XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Mérés megoldókulcs

F

F+

kategória

Megjegyzés: Az F+ kategória esetén a feladatok számozása, illetve a lejtőként használt faanyag némiképp eltért a fent közölt megoldásban alkalmazottól (így a kapott μ érték is különböző), azonban a mérés elve teljes egészében megegyezett a mintamegoldásban bemutatottakkal.

Elméleti feladatok

1. feladat

Érdemes az elrendezést energetikai szempontból vizsgálni.

Amikor felhúzzuk a tollat, a rugó összenyomódik valamekkora x távolsággal. A toll elengedése után a rugóban tárolt rugalmas energia először a toll mozgási energiájává alakul. Ezután a gravitációs erő és a súrlódási erő végez munkát a tollon. A munkatétel alapján:

$$\frac{1}{2}Dx^2 = mgs\sin\alpha + mg\cos\alpha\cdot\mu s. \tag{1}$$

2. feladat

A fenti egyenletben x és s mérhető, míg m-et és g-t ismertnek tekinthetjük. A feladatban is írtaknak megfelelően érdemes úgy átrendezni az (1)-es egyenletet, hogy a bal oldalra gyűjtjük az ismert és mérhető mennyiségeket; míg a jobb oldalon egy $\operatorname{tg}\alpha$-ban lineáris kifejezés áll, mely emellett a keresett paramétereket tartalmazza:

$$\frac{x^2}{2mg}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{D}\operatorname{tg}\alpha + \frac{\mu}{D} \tag{2}$$

A bal oldalon az első tényező egy ismert konstans, az $1/(\cos\alpha\cdot s)$ hányadost pedig minden mérésnél ki tudjuk számolni. Az egyenlet ezen oldalát ábrázolva $\operatorname{tg}\alpha$ függvényében - az elmélet szerint - az adatpontokra egy egyenes illeszthető, melynek meredekségéből kiszámíthatjuk a rugóállandót, a függőleges tengelymetszetből pedig a csúszási súrlódási együtthatót.

Mérési feladatok

3. feladat

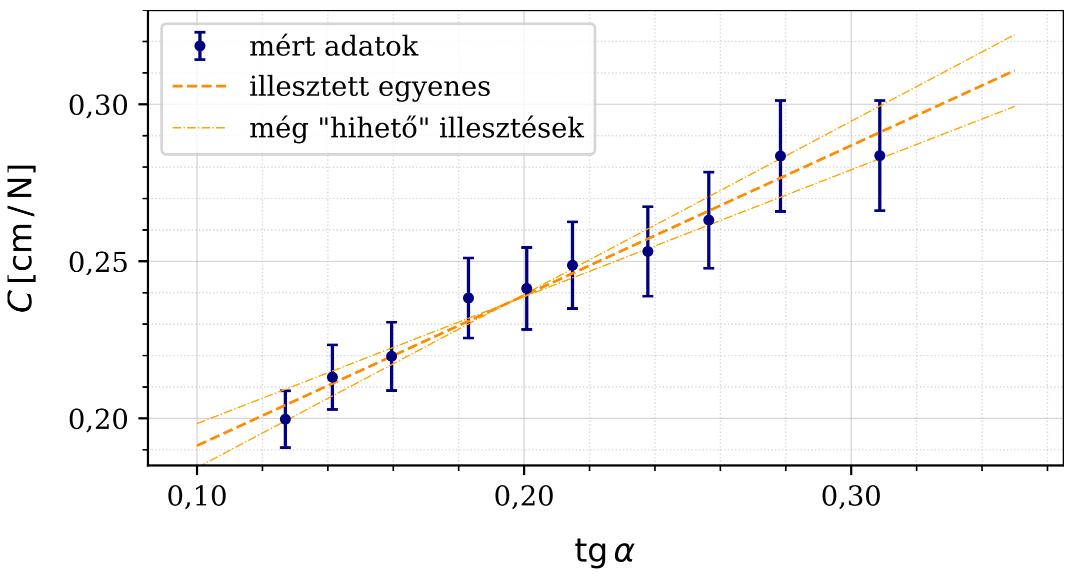
A mérés során a lejtő hajlásszögét a kartondoboz kétféle pozícióba forgatásával, illetve vízszintes eltolásával módosítottuk. A beállítás során arra törekedtünk, hogy (a deszka hosszúságát is figyelembe véve) a kiszámított $\operatorname{tg}\alpha$ értékek a mérési intervallumot közel egyenletes módon lefedjék. Mindegyik meredekség esetén 10 kilövést hajtottunk végre, melyeknél leolvastuk a deszka oldalára ragasztott mérőszalag segítségével az indítási helytől az első megállásig mért elmozdulást. Ezek közül az 5 legnagyobb s_1, s_2, $\ldots$, s_5 érték s átlagával számoltunk tovább. A hajlásszög tangense a lejtő mért geometriai paramétereiből az alábbi összefüggés szerint számítható:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{h}{\sqrt{L^2 - h^2}}. \tag{3}$$

Végül a fentiekben elvégzett számítások után a *2. feladat*-ban kapott egyenlet bal oldalát (C) is kiszámíthatjuk. Az eredményeket az 1. táblázat, a kiszámolt $C - \mathrm{tg}\,\alpha$ adatpárokat az 1. ábra mutatja.

h [m]	L [m]	s_1 [m]	s_2 [m]	s_3 [m]	s_4 [m]	s_5 [m]	s [m]	$\mathrm{tg}\,\alpha$	C [cm/N]
0,126	1,000	0,185	0,181	0,175	0,174	0,170	0,177	0,127	0,200
0,126	0,900	0,173	0,168	0,164	0,163	0,163	0,166	0,141	0,213
0,126	0,800	0,165	0,164	0,161	0,161	0,157	0,162	0,159	0,220
0,126	0,640	0,150	0,149	0,148	0,147	0,147	0,148	0,201	0,238
0,126	0,700	0,152	0,149	0,149	0,149	0,149	0,150	0,183	0,241
0,236	1,020	0,144	0,144	0,143	F 0,141	0,140	0,142	0,238	0,249
0,126	0,600	0,151	0,147	0,145	0,139	0,139	0,144	0,215	0,253
0,236	0,950	0,143	0,139	0,138	0,136	0,132	0,138	0,256	0,263
0,236	0,880	0,130	0,130	0,128	0,127	0,127	0,128	0,278	0,284
0,236	0,800	0,133	0,133	0,128	0,127	0,126	0,129	0,309	0,284

1. táblázat. A mért adatok, illetve az ezekből származtatott mennyiségek.



1. ábra. A mért adatokból számolt C mennyiség a lejtő hajlásszögének függvényében és az adatpontokra illesztett egyenesek.

4. feladat

A mérés során kétféle mennyiséget mérünk: a lejtő geometriai jellemzőit (h és L), valamint a toll által megtett utat (s). A geometriai jellemzők mérésének hibája egyszerűen a mérőszalag leolvasásából fakadhat, ezt $\Delta h = \Delta L = 1\,\mathrm{mm}$-nek tekintjük. Ennek mértéke két nagyságrenddel kisebb, mint h és L tipikus értékei, tehát elég nagy biztonsággal eltekinthetünk ezek, és közvetetten a hajlásszög mérésének hibájától. A megtett út mérésének hibája már számottevőbb. Bár a többszöri mérés biztosítja azt, hogy az átlag a valódi érték körül legyen, még nagyon nagy számú mérés esetén sem lehetünk biztosak abban, hogy ennek pontos értéke jobban megközelíti a valós értéket, mint amekkora a toll álló helyzetének meghatározási pontossága. Egyrészt itt is jelen van a leolvasási hiba, de az elengedés folyamatából eredő bizonytalanság miatt a toll kezdősebességének nagysága és iránya is változik az egyes ”kilövések” során. Ezen kívül elegendően meredek lejtő esetén a toll visszacsúszása is nehezíti a pontos mérést. Ugyan az eszközökkel megvalósítható mérési elrendezésben a toll sebessége lehetővé teszi, hogy a vonalzó főbeosztásához képest nagyjából meghatározzuk a toll végső helyzetét, de az ember érzékelési ideje miatt egy 5-10 milliméteres bizonytalanság mindenképpen marad. Ez alapján tekintsük a mérési hibát $\Delta s \approx 0{,}8\,\mathrm{cm}$-nek[1]! Ezzel a konstans értékkel akár egyesével is kiszámolhatjuk minden C érték hibáját (ahogy az 1. ábrán csináltuk), de egy egyszerű nagyságrendi becslés tehető, ha megvizsgáljuk azt az esetet, amikor ennek a hatása a legjelentősebb, vagyis amikor a mért távolság a legkisebb. A legnagyobb meredekségnél a mért értékek átlaga $s = 0{,}129\,\mathrm{m}$, amely a bizonytalanság miatt azt jelenti, hogy s valahova $0{,}121\,\mathrm{m}$ és $0{,}137\,\mathrm{m}$ közé esik, tehát a C mennyiség értékének valahova $0{,}268\,\mathrm{cm/N}$ és $0{,}304\,\mathrm{cm/N}$ közé kell esnie, vagyis C bizonytalansága körülbelül $\Delta C \approx 0{,}018\,\mathrm{cm/N}$.

5. feladat

A (2) egyenlet alapján azt várjuk, hogy C és $\operatorname{tg}\alpha$ mennyiségek között lineáris kapcsolat van, ezért a mért adatokra egyenest illesztünk, amelyet az 1. ábrán ábrázoltunk. Az illesztett egyenes meredeksége $\lambda = 0{,}478\,\mathrm{cm/N}$, az y-tengelymetszete pedig $C_0 = 0{,}144\,\mathrm{cm/N}$. Ebből $D = 1/\lambda = 2{,}09\,\mathrm{N/cm}$ és $\mu = C_0 \cdot D = 0{,}300$.

Az 1. ábrán illesztett két segédegyenes meredeksége $\lambda_1 = 0{,}552\,\mathrm{cm/N}$ és $\lambda_2 = 0{,}404\,\mathrm{cm/N}$; az y-tengelymetszete pedig $C_{0,1} = 0{,}129\,\mathrm{cm/N}$ és $C_{0,2} = 0{,}158\,\mathrm{cm/N}$. Ebből a keresett paraméterek minimális és maximális értékei $D_1 = 1{,}81\,\mathrm{N/cm}$ és $D_2 = 2{,}47\,\mathrm{N/cm}$, valamint $\mu_1 = 0{,}234$ és $\mu_2 = 0{,}391$. A paraméterek mérésének eredménye tehát

$$\boxed{D = [2{,}09 \pm 0{,}38]\ \mathrm{N/cm}} \quad \text{és} \tag{4}$$

$$\boxed{\mu = [0{,}300 \pm 0{,}091]}\,. \tag{5}$$

[1] A megoldás során $\Delta s \approx 0{,}8\,\mathrm{cm}$ értékkel számoltunk, de a versenyzőktől bármilyen hasonló nagyságrendű, helyes érveléssel kapott értéket elfogadtunk.