Megadható-e végtelen sok általános helyzetű egyenes a síkon úgy, hogy az egyenesek által meghatározott metszéspontok minden egyenestől egész távolságra legyenek?

Egyenesek egy halmaza általános helyzetű, ha semelyik kettő nem párhuzamos, és semelyik három nem megy át egy ponton.

6. **Játék:** Kezdetben egy pozitív egészekből álló (n, k) rendezett számpár van felírva egy lapra. Két játékos felváltva lép, ha a nem áthúzott (a, b) számpár szerepel a lapon, a soron lévő játékosnak egy lépésben át kell húznia (a, b) -t és helyette felírnia vagy az $(a, b + 1)$, vagy az $(a - b, b)$ számpárt. Az nyer, aki először ír fel olyan számpárt, amelyben nem mindkét szám pozitív.

Győztek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el n és k ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Mindegyik megoldást külön lapra írájatok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat sorszáma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 2 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.

A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánunk!