XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Kifejtős feladatsor

E+ kategória

1. Legyen az ABC háromszög olyan, hogy $CAB\sphericalangle = CBA\sphericalangle = 72°$. A D pont az AC oldalon helyezkedik el úgy, hogy $DA = AB$ teljesül. A C-ből az ABD háromszög köréírt köréhez húzott érintők érintési pontjait jelölje E és F. Bizonyítsátok be, hogy az EF szakasz felezőpontja éppen az ABC háromszög köréírt körének középpontja!

2. Geronimo gondolt egy egész együtthatós P polinomra. Ezt szeretné kitalálni Thea, aki ehhez minden percben kérdezhet Geronimotól egy q racionális számot, amire Geronimo rögtön elmondja Theanak $P(q)$ értékét.
a) Van-e olyan P polinom, amelyre létezik Theanak véges sok olyan kérdése, amikből együtt ki tudja találni P-t?
b) Geronimo elárulta Theanak, hogy P főegyütthatója 1. Bizonyítsátok be, hogy minden ilyen P-re létezik véges sok olyan kérdése Theanak, amikből együtt ki tudja találni P-t! Határozzátok meg P függvényében, hogy ehhez legkevesebb hány kérdésre van szüksége Theanak!
Thea akkor tudja kitalálni a P polinomot, ha az általa ismert információknak az egész együtthatós polinomok közül csak P felel meg.

3. a) Igaz-e, hogy tetszőleges pozitív egész N esetén megadható N darab általános helyzetű egyenes a síkon úgy, hogy az egyenesek által meghatározott metszéspontok minden egyenestől egész távolságra legyenek?
b) Megadható-e végtelen sok ilyen tulajdonságú, általános helyzetű egyenes?
Egyenesek egy halmaza általános helyzetű, ha semelyik kettő nem párhuzamos, és semelyik három nem megy át egy ponton.

4. Legyen S a pozitív egészeknek egy nemüres véges részhalmaza, és legyen G egy n csúcsú összefüggő fagráf. Bármely u, v csúcsokra jelölje $d(u, v)$ a két csúcs gráfelméleti távolságát, azaz az u, v csúcsokat összekötő egyértelmű út éleinek számát. Hívjuk *felderítésnek* azon $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}$ csúcssorozatokat, melyekre $v_1 = v_{n+1}$, a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsok páronként különbözők és bármely $1 \leq i \leq n$-re a $d(v_i, v_{i+1})$ távolság S-beli. Egy felderítés *sikeres*, ha a $d(v_1, v_2), d(v_2, v_3), \ldots, d(v_n, v_{n+1})$ számok között minden $s \in S$ szám ugyanannyiszor szerepel. Mely S halmazok esetén létezik olyan G véges, legalább két csúcsú összefüggő fagráf, amely sikeresen felderíthető?

5. Egy pozitív egész k számot *kriminálisnak* nevezünk, ha léteznek olyan különböző m, n pozitív egészek, melyre a k számnak az m-es és n-es számrendszerbeli felírása is kétjegyű, méghozzá ugyanabból a két számjegyből állnak, csak fordított sorrendben. Bizonyítsátok be, hogy létezik olyan K pozitív egész, hogy minden $k \geq K$ egész kriminális!
A pozitív egész b, k számokra k-nak a b-s számrendszerbeli felírása az a $(b_d, b_{d-1}, \ldots, b_1, b_0)$ egészekből álló rendezett számsor, amelyben $0 \leq b_i < b$ minden $i < d$-re és $0 < b_d < b$, illetve amelyre $k = b_d \cdot b^d + b_{d-1} \cdot b^{d-1} + \ldots + b_1 \cdot b + b_0$. Ilyenkor $(b_d, b_{d-1}, \ldots, b_1, b_0)$ a számjegyek, és a számjegyek száma $d+1$. Például a 7-nek a 3-as számrendszerbeli felírása $(2, 1)$, míg az 5-ös számrendszerbeli felírása $(1, 2)$, így a 7 kriminális.

6. Játék: Kezdetben egy pozitív egészekből álló (n, k) rendezett számpár van felírva egy lapra. Két játékos felváltva lép, ha a nem áthúzott (a, b) számpár szerepel a lapon, a soron lévő játékosnak egy lépésben át kell húznia (a, b)-t és helyette felírnia vagy az $(a, b+1)$, vagy az $(a-b, b)$ számpárt. Az nyer, aki először ír fel olyan számpárt, amelyben nem mindkét szám pozitív.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el n és k ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat sorszáma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 2 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.
A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:

a XVIII. Dürer Verseny szervezői