XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Kifejtős megoldókulcs

E kategória

E1. **a)** Anett, Andris, Kartal és Benedek kártyáznak. Négy különböző színű paklijuk van, mindegyik négy lapot tartalmaz, megszámozva 1-től 4-ig. Először összekeverik a 16 lapot, majd mind a négyen húznak négy lapot a kezükbe, amiket megmutatnak egymásnak. Ezután közösen eldöntik, hogy milyen sorrendben ülnek le körben, és azt is, hogy ki kezd. A játék folyamán a kör mentén óramutató járásával megegyező irányban sorban raknak le egy-egy lapot, de egy lapot csak akkor rakhatnak le, ha már minden nála kisebb számú, vele azonos színű le lett rakva. Akkor nyernek, ha az összes lapot lerakják. Ha valaki a sorra kerülésekor nem tud rakni és még van lap a kezében, veszítenek. Mutassatok olyan húzást, amelynél akárhogy is döntenek és játszanak, veszítenek!
b) Mutassátok meg, hogy ha mind a négy pakliból csak az 1-es és 2-es lapokkal játszanak, akkor mindig tudnak nyerni!
c) Ha mind a négy pakliból három lapot használnak, 1-től 3-ig számozva, akkor is tudnak mindig nyerni?
Kocsis Anett feladata

Megoldás: a) Jelöljük a négy színt A-val, B-vel, C-vel és D-vel, továbbá innentől a kártyalapokat úgy fogjuk jelölni, hogy a színük mögé írjuk a számukat (például a C színű 3-as számú lapra innentől $C3$-ként fogunk hivatkozni).

Legyenek Anett lapjai $A1, A2, B1$ és $B2$, Andris lapjai $C1, C2, D1$ és $D2$, Kartal lapjai $A3, A4, B3$ és $B4$, továbbá Benedek lapjai $C3, C4, D3$ és $D4$. Ekkor ahhoz, hogy Kartal le tudjon rakni egy lapot az első körben, az kell, hogy vagy a $A1$ és $A2$ is le legyen már rakva, vagy pedig $B1$ és $B2$ is (hiszen $A3$ és $A4$ lerakásának előfeltétele $A2$ lerakása, $B3$ és $B4$ lerakásának pedig $B2$ lerakása). Viszont mivel $A1$ és $A2$, illetve $B1$ és $B2$ is Anett kezében van, és mivel Anett legfeljebb egyszer kerülhet sorra Kartal előtt, nem lehet egyik lappár sem lerakva, mielőtt Kartal sorra kerül, így legkésőbb Kartal sorra kerülésekor veszíteni fognak ebben az osztásban.

b) Vegyük észre, hogy ha az összes 1-es le lett már rakva, akkor akármelyik lap lerakható.

Ha mind a négy embernek van 1-es kártyája, akkor azt le tudja rakni mindegyikük az első körben és a második körben utána a 2-est.

Ha csak három embernek van 1-es kártyája, akkor pontosan az egyikőjüknél két 1-es van és pontosan az egyiküknél két 2-es. Ekkor, ha a két 1-essel rendelkező kezdi a kört, majd utána az egy 1-essel rendelkezők lerakják a saját 1-esüket, akkor az utolsó ember valamelyik 2-esének színéből már biztosan szerepelt az 1-es korábban, így azt a lapját ki tudja rakni. Ezután ismét az a játékos jön, akinek eredetileg két 1-ese volt és miután a másikat lerakja, már az összes 1-es le lesz rakva, azaz a többiek már be tudják fejezni a kört.

Ha csak két embernek van 1-es kártyája, akkor a másik két ember két-két 2-essel rendelkezik. Kezdjen ebben az esetben az a két játékos, akinek csak 1-ese van. Miután az első játékos kijátszott egy 1-est, valamelyik csupa 2-esel rendelkező játékos már biztosan ki tudja játszani a 2-esét abból a színből. Ezután a másodikként sorra kerülő játékos biztosan tud úgy lerakni egy 1-est, hogy arra utána a másik kizárólag 2-essel rendelkező játékos is le tudja már rakni valamelyik 2-esét. Így az első körben még nem veszítenek, a második pedig azzal kezdődik, hogy az első két játékos lerakja a megmaradó 1-eseit, tehát azt a kört is biztosan be tudják fejezni.

Az nem lehetséges, hogy kettőnél kevesebb ember rendelkezik 1-es kártyával, tehát a feladat állítását bebizonyítottuk.

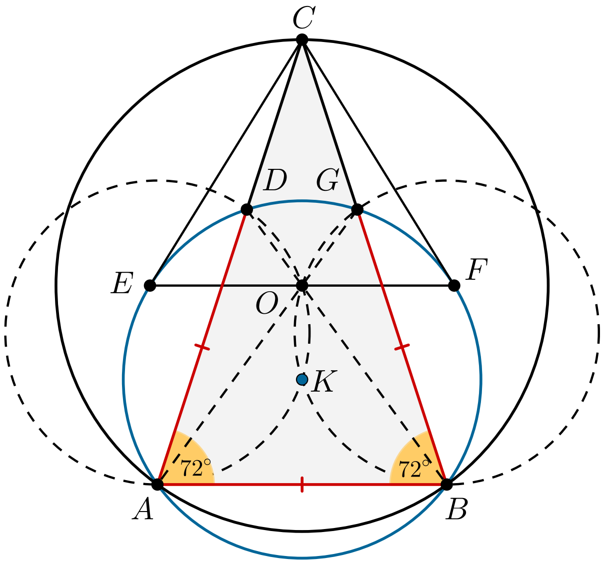
c) Nem, nem tudnak. Ha Anett lapjai $A1, A2$ és $D1$, Andris lapjai $B1, B2$ és $D2$, Kartal lapjai $C1, C2$ és $D3$, Benedek lapjai pedig az $A3, B3$ és $C3$, akkor az a) feladatrészhez hasonló módon láthatjuk, hogy Benedek nem fogja tudni lerakni semelyik lapját az első körben semmilyen sorrend esetén, hiszen se az $A1, A2$, se a $B1, B2$, sem pedig a $C1, C2$ lappár nem lehet lerakva addigra, mire ő sorra kerül, mert mindenki más addig legfeljebb csak egyszer rak.

E2. Legyen az ABC háromszög olyan, hogy $CAB\sphericalangle = CBA\sphericalangle = 72°$. A D pont az AC oldalon helyezkedik el úgy, hogy $DA = AB$ teljesül. A C-ből az ABD háromszög köréírt köréhez húzott érintők érintési pontjait jelölje E és F. Bizonyítsátok be, hogy az EF szakasz felezőpontja éppen az ABC háromszög köréírt körének középpontja!
Hegedűs Dániel feladata

1. Megoldás: Legyen G az a pont a BC szakaszon, amelyre $BG = AB$. Jelölje továbbá K az $ABDGEF$ pontokon átmenő kör középpontját. Legyen végül O az (AKD) és (BKG) körök K-tól különböző metszéspontja.

Először azt látjuk be, hogy O az ABC háromszög köréírt körének középpontja. Egyrészt szimmetria miatt O rajta van az ACB szög felezőjén, így $OCB\sphericalangle = 18°$. Másrészt kiszámoljuk az OBC szöget: $OBC\sphericalangle = OBG\sphericalangle = OKG\sphericalangle = \frac{DKG\sphericalangle}{2} = DBG\sphericalangle = ABC\sphericalangle - ABD\sphericalangle = 72° - 54° = 18°$, mivel hogy $BAD\sphericalangle = 72°$ és $AB = AD$, ezért $ABD\sphericalangle = 54°$. Vagyis $OCB\sphericalangle = OBC\sphericalangle$, amiből $OC = OB$, de szimmetria miatt $OB = OA$, vagyis O tényleg az ABC háromszög köréírt körének a középpontja.

Ezek után belátjuk, hogy O az EF szakasz felezőpontja. Szimmetria miatt tudjuk, hogy $C-O-K$ pontok egy egyenesre esnek. Ekkor a C pontnak az $ABDGEF$ körre vett hatványa $CF^2 = CG \cdot CB$. Ezen felül a C pont $BGOK$ körre vett hatánya $CG \cdot CB = CO \cdot CK$. Ebből kapjuk, hogy $CF^2 = CO \cdot CK$, amiből következik, hogy $COF\sphericalangle = CFK\sphericalangle = 90°$. Szimmetria miatt tudjuk, hogy $FO = EO$, de már tudjuk, hogy $EOF\sphericalangle = 180°$, amiből következik, hogy O az EF szakasz felezőpontja. Ezzel pedig beláttuk a bizonyítandó állítást.



2. Megoldás: Definiáljuk O-t az (ABC) kör középpontjaként. Most is vegyük észre, hogy $O \in BD$, hiszen egyszerű szögszámolással $OBA\sphericalangle = \dfrac{180° - AOB\sphericalangle}{2} = \dfrac{180° - 2BAC\sphericalangle}{2} = 54° = \dfrac{180° - BAD\sphericalangle}{2} = DBA\sphericalangle$. Azt kell igazolni, hogy C és O egymás inverzei az (ABD) körre nézve. Invertáljuk az ábrát az (ABC) körre. Ekkor az A, B, C pontok helyben maradnak, O elmegy a végtelenbe. Az invertálás után a bizonyítandó állítás az, hogy C és O képei egymás inverzei az (ABD) kör képére nézve, azaz, hogy C az (ABD^*) kör középpontja, ahol D^*-gal jelöljük D inverzét az (ABC) körre nézve. Persze $CA = CB$, tehát elég lenne látni, hogy $CD^* = CB$. Viszont az invertálás miatt $BD^*C\sphericalangle = OD^*C\sphericalangle = OCD\sphericalangle = 18° = 72° - 54° = DBC\sphericalangle = D^*BC$. Ezzel a BCD^* háromszög valóban egyenlőszárú, amivel pedig beláttuk az állítást.

E3. **a)** Áron felírt egy hatjegyű számot a táblára. Ezután Máté megcserélheti a táblán lévő szám első jegyét a második jegyével. Ezután Benedek megcserélheti a táblán lévő szám harmadik jegyét a negyedikkel. Ezután Zsuzsi megcserélheti a táblán lévő szám ötödik jegyét a hatodikkal. Írhatott-e Áron olyan számot, hogy abból kiindulva nyolc, páronként különböző hatjegyű számot kaphatnak, melyek mindegyike osztható 7-tel?
b) Áron egy másik táblára is felírt egy hatjegyű számot. Ezután Domonkos letörölheti a szám első néhány, akár nulla, de legfeljebb öt jegyét, amiket aztán ugyanolyan sorrendben a szám végére kell írnia. Írhatott-e Áron olyan számot, hogy abból kiindulva hat, páronként különböző hatjegyű számot kaphat Domonkos, melyek mindegyike osztható 17-tel?
Egy hatjegyű szám első jegye nem lehet 0.
Dürer Matekest feladat

Megoldás: **a)** Igen, Áron írhatott ilyen számot.

Jelöljük a hatjegyű számot, és a megcserélhető számpárokat így:

$$\overline{abcdef}; \quad (a;b); \quad (c;d); \quad (e;f)$$

Ahhoz, hogy nyolc különböző, hatjegyű számot képezhessünk, a számpároknak két-két különböző számjegyet kell tartalmaznia, valamint az $(a;b)$ számpár nem tartalmazhatja a 0 számjegyet.

Képezzünk két olyan számot, melyek az utolsó számpár számjegyeinek felcserélésével egymásba alakíthatóak. Írjuk fel a számokat helyiérték szerint!

$$\begin{gathered}100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + 1f \\ 100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10f + 1e\end{gathered}$$

Az összegek 7-es osztási maradéka a tagok maradékainak összege. Ha a két, 7-tel osztható összeget kivonjuk egymásból, akkor egy 7-tel osztható számot kapunk. Mivel a különbség $9e - 9f$, és a 7 és a 9 relatív prímek, így a megcserélt $(e;f)$ számpár két tagjának 7-es maradéka azonos, különben nem lehetne a különbség 7-tel osztható.

Azaz olyan számpárokat használhatunk, ahol a különbség 7 lesz csere esetén, és ez ugyanígy megmutatható az $(a;b)$ és $(c;d)$ számpárokra is. Ezek csak a $(0;7)$, $(1;8)$ és $(2;9)$ számpárok. Nézzük meg, hogy számpárok mennyit adnak a hatjegyű szám 7-es maradékához, ha az egyes helyiértékpárokon szerepelnek:

	$(a;b)$	$(c;d)$	$(e;f)$
$(0;7)$	0	0	0
$(1;8)$	2	1	4
$(2;9)$	4	2	1

Mivel a számok 7-tel oszthatók, a számpárok maradékainak összege a 7-nek egy többszöröse. Ez a táblázatból kiolvasható módon csak úgy valósítható meg, ha a három számpár:

$$(0;7),(0;7),(0;7) \quad \text{vagy} \quad (1;8),(1;8),(1;8) \quad \text{vagy} \quad (2;9),(2;9),(2;9).$$

Ezek közül azonban a $(0;7)$ párt nem használhatjuk fel az első helyen, mivel nem hatjegyű számot is eredményez.

Tehát például az 181818, vagy a 292929 szám megfelel a feltételeknek.

b) Nem, Áron nem írhatott ilyen számot.

Tegyük fel, hogy van ilyen 17-tel osztható szám! Írjuk fel ezt a számot, valamint azt a számot, amit az első számjegy letörlésével, majd a szám végére írásával kapunk, helyiérték szerinti összegben!

$$\begin{gathered}x_0 = 100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + 1f \\ x_1 = 100000b + 10000c + 1000d + 100e + 10f + 1a\end{gathered}$$

Jelöljük a $10000b + 1000c + 100d + 10e + 1f$ összeget S-el! Ekkor a két szám:

$$x_0 = 10^5 a + S$$
$$x_1 = 10S + 1a$$

Ha x_0-t megszorozzuk 10-el, akkor $10x_0 = 10^6 a + 10S$. Ekkor $10x_0 - x_1 = (10^6 - 1)a$. Mivel x_0 és x_1 a feltételezésünk szerint osztható 17-tel, így a $10x_0 - x_1$ különbség is osztható 17-tel.

Ekkor $(10^6 - 1) = 999999 = 999 \cdot 1001 = 9 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Mivel a 17 nem szerepel a prímtényezős felbontásban, ezért a $(10^6 - 1)a$ szorzat akkor és csak akkor lehet 17-tel osztható, ha a osztható 17-tel. Mivel a egy 1 és 9 közé eső számjegy, ez ellentmondás. Tehát nem létezhet a feladatnak megfelelő x_0 szám.

E4. Geronimo gondolt egy egész együtthatós P polinomra. Ezt szeretné kitalálni Thea, aki ehhez minden percben kérdezhet Geronimotól egy q racionális számot, amire Geronimo rögtön elmondja Theanak $P(q)$ értékét.
a) Van-e olyan P polinom, amelyre létezik Theanak véges sok olyan kérdése, amikből együtt ki tudja találni P-t?
b) Geronimo elárulta Theanak, hogy P foka 2025 és főegyütthatója 1. Bizonyítsátok be, hogy semmilyen ilyen P-re nem létezik 2024 olyan kérdése Theanak, amikből együtt ki tudja találni P-t!
Egy 2025-ödfokú $P(x) = a_{2025}x^{2025}+a_{2024}x^{2024}+\ldots+a_1x+a_0$ polinom együtthatói az $a_{2025}, \ldots, a_0$ számok, főegyütthatója a_{2025}. Thea akkor tudja kitalálni a P polinomot, ha az általa ismert információknak az egész együtthatós polinomok közül csak P felel meg.
Beke Csongor feladata

Megoldás: a) A válasz az, hogy nincs. Tegyük fel, hogy valamilyen P polinom esetén Thea valamilyen $q_1 = a_1/b_1, q_2 = a_2/b_2, \ldots, q_N = a_N/b_N$ kérdésekre kapott válaszokból ki tudja találni P-t. Tekintsük a $P^*(x) = P(x) + (b_1x - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_Nx - a_N)$ polinomot. Figyeljük meg, hogy ez nem egyenlő P-vel, azonban a $q_1, q_2, \ldots, q_N$ helyettesítési értékeken megegyezik P-vel, ami ellentmond annak, hogy Thea ki tudta találni a P polinomot.

b) Tegyük fel hogy Thea a $q_1 = a_1/b_1, q_2 = a_2/b_2, \ldots, q_{2024} = a_{2024}/b_{2024}$ értékeket kérdezte meg, amiből már meg tudta határozni P-t. Ekkor, az előző feladatrészhez hasonlóan, a $P^*(x) = P(x) + (b_1x - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_{2024}x - a_{2024})$ polinom ugyanazt rendeli q_1-hez, q_2-höz, …, és q_{2024}-hez is, mint P, és mivel P foka 2025 és főegyütthatója 1, így P^* foka is 2025 és főegyütthatója 1, hiszen a hozzáadott tag legfeljebb 2024-edfokú. Ellentmondás, így 2024 kérdés tényleg nem elég.

E5. Megadható-e végtelen sok általános helyzetű egyenes a síkon úgy, hogy az egyenesek által meghatározott metszéspontok minden egyenestől egész távolságra legyenek?
Egyenesek egy halmaza általános helyzetű, ha semelyik kettő nem párhuzamos, és semelyik három nem megy át egy ponton.

Megoldás:

A válasz nem.

Indirekten tegyük fel, hogy megadható végtelen sok egyenes, és legyen az egyik e egyenesen két metszéspont A és B. Tekintsünk egy tetszőleges e-től különböző f egyenest, és legyen f' az az egyenes, ami f-fel párhuzamos és áthalad az A ponton. Figyeljük meg, hogy mivel f az indirekt feltevésünk szerint egész távolságra volt A-tól és B-től, így f-et egy egész hosszúságú vektorral kell eltolni, hogy f'-t kapjuk, azaz f' is egész távolságra van B-től. Ez azzal ekvivalens, hogy van olyan egész sugarú kör B körül, amit f' érint. Mivel csak véges sok olyan egész sugarú kör van, aminek B a középpontja és A nem belső pontja, és minden ilyen körhöz legfeljebb két érintő húzható A-n keresztül, így f' csak véges sokféle lehet. Ez azonban ellentmondás, mivel a végtelen sok egyenes mindegyikéhez tudjuk venni a vele párhuzamos, A-n áthaladó egyenest, és ezeknek különbözőknek kéne lennie, mert feltettük, hogy nincs két párhuzamos egyenes. Tehát nem lehet megadni végtelen sok egyenest a feltételeknek megfelelően.

E6. **Játék:** Kezdetben egy pozitív egészekből álló (n, k) rendezett számpár van felírva egy lapra. Két játékos felváltva lép, ha a nem áthúzott (a, b) számpár szerepel a lapon, a soron lévő játékosnak egy lépésben át kell húznia (a, b)-t és helyette felírnia vagy az $(a, b+1)$, vagy az $(a-b, b)$ számpárt. Az nyer, aki először ír fel olyan számpárt, amelyben nem mindkét szám pozitív.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el n és k ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás: Nevezzünk egy helyzetet nyerő helyzetnek, ha onnan kezdve a második játékosnak van nyerő stratégiája, különben vesztő helyzetnek. Végignézzük a lehetséges (a, b) számpárokra, hogy nyerő vagy vesztő helyzetek.

Világos, hogy ha $a \leq b$, az egy vesztő helyzet. Ha $a \leq 2b$, akkor ha valaki a-t csökkenti, veszít, ha pedig mindketten felváltva b-t növelgetik, akkor az veszít, akinek a lépésénél $b = a$ lesz, így azok a nyerő helyzetek, amelyekben $a - b$ páratlan.

Most megmutatjuk, hogy amennyiben $a > 2b$, ha a páros és b páratlan, az egy nyerő helyzet, ha pedig a és b is páros, vagy a és b is páratlan, az vesztő helyzet. Amennyiben ezt megsejtjük, már nem nehéz bizonyítani. A (páros, páros) esetből b-t növelve lehet nyerő mezőre lépni. A (páratlan, páratlan) helyzetből is tudunk (páros, páratlan) helyzetbe lépni, ha a helyett $a - b$ írunk. Figyeljük meg, hogy ezek akkor is nyerő helyzetbe visznek, ha a lépés után $a \leq 2b$. Végül azt kell megmutatni, hogy a (páros, páratlan) helyzetek nyerők, azaz onnan csak vesztőre lehet lépni, ami pedig világos, mert az egyik lehetőség két páros, a másik két páratlan számba visz, amik mindenképpen vesztők az eddigiek alapján.

Már csak az az eset maradt, amikor $a > 2b$, a páratlan és b páros. Ekkor b növelése vesztő helyzetre visz. Ha pedig mindkét játékos felváltva a-t csökkenti, akkor az nyer, aki először csökkenti a-t $2b$ alá, így azok a nyerő helyzetek, amikor $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ páratlan.