XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Kifejtős megoldókulcs

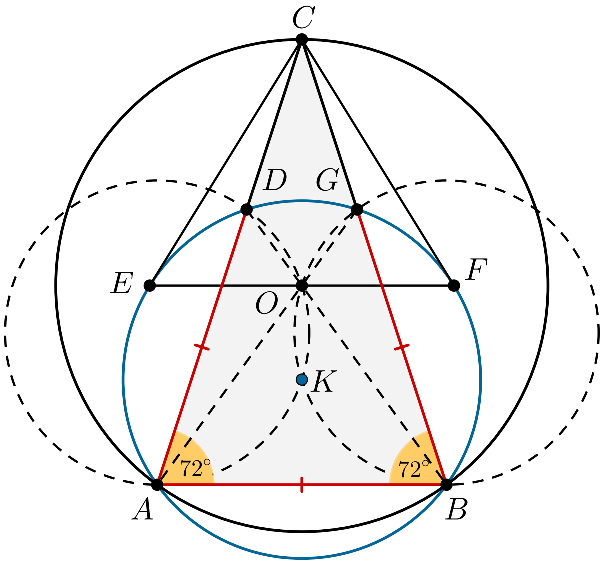
E+ kategória

E+1. Legyen az ABC háromszög olyan, hogy $CAB\sphericalangle = CBA\sphericalangle = 72°$. A D pont az AC oldalon helyezkedik el úgy, hogy $DA = AB$ teljesül. A C-ből az ABD háromszög köréírt köréhez húzott érintők érintési pontjait jelölje E és F. Bizonyítsátok be, hogy az EF szakasz felezőpontja éppen az ABC háromszög köréírt körének középpontja!
Hegedűs Dániel feladata

1. Megoldás: Legyen G az a pont a BC szakaszon, amelyre $BG = AB$. Jelölje továbbá K az $ABDGEF$ pontokon átmenő kör középpontját. Legyen végül O az (AKD) és (BKG) körök K-tól különböző metszéspontja.

Először azt látjuk be, hogy O az ABC háromszög köréírt körének középpontja. Egyrészt szimmetria miatt O rajta van az ACB szög felezőjén, így $OCB\sphericalangle = 18°$. Másrészt kiszámoljuk az OBC szöget: $OBC\sphericalangle = OBG\sphericalangle = OKG\sphericalangle = \frac{DKG\sphericalangle}{2} = DBG\sphericalangle = ABC\sphericalangle - ABD\sphericalangle = 72° - 54° = 18°$, mivel hogy $BAD\sphericalangle = 72°$ és $AB = AD$, ezért $ABD\sphericalangle = 54°$. Vagyis $OCB\sphericalangle = OBC\sphericalangle$, amiből $OC = OB$, de szimmetria miatt $OB = OA$, vagyis O tényleg az ABC háromszög köréírt körének a középpontja.

Ezek után belátjuk, hogy O az EF szakasz felezőpontja. Szimmetria miatt tudjuk, hogy $C - O - K$ pontok egy egyenesre esnek. Ekkor a C pontnak az $ABDGEF$ körre vett hatványa $CF^2 = CG \cdot CB$. Ezen felül a C pont $BGOK$ körre vett hatánya $CG \cdot CB = CO \cdot CK$. Ebből kapjuk, hogy $CF^2 = CO \cdot CK$, amiből következik, hogy $COF\sphericalangle = CFK\sphericalangle = 90°$. Szimmetria miatt tudjuk, hogy $FO = EO$, de már tudjuk, hogy $EOF\sphericalangle = 180°$, amiből következik, hogy O az EF szakasz felezőpontja. Ezzel pedig beláttuk a bizonyítandó állítást.



2. Megoldás: Definiáljuk O-t az (ABC) kör középpontjaként. Most is vegyük észre, hogy $O \in BD$, hiszen egyszerű szögszámolással $OBA\sphericalangle = \dfrac{180° - AOB\sphericalangle}{2} = \dfrac{180° - 2BAC\sphericalangle}{2} = 54° = \dfrac{180° - BAD\sphericalangle}{2} = DBA\sphericalangle$. Azt kell igazolni, hogy C és O egymás inverzei az (ABD) körre nézve. Invertáljuk az ábrát az (ABC) körre. Ekkor az A, B, C pontok helyben maradnak, O elmegy a végtelenbe. Az invertálás után a bizonyítandó állítás az, hogy C és O képei egymás inverzei az (ABD) kör képére nézve, azaz, hogy C az (ABD^*) kör középpontja, ahol D^*-gal jelöljük D inverzét az (ABC) körre nézve. Persze $CA = CB$, tehát elég lenne látni, hogy $CD^* = CB$. Viszont az invertálás miatt $BD^*C\sphericalangle = OD^*C\sphericalangle = OCD\sphericalangle = 18° = 72° - 54° = DBC\sphericalangle = D^*BC$. Ezzel a BCD^* háromszög valóban egyenlőszárú, amivel pedig beláttuk az állítást.

E+2. Geronimo gondolt egy egész együtthatós P polinomra. Ezt szeretné kitalálni Thea, aki ehhez minden percben kérdezhet Geronimotól egy q racionális számot, amire Geronimo rögtön elmondja Theanak $P(q)$ értékét.
a) Van-e olyan P polinom, amelyre létezik Theanak véges sok olyan kérdése, amikből együtt ki tudja találni P-t?
b) Geronimo elárulta Theanak, hogy P főegyütthatója 1. Bizonyítsátok be, hogy minden ilyen P-re létezik véges sok olyan kérdése Theanak, amikből együtt ki tudja találni P-t! Határozzátok meg P függvényében, hogy ehhez legkevesebb hány kérdésre van szüksége Theanak!
Thea akkor tudja kitalálni a P polinomot, ha az általa ismert információknak az egész együtthatós polinomok közül csak P felel meg.
Beke Csongor feladata

Megoldás: a) A válasz az, hogy nincs. Tegyük fel, hogy valamilyen P polinom esetén Thea valamilyen $q_1 = a_1/b_1, q_2 = a_2/b_2, \ldots, q_N = a_N/b_N$ kérdésekre kapott válaszokból ki tudja találni P-t. Tekintsük a $P^*(x) = P(x) + (b_1x - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_Nx - a_N)$ polinomot. Figyeljük meg, hogy ez nem egyenlő P-vel, azonban a $q_1, q_2, \ldots, q_N$ helyettesítési értékeken megegyezik P-vel, ami ellentmond annak, hogy Thea ki tudta találni a P polinomot.

b) Azt állítjuk, hogy legkevesebb n kérdés szükséges, ahol n a P polinom fokát jelöli.

Megmutatjuk, hogy $n-1$ kérdés nem elég. Tegyük fel hogy Thea a $q_1 = a_1/b_1, q_2 = a_2/b_2, \ldots, q_{n-1} = a_{n-1}/b_{n-1}$ értékeket kérdezte meg. Ekkor, az előző feladatrészhez hasonlóan, a $P^*(x) = P(x) + (b_1x - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_{n-1}x - a_{n-1})$ polinom ugyanazt rendeli q_1-hez, q_2-höz, …, és q_{n-1}-hez is, mint P, és mivel P foka n és főegyütthatója 1, így P^* foka is n és főegyütthatója 1, hiszen a hozzáadott tag legfeljebb $(n-1)$-edfokú. Tehát $n-1$ kérdés nem elég.

Most megmutatjuk, hogy n kérdésből már ki tudja találni Thea a P polinomot bármely n-edfokú P esetén. Legyen az első kérdés $q_1 = 1/2$, a válasz erre pedig $a_1/b_1 \cdot 2^k$, ahol $k \in \mathbb{Z}$, a_1, b_1 páratlan egész számok. Azt állítjuk, hogy P foka $-k$. Ez azért van, mert ha $R(x) = x^m + r_{m-1}x^{m-1} \cdots + r_1x + r_0$, ahol r_i egész, akkor $R(1/2) \cdot 2^m$ egy egész szám, viszont $R(1/2) \cdot 2^{m-1}$ nem. Ezzel az első kérdés után Thea már tudja P fokát, n-et. Legyenek a további kérdések a $q_i = 1/(i+1)$ értékeken, ahol $2 \leq i \leq n$. Ekkor a $P(x) - x^n$ polinom legfeljebb $n-1$ fokú, és n különböző pontban tudja Thea az értékét, így ismert, hogy Lagrange-interpoláció segítségével meg tudja határozni a $P(x) - x^n$ polinomot, így a P-t is.

E+3. **a)** Igaz-e, hogy tetszőleges pozitív egész N esetén megadható N darab általános helyzetű egyenes a síkon úgy, hogy az egyenesek által meghatározott metszéspontok minden egyenestől egész távolságra legyenek?
b) Megadható-e végtelen sok ilyen tulajdonságú, általános helyzetű egyenes?
Egyenesek egy halmaza általános helyzetű, ha semelyik kettő nem párhuzamos, és semelyik három nem megy át egy ponton.

Megoldás: **a)** Megmutatjuk, hogy bármely tetszőlegesen nagy pozitív egész N esetén létezik N ilyen egyenes. Egyeneseinket az $a_ix + b_iy + c_i = 0$ alakban definiáljuk, ahol az a_i, b_i, c_i értékeit később választjuk meg. Figyeljük meg, hogy az $a_ix+b_iy+c_i = 0$ és $a_jx+b_jy+c_j = 0$ egyenesek metszéspontja a következőképpen adható meg:

$$\left(\frac{c_ib_j - b_ic_j}{b_ia_j - a_ib_j}, \frac{a_ic_j - c_ia_j}{b_ia_j - a_ib_j}\right),$$

ahol $b_ia_j - a_ib_j \neq 0$, mivel nincs két párhuzamos egyenes. Következésképpen, ha minden a_i, b_i és c_i racionális, akkor bármely két egyenes metszéspontja is racionális koordinátájú lesz.

Ismert, és könnyű kiszámolni, hogy egy (x_0, y_0) pont távolsága az $ax + by + c = 0$ egyenestől a következőképpen adható meg:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Úgy választjuk meg az $\left(a_i, b_i, \sqrt{a_i^2 + b_i^2}\right)$ hármasokat, hogy primitív pitagoraszi számhármasok legyenek. Ez biztosítja, hogy bármely racionális koordinátájú pont racionális távolságra lesz mind az N egyenestől. Továbbá, az egyenesek meredeksége, a_i/b_i, különböző lesz a primitívség miatt, így semelyik két egyenes sem lesz párhuzamos. Most meg kell győződnünk arról, hogy nem létezik olyan pont, amelyen három egyenes is áthalad. Szerencsére ezt könnyen el lehet érni, mivel csak véges sok egyenesünk van, és a c_i konstansokat szabadon választhatjuk racionális számoknak. Végül, mivel csak véges sok különböző távolságunk van, a konfigurációt nagyíthatjuk ezeknek a távolságoknak a nevezőinek legkisebb közös többszörösével, így minden távolság egész értékűvé válik.

b) A válasz nem.

Indirekten tegyük fel, hogy megadható végtelen sok egyenes, és legyen az egyik e egyenesen két metszéspont A és B. Tekintsünk egy tetszőleges e-től különböző f egyenest, és legyen f' az az egyenes, ami f-fel párhuzamos és áthalad az A ponton. Figyeljük meg, hogy mivel f az indirekt feltevésünk szerint egész távolságra volt A-tól és B-től, így f-et egy egész hosszúságú vektorral kell eltolni, hogy f'-t kapjuk, azaz f' is egész távolságra van B-től. Ez azzal ekvivalens, hogy van olyan egész sugarú kör B körül, amit f' érint. Mivel csak véges sok olyan egész sugarú kör van, aminek B a középpontja és A nem belső pontja, és minden ilyen körhöz legfeljebb két érintő húzható A-n keresztül, így f' csak véges sokféle lehet. Ez azonban ellentmondás, mivel a végtelen sok egyenes mindegyikéhez tudjuk venni a vele párhuzamos, A-n áthaladó egyenest, és ezeknek különbözőknek kéne lennie, mert feltettük, hogy nincs két párhuzamos egyenes. Tehát nem lehet megadni végtelen sok egyenest a feltételeknek megfelelően.

E+4. Legyen S a pozitív egészeknek egy nemüres véges részhalmaza, és legyen G egy n csúcsú összefüggő fagráf. Bármely u, v csúcsokra jelölje $d(u, v)$ a két csúcs gráfelméleti távolságát, azaz az u, v csúcsokat összekötő egyértelmű út éleinek számát. Hívjuk *felderítésnek* azon $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}$ csúcssorozatokat, melyekre $v_1 = v_{n+1}$, a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsok páronként különbözők és bármely $1 \leq i \leq n$-re a $d(v_i, v_{i+1})$ távolság S-beli. Egy felderítés *sikeres*, ha a $d(v_1, v_2), d(v_2, v_3), \ldots, d(v_n, v_{n+1})$ számok között minden $s \in S$ szám ugyanannyiszor szerepel. Mely S halmazok esetén létezik olyan G véges, legalább két csúcsú összefüggő fagráf, amely sikeresen felderíthető?
Németh Márton feladata

Megoldás: Megmutatjuk, hogy pontosan akkor létezik megfelelő G fagráf, ha S-ben van páratlan elem.

Szükségesség: Először vizsgáljuk azt, hogy S-ben csak páros számok vannak. Ekkor egy tetszőleges G fagráfot színezzünk ki két színnel, feketével és fehérrel úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színt kapjanak, és tegyük fel, hogy a kezdő csúcs fehér. Páros hosszúságú lépésekkel így fehér mezőről mindig fehér mezőre lépünk, azaz a feketékre sosem juthatunk el, tehát nem tudjuk az egész gráfot bejárni.

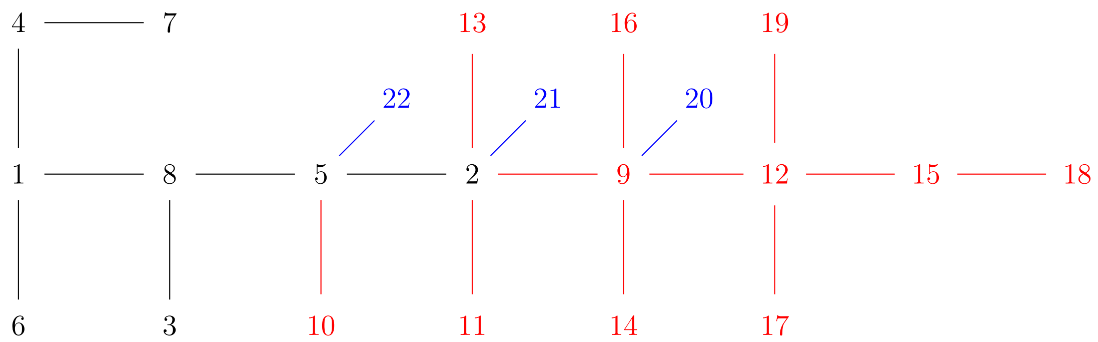
Konstrukció: Most tegyük fel, hogy S-ben van páratlan elem!

Először megmutatjuk, hogy ha $a > 1$, $b \geq 1$ különböző elemei S-nek, és $a + b - 2 \notin S \setminus \{a, b\}$, továbbá az $S' = S \setminus \{a, b\} \cup \{a + b - 2\}$ halmazra létezik megfelelő G' gráf, akkor S-re is. G'-ben legyen egy sikeres felderítés a csúcsok v_1, v_2, $\ldots$, $v_{|G'|}$, v_1 sorrendje. Ekkor tudjuk, hogy $|S'| \cdot k = |G'|$, ahol minden típusú lépést pontosan k-szor használtunk. Most minden $a+b-2$ méretű lépés esetén végezzük a következő módosítást: amikor $u \in G'$-ből lépünk $v \in G'$-be, akkor a köztük futó legrövidebb, $a+b-2$ hosszú úton legyenek a $u, w_1, w_2, \ldots, w_{a+b-3}, w_{a+b-2} = v$ csúcsok. Adjunk hozzá egy $\bar{w}$ levelet a w_{a-1} csúcshoz, és a felderítést módosítsuk úgy, hogy u-ból $\bar{w}$-be, $\bar{w}$-ből v-be megyünk. Mivel a legrövidebb utak hossza ezek között nyilván rendre a és b, így egy $a+b-2$-lépés helyett egy a-lépést és egy b-lépést csináltunk.

Ez a módosítás fagráfból nyilván fagráfot csinál, hiszen csak leveleket adtunk hozzá csúcsokhoz. Indukáljunk $|S|$-en! Ha $|S| \geq 3$, és S tartalmaz páratlan elemet, akkor legyen a a legnagyobb páratlan elem, b pedig egy tetszőleges páros elem S-ben. $S' = S \setminus \{a, b\} \cup \{a + b - 2\}$-nek kevesebb eleme van mint S-nek, és tartalmaz páratlan elemet, így kész vagyunk. Ha S csak páratlan elemeket tartalmaz, akkor legyen a és b két tetszőleges elem S-ből, ugyanezt a műveletet elvégezve szintén készen vagyunk, hiszen S-ből még marad legalább egy páratlan elem S'-ben is.

Ha $|S| = 2$, és S-ben van páros elem is, akkor ezekből S'-t képezve szintén készen vagyunk, így csak azokat az eseteket kell már csak belátnunk, amikor S egy vagy kettő páratlan számból áll.

Ha $|S| = 1$, először mutatunk egy konstrukciót $S = \{3\}$-ra:



Világos, hogy bármely l-ra (a pirossal és kékkel jelzett mintát folytatva) elérhetjük, hogy a gráfban bármely csúcstól legyen $l+1$ távolságban lévő csúcs. Egy G gráfra, a legnagyobb olyan l számot, amire minden csúcsra, van tőle l távolságra lévő csúcs, a továbbiakban $l(G)$-nek jelöljük.

Indukciósan tegyük fel, hogy egy páratlan k esetén már találtunk megfelelő G-t $S = \{k\}$-re és $l(G) \geq k+1$, megmutatjuk, hogy $S = \{k+2\}$ esetén létezik megfelelő G'. G-ben a kezdőcsúcshoz adjunk hozzá egy levelet, legyen ez a kezdőcsúcs G'-ben. Most vegyük sorra G csúcsait, és járjuk be őket: ha el akarunk jutni egy $x \in V(G)$ csúcs egy új, hozzáadott levelébe, és most éppen egy új, az $y \in V(G)$ csúcshoz rakott levélben vagyunk, akkor vegyük G csúcsainak egy $y, v_1, v_2, \ldots, x$ sorozatát, melyben szomszédos csúcsok között k hosszú út húzódik, mindegyikhez rakjunk egy új levelet, és ezeken a leveleken menjünk végig sorban. Tehát mivel bármely G-beli csúcstól van $k+1$ távolságra lévő G-beli csúcs (ez $l(G) \geq k+1$ miatt teljesül), elég ennek egy levelébe eljutni akárhonnan, onnan a kívánt csúcsba lépni, majd kilépni egy új levélbe, és ezt G minden csúcsára megcsinálni, majd végül eljutni egy olyan levélbe, mely $k+2$ távolságra van az új kezdőcsúcstól. Ekkor könnyen látszik, hogy $l(G') \geq l(G)$ is teljesül.

Vagyis, ha a $S = \{k\}$-ra szeretnénk konstrukciót, akkor kiindulunk egy az $S = \{3\}$ esetre jó, G gráfból, amire $l(G) \geq k+1$. Majd a fenti lépések ismétlésevel kapjuk a kívánt konstrukciót.

Mivel $S = \{1\}$ triviális (a két csúcsú fa megfelelő), az állítást egyelemű S-ekre megmutattuk.

Már csak az az eset maradt, amikor $S = \{p, q\}$, ahol $p < q$ páratlanok. Ha $p > 1$, akkor vegyünk egy G konstrukciót $S = \{q\}$-ra. Mivel q páratlan, és egy fa mindig párosgráf, G-nek páros sok csúcsa van (tehát páros sokszor q-léptünk benne). Egy $v_i \to v_j$ q-lépés helyett, melynek köztes csúcsai a $v_i, a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}, v_j$, csinálhatjuk azt, hogy hozzáadunk egy x levelet a_{p-1}-hez és egy y levelet a_1-hez, majd a q-lépést lecseréljük a $v_i \to x \to y \to v_j$ lépésekre. Ezzel 2-vel növeltük a p-lépések számát, ezt néhányszor megcsinálva elérjük, hogy ugyanannyi p és q lépés legyen.

Amikor $S = \{1, 2k+1\}$, akkor legyen a gráf:

Ezzel a konstrukció leírását befejeztük.

E+5. Egy pozitív egész k számot *kriminálisnak* nevezünk, ha léteznek olyan különböző m, n pozitív egészek, melyre a k számnak az m-es és n-es számrendszerbeli felírása is kétjegyű, méghozzá ugyanabból a két számjegyből állnak, csak fordított sorrendben. Bizonyítsátok be, hogy létezik olyan K pozitív egész, hogy minden $k \geq K$ egész kriminális!

A pozitív egész b, k számokra k-nak a b-s számrendszerbeli felírása az a $(b_d, b_{d-1}, \ldots, b_1, b_0)$ egészekből álló rendezett számsor, amelyben $0 \leq b_i < b$ minden $i < d$-re és $0 < b_d < b$, illetve amelyre $k = b_d \cdot b^d + b_{d-1} \cdot b^{d-1} + \ldots + b_1 \cdot b + b_0$. Ilyenkor $(b_d, b_{d-1}, \ldots, b_1, b_0)$ a számjegyek, és a számjegyek száma $d+1$. Például a 7-nek a 3-as számrendszerbeli felírása $(2,1)$, míg az 5-ös számrendszerbeli felírása $(1,2)$, így a 7 kriminális.

Beke Csongor feladata

Megoldás:

Először megmutatjuk, hogy ha $k \geq 4$ egy nem kriminális szám, és d egy pozitív egész szám, amire $d^5 < k$, akkor $d \mid k$.

Rögzítsük k-t, d szerinti indukcióval látjuk be, $d = 1$ triviális. Legyen $d^5 < k$ és minden $d' < d$-re $d' \mid k$, viszont tegyük fel, hogy $d \nmid k$. Ekkor legyen k d-vel való osztási maradéka r ahol $1 \leq r \leq d-1$, valamint $\ell = [d, r] < d^2$, ahol a kapcsos zárójel a legkisebb közös többszöröst jelöli. Mivel $d \mid k - r$ és $r \mid k - r$, ezért $\ell \mid k - r$, valamint $r \mid k - \ell$. Legyen $m = \frac{k-r}{\ell}$ és $n = \frac{k-\ell}{r}$, ekkor $k = m \cdot \ell + r = n \cdot r + \ell$. Ezek a k szám m és n számrendszerbeli felírásai, amennyiben $\ell < m$, $r < m$, $\ell < n$ és $r < n$.

Tudjuk, hogy $\ell \geq d > r$, valamint $m < n$, hiszen ez ekvivalens a $(k-r)r < (k-\ell)\ell$ állítással, ami következik abból, hogy az x-hez $(k-x)x$-et rendelő függvény szigorúan nő $k/2$-ig, és $r < \ell < d^2 < k^{2/5} \leq k/2$, ha $k \geq 4$. Szóval elég azt belátni, hogy $\ell < m$, mert akkor a másik három egyenlőtlenség is teljesül. Ez pedig azért van, mert

$$k > d^5 \geq d^4 + d \geq \ell^2 + r,$$

azaz $m = \frac{k-r}{\ell} > \ell$. Ezzel beláttuk, hogy k kriminális, ami ellentmondás, így $d \mid k$ tényleg teljesül ha $d^5 < k$.

Már csak azt kell belátni, hogy létezik egy olyan K pozitív egész, hogy minden $k \geq K$-hoz létezik $d < k^{1/5}$, amire $d \nmid k$. Legyen K az első 10 prímszám szorzata, azaz $K = \prod_{i=1}^{10} p_i = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 = 6469693230$. Tegyük fel, hogy létezik $k \geq K$ ami nem teljesíti a feltételt. Ekkor az első tíz prím mind osztja k-t, mivel $29^5 < K \leq k$. Legyen p kitevője k-ban e_p, ahol p az első 10 prímszám egyike. Ekkor $k \geq \prod_{i=1}^{10} p_i^{e_{p_i}}$, ahol p_i az i. prím, azaz létezik egy $p \in \{p_1, \ldots, p_{10}\}$, amire $p^{e_p} < k^{1/10}$. De ekkor $d = p^{2e_p} < k^{1/5}$, viszont $d \nmid k$, ellentmondás. Ezzel beláttuk a feladat állítását.

Megjegyzés: Az összes nem kriminális szám listája:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 18, 20, 24, 32, 48, 60, 72, 168, 720.$$

E+6. Játék: Kezdetben egy pozitív egészekből álló (n, k) rendezett számpár van felírva egy lapra. Két játékos felváltva lép, ha a nem áthúzott (a, b) számpár szerepel a lapon, a soron lévő játékosnak egy lépésben át kell húznia (a, b)-t és helyette felírnia vagy az $(a, b+1)$, vagy az $(a-b, b)$ számpárt. Az nyer, aki először ír fel olyan számpárt, amelyben nem mindkét szám pozitív.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el n és k ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás: Nevezzünk egy helyzetet nyerő helyzetnek, ha onnan kezdve a második játékosnak van nyerő stratégiája, különben vesztő helyzetnek. Végignézzük a lehetséges (a, b) számpárokra, hogy nyerő vagy vesztő helyzetek.

Világos, hogy ha $a \leq b$, az egy vesztő helyzet. Ha $a \leq 2b$, akkor ha valaki a-t csökkenti, veszít, ha pedig mindketten felváltva b-t növelgetik, akkor az veszít, akinek a lépésénél $b = a$ lesz, így azok a nyerő helyzetek, amelyekben $a - b$ páratlan.

Most megmutatjuk, hogy amennyiben $a > 2b$, ha a páros és b páratlan, az egy nyerő helyzet, ha pedig a és b is páros, vagy a és b is páratlan, az vesztő helyzet. Amennyiben ezt megsejtjük, már nem nehéz bizonyítani. A (páros, páros) esetből b-t növelve lehet nyerő mezőre lépni. A (páratlan, páratlan) helyzetből is tudunk (páros, páratlan) helyzetbe lépni, ha a helyett $a - b$ írunk. Figyeljük meg, hogy ezek akkor is nyerő helyzetbe visznek, ha a lépés után $a \leq 2b$. Végül azt kell megmutatni, hogy a (páros, páratlan) helyzetek nyerők, azaz onnan csak vesztőre lehet lépni, ami pedig világos, mert az egyik lehetőség két páros, a másik két páratlan számba visz, amik mindenképpen vesztők az eddigiek alapján.

Már csak az az eset maradt, amikor $a > 2b$, a páratlan és b páros. Ekkor b növelése vesztő helyzetre visz. Ha pedig mindkét játékos felváltva a-t csökkenti, akkor az nyer, aki először csökkenti a-t $2b$ alá, így azok a nyerő helyzetek, amikor $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ páratlan.