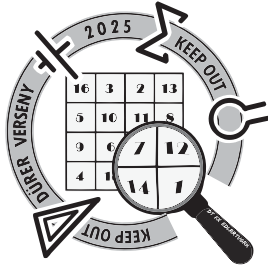


XVIII. DÜRER VERSENY

KIADVÁNY | F, F+ kategóriák





XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti feladatsor



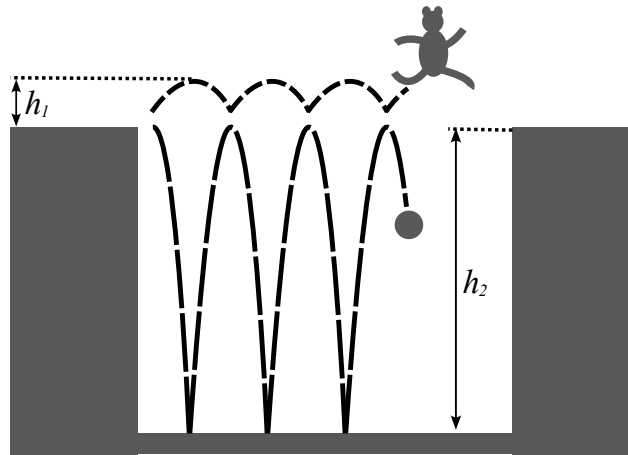
kategória

Figyelem! A teljes pontszám eléréséhez nem elegendő a megoldások számszerű közlése, levezetés és a logikai lépések szöveges indoklása is szükséges (pl. „Newton III. törvénye alapján...”)!

1. feladat

(9 pont)

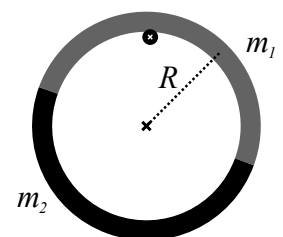
Az ismert internetes meme szerint, ha „fizikus módra” elhanyagolunk mindent, akkor Micimackó át tud jutni egy szakadék felett csupán egy labda segítségével. Ehhez mindössze annyit kell tennie, hogy v_x vízszintes sebességgel elkezd futni a szakadék felé, és abban a pillanatban, amikor a szakadék fölé ér, ledobja „magához képest” függőlegesen v_y sebességgel a labdáját. Ennek hatására neki is lesz függőleges sebessége, és a meme szerint inntől kezdve végig tud pattogni a labdán, ahogy az *ábra* is mutatja. Valóban sikerülhet ez Micimackónak? Ha igen, akkor ehhez mekkorának kell lennie a h_1/h_2 aránynak? Itt h_1 jelöli Micimackó maximális emelkedését a szakadék pereméhez képest, h_2 pedig a szakadék mélységét. A megoldás során tegyük fel, hogy mind Micimackó, mind pedig a labda M tömegűek, valamint azt, hogy a labda eldobása után Micimackó már nem mozgatja az izmait, azaz inntől minden találkozása a labdával tökéletesen rugalmas ütközés lesz. A feladatban, ahogy a meme-ben is, elhanyagoljuk a légelellállást, a súrlódást és a pattanáskor bekövetkező energiaveszteséget.

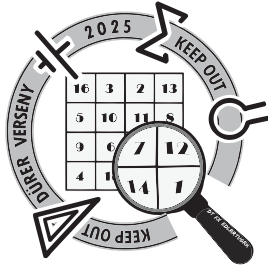


2. feladat

(15 pont)

Adott egy R sugarú gyűrű, melynek vastagsága elhanyagolható az átmérőjéhez képest. A gyűrű az *ábrán* látható módon két félből áll, ezek alakra egybevágóak, de különböző anyagból készültek, így tömegük eltérő m_1 , illetve m_2 értékű. A gyűrűt egy falból kiálló vékony szögre akasztva kis kitérésű lengésbe hozzuk. Feltehetjük, hogy a súrlódás elég nagy ahhoz, hogy a gyűrű ne csússzon meg. Hol akasszuk fel a testet, hogy a lengésidő minimális legyen? Mekkora ez a minimális lengésidő? Vizsgáljuk a kérdéselt felfüggesztési pont helyzetét, valamint a minimális lengésidőt az $m_1 \gg m_2$ határesetben!





XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

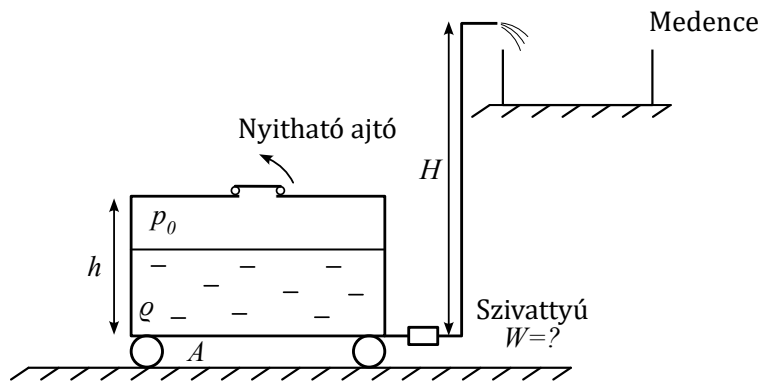
Elméleti feladatsor



3. feladat

(12 pont)

Pat és Mat, a két ezermester új módon szeretné feltölteni az emeleti erkélyen található medencéjüket. A ρ sűrűségű vizet az udvaron álló lajtoskocsi A alapterületű, h magasságú tartályából egy szivattyú segítségével lassan juttatják a tartály aljától mért H magasságban lévő medencébe. Kezdetben a tartály $2/3$ részéig van vízzel töltve, a maradék térrészt p_0 légköri nyomású levegő tölti ki az ábrán látható módon. Mikor már csak $1/3$ részéig van vízzel, Pat észreveszi, hogy a tartály tetején lévő nyílás egész eddig zárva volt, és bosszankodva mondja barátjának, hogy emiatt többre került a medence feltöltése. Mat értetlenkedik, hiszen mi köze lenne a nyílásnak a szivattyú által végzett munkához; egészen eddig azt gondolta, hogy az csak a lajtoskocsi feltöltésére szolgál. Tegyük igazságot a két barát között, és adjuk meg a két esetben (nyitott és zárt nyílás esetén) a szivattyú által végzett munkát!



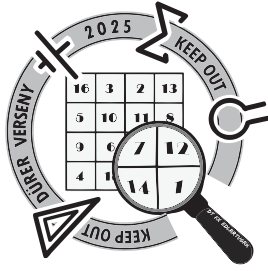
Megjegyzés: Feltehetjük, hogy a tartályt és medencét összekötő csőben lévő víz térfogata elhanyagolható az átszivattyúzott vízmennyiséghez képest, valamint, hogy a csőből a medencébe kicsurgó víz sebessége igen kicsi. A tartály anyaga jó hővezető.

4. feladat

(13 pont)

A feladat alapja Sir Arthur Conan Doyle Sherlock Holmes kalandjai című műve. A történetben egy hidraulikai mérnök egy titkos és furcsa feladatot kap, miszerint sok pénzért kell megjavítania egy hidraulikus prést, melyről senkinek nem szólhat semmit. A javítás során rájön, hogy a prés sokkal nagyobb és erősebb, mint ami szükséges lenne az ellátott feladathoz. Rövidesen ki is derül a titok, miszerint a prést érmehamisításra használják. Mikor a megrendelő megtudja, hogy a mérnök ismeri az igazságot, bezárja őt a helyiségbe, ahol a hidraulikus prés található, és azt elkezd lefelé eresztetni, hogy összenyomja a főhőst.

A mérnök szorult helyzetben találja magát, hiszen egy téglatest alakú, V_0 térfogatú, A_0 alapterületű szobába zárták be, felette pedig egyenes v sebességgel közelít a dugattyú, mely ha elérné, biztos halált jelentene számára. Főhősünk tudja azonban, hogy a helyiség falán a talaj szintjén található egy nyílás, melyen hason kúszva éppen átfér. A nyílást egy A_1 (négyzetes) keresztmetszetű ajtó zárja el tőle, amely F_α nagyságú erő hatására kiszakad a helyéről. Azt is



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti feladatsor



tudja, hogy az ajtó mögött egy L hosszúságú, A_1 keresztmetszetű folyosó található, melynek a túloldalát egy F_β teherbírású ajtó zárja el a külvilágtól.

- (a) A dugattyú elindítását követően mennyi idő elteltével szakad ki az első ajtó?
(b) Túléli-e a mérnök a kalandot, azaz sértetlenül kijut-e a második ajtón?

Adatok: $V_0 = 15 \text{ m}^3$, $A_0 = 5 \text{ m}^2$, $v = 0,1 \text{ m/s}$, $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$, $A_1 = 0,25 \text{ m}^2$, $L = 1,5 \text{ m}$, $F_\alpha = 10^5 \text{ N}$, $F_\beta = 1,5 \cdot 10^5 \text{ N}$.

Útmutatás: Tekintsünk minden falat és ajtót tökéletes hőszigetelőnek és légmentesen zárónak. Továbbá tegyük fel, hogy a mérnök az ajtók kiszakadása után villámgyorsan el tudja hagyni a helyiséget, viszont nem fér el a két ajtó közötti térrészben. A környezetet, valamint a szobát kezdetben p_0 nyomású levegő tölti ki, azonban az ajtók között vákuum található. A dugattyú súlytalan. A mérnököt semmilyen külső hatás nem veszélyezteti, csak a dugattyú érintése; illetve ő sajnos nem tudja kirúgni az ajtókat, mert az általa kifejtett erő csekély.

5. feladat

(16 pont)

Egy nagy kiterjedésű, A területű, jól vezető fémlapra n darab elektrontól álló csomagokat lövünk a lap síkjától mért L távolságra lévő elektrónágyúból. A τ időközönként kilőtt csomagok v_0 nagyságú, a lap síkjára merőleges kezdősebességgel hagyják el az ágyút. A kilőtt elektroncsomagok a levegőben egyben maradnak, továbbá két kilövés között elegendő idő telik el ahhoz, hogy egyszerre csak egy elektroncsomag legyen az ágyú és a vezető lemez között. Mennyi idő telik el két egymást követő becsapódás között?

Útmutatás: A megoldás során felhasználhatjuk az alábbi közelítést:

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2,$$

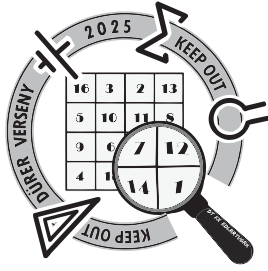
amennyiben $x \ll 1$.

Használható segédeszközök: író- és rajzolóeszközök, számológép, függvénytáblázat.

A feladatok megoldására 180 perc áll a csapatok rendelkezésére.

Sikeres versenyzést kívánnak:

a szervezők



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti feladatsor



Figyelem! A teljes pontszám eléréséhez nem elegendő a megoldások számszerű közlése, levezetés és a logikai lépések szöveges indoklása is szükséges (pl. „Newton III. törvénye alapján...”)!

1. feladat

(11 pont)

Watson egyik este a kertben repkedő denevérekre lett figyelmes, és tanulmányozni kezdte a viselkedésüket. Először függőlegesen feldobott egy követ, majd meglepetésére az egyik denevér üldözőbe vette, és elkapta azt, mivel vacsorának gondolta. Watson tudta, hogy a denevérek ultrahangokat bocsátanak ki és érzékelnek ahhoz, hogy tájékozódjanak; viszont elgondolkodott, hogyan tudja a denevér megmondani, hogy hol van a kő, és mekkora annak sebessége.

- (a) Tegyük fel, hogy lefelé zuhan egy kő, és függőlegesen repülve üldözi azt egy denevér állandó v_D sebességgel. Az általa kibocsátott hanghullám f_0 frekvenciájú, a beérkező pedig f_1 frekvenciájú. Mekkora volt a kő sebessége, és a közöttük lévő távolság a hullám kibocsátásakor, ha T idő telt el a kibocsátás és az érzékelés között?

Adatok: $v_D = 15$ m/s, $f_0 = 47,7$ kHz, $f_1 = 50$ kHz, $T = 0,1$ s.

- (b) A denevérek által kibocsátott hanghullámok lehetséges legkisebb frekvenciája f_{\min} , az érzékelt hanghullámok lehetséges legnagyobb frekvenciája pedig f_{\max} . Legalább mekkora legyen f_{\max} értéke, hogy a denevérek bármilyen 0 és v_D közötti sebességgel a kő után repülve, minden pillanatban tudják érzékelni a h_0 magasságból, kezdősebesség nélkül zuhanó követ.

Adatok: $f_{\min} = 45$ kHz, $h_0 = 5$ m.

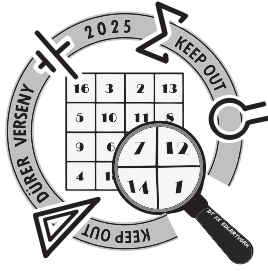
- (c) Valójában a denevérek nagyobb frekvencia-tartományban érzékelnek hullámokat, mint amiben ki tudják őket bocsátani. A közönséges törpedenevérek (*Pipistrellus pipistrellus*) esetén a kibocsátás tartománya 45 kHz és 70 kHz közé esik, míg nagyjából 20 kHz és 80 kHz közötti frekvenciájú hullámokat hallanak. Mekkora sebességgel kell Watsonnak feldobnia a követ, hogy az egy helyben lebegő közönséges törpedenevér azt a dobás pillanatában ne érzékelje?

Útmutatás: A hanghullámok levegőben való terjedési sebességét vehetjük konstans $c = 340$ m/s-nak, és a légellenállástól eltekinthetünk. Érdemes $g = 9,81$ m/s²-el számolni.

2. feladat

(16 pont)

A legenda szerint réges-régen a Düránusznak is volt egy holdja, mely körpályán keringett a bolygó körül, azonban egy rejtélyes esemény miatt eltűnt. Már több magyarázat is született az égitest eltűnésére, és heves vita zajlik arról, hogy melyik helyes. A tudósok szerint a hold felrobant, és a törmelék kizárólag a pálya síkjában, minden irányban egyenletesen repült szét. Ezt látszólag alátámasztják a csillagászati megfigyelések és a geológiai leletek, miszerint a törmelék 65%-át Düránusz körüli pályán és 12%-át a Düránusz felszínén találták meg, miután mindent



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti feladatsor



kategória

alaposan átkutattak. A dűrkutatók és a dűrológusok azonban felhívták a figyelmet arra, hogy ez a magyarázat aligha lehet helytálló, hiszen a maradék 23% nem tűnhetett el nyomtalanul. A tudósok is tisztában vannak ezzel, de még nem tudtak tudományos magyarázatot felállítani, holott szentül meg vannak győződve, hogy igazuk van.

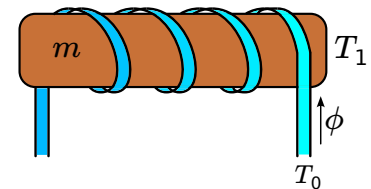
- Hová tűnt a maradék törmelék, ha feltételezzük, hogy a tudósoknak igaza van?
- Hogyan aránylik a robbanásban nyert sebesség a hold kerületi sebességéhez?
- Hogyan aránylik a hold pályájának sugara a Düránusz sugarához?

Útmutatás: A Düránusz légköre és a törmelékdarabok egymásra gyakorolt gravitációs hatása elhanyagolhatóak, a hold mérete pedig sokkal kisebb, mint a pályájának a sugara. Továbbá tételezzük fel, hogy a robbanáskor nyert sebesség kisebb, mint a hold kerületi sebessége.

3. feladat

(9 pont)

Egy m tömegű, T_1 hőmérsékletű réztömböt szeretnénk lehűteni úgy, hogy T_0 hőmérsékletű vizet folyatunk egy csőn keresztül az ábrán látható módon, ϕ vízárammal. A cső kialakítása lehetővé teszi a víz és a réz közötti hőcserét, valamint azt is, hogy a réztömb egyenletesen hűljön. Mivel a csőben a víz elég gyorsan folyik, ezért a cső hossza mentén nem alakul ki termikus egyensúly, továbbá a víz a réz által leadott hőnek csak η -szorosát veszi fel. Mennyi idő szükséges ahhoz, hogy a réztömb hőmérséklete T_2 -re hűljön?



Adatok: $m = 5 \text{ kg}$, $T_1 = 100^\circ\text{C}$, $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $\phi = 5 \text{ g/s}$, $\eta = 0,8$, $T_2 = 50^\circ\text{C}$, továbbá a réz és a víz fajhője rendre $c_r = 0,39 \text{ kJ}/(\text{kg}^\circ\text{C})$ és $c_v = 4,18 \text{ kJ}/(\text{kg}^\circ\text{C})$.

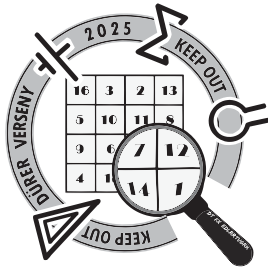
Útmutatás: A réztömb és a víz közötti hőcserén kívül minden más termikus kölcsönhatástól tekintsünk el.

4. feladat

(14 pont)

A fehérjék életünk szerves részei, amik olyan aminosavakból épülnek fel, melyek elektromos töltéssel is rendelkezhetnek. Vegyünk egy fehérjét, és azon belül két pontszerű aminosavat, amik Q_1 és Q_2 töltéssel rendelkeznek, d_1 , illetve d_2 távolságra vannak a fehérje felszínétől, valamint L távolságra vannak egymástól. A fehérjében található többi aminosavat tekintsük semleges töltésűnek. Közelítsük a fehérje felszínét egy síkkal, melynek egyik oldalán az aminosavak, másik oldalán pedig víz található. Mekkora a töltésrendszer potenciális energiája, ha a fehérjén belül a relatív dielektrikus állandó ϵ_1 , míg a vízben ϵ_2 ?

Útmutatás: Két dielektrikum határfelületén az \mathbf{E} mező felülettel párhuzamos komponense és a $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$ mező felületre merőleges komponense folytonosan megy át. A potenciális energia nullpontját válasszuk a végtelen távol felvett értéknek.



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti feladatsor



5. feladat

(15 pont)

Adott egy z tengely körül hengersizmetrikus mágneses tér, amelynek z irányú komponense minden pontban ismert, $B_z(z) = B_0 + \alpha z$ nagyságú. Egy véglapok nélküli, vékonyfalú, kicsiny r sugarú, ℓ hosszúságú, m tömegű szigetelő henger felületén egyenletesen elosztunk Q töltést. Ezután a hengert v_0 sebességgel elindítjuk úgy, hogy szimmetriatengelye a z tengely mentén mozogjon. Mekkora lesz a tömegközéppontjának sebessége t idő múlva?

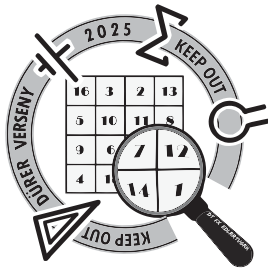
Útmutatás: Mivel az r sugár kicsi ($r \ll B_0/\alpha$), a mágneses mező z irányú komponense homogénnek tekinthető a véglapok teljes felületén.

Használható segédeszközök: író- és rajzolóeszközök, számológép, függvénytáblázat.

A feladatok megoldására 180 perc áll a csapatok rendelkezésére.

Sikeres versenyzést kívánnak:

a szervezők



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



F

kategória

1. feladat

Mivel Micimackó és a labda tömege ugyanakkora, így a labda eldobásakor Micimackó függőleges sebessége is v_y lesz. Ezzel a sebességgel

$$t = 2 \frac{v_y}{g} \quad (1.1)$$

idő múlva fog újra visszaérni a perem szintjére. Ekkorra a labdának is vissza kell érnie erre a szintre. Vegyük észre, hogy Micimackónak és a labdának az " x koordinátája" mindig meg fog egyezni, hiszen végig ugyanakkora vízszintes sebességük van. Tehát a találkozáshoz elég ha a labda is a perem szintjén van t idővel az eldobás után. A feladat szerint a labda a szakadék aljával is tökéletesen rugalmasan ütközik, így ugyanannyi időt tölt zuhanással, mint emelkedéssel; és a perem szintjének elérése után sebessége újra v_y lesz. A zuhanással töltött időt jelölje t_1 , ekkor

$$t_1 = t/2 = \frac{v_y}{g} \quad (1.2)$$

kell ahhoz, hogy Micimackó és a labda találkozzanak. Ekkor viszont fel tudjuk írni h_2 -t:

$$h_2 = v_y t_1 + \frac{g}{2} t_1^2 = v_y \frac{v_y}{g} + \frac{g}{2} \cdot \frac{v_y^2}{g^2} = \frac{v_y^2}{g} + \frac{1}{2} \cdot \frac{v_y^2}{g} = \frac{3}{2} \cdot \frac{v_y^2}{g}. \quad (1.3)$$

Persze h_1 -et is fel tudjuk írni, hiszen Micimackó éppen t_1 ideig emelkedett:

$$h_1 = v_y t_1 - \frac{g}{2} t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_y^2}{g}. \quad (1.4)$$

A sikeres ugráláshoz még az is szükséges, hogy minden további ugrás is megvalósítható legyen. Vegyük észre, hogy Micimackó és a labda első találkozása után pont ugyanaz történik, mint az eldobás pillanatában, ez pedig garantálja nekünk azt, hogy a többi ugrás is sikeresen végbe-mehessen. Tehát valóban lehetséges (lenne) Micimackónak átkelnie a szakadék fölött. Az ehhez szükséges h_1/h_2 arány pedig:

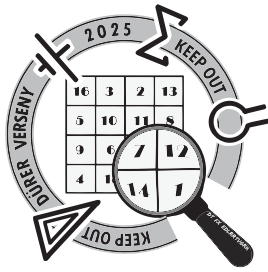
$$\boxed{\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{3}}. \quad (1.5)$$

2. feladat

Egy körív tömegközéppontja a szimmetriatengelyen helyezkedik el, a kör középpontjától számított h/φ távolságra, ahol h a körívhez tartozó húr hossza, φ pedig a középponti szög radiánban. Félkörívnél ez $2R/\pi$. A gyűrű tömegközéppontjának s távolsága a geometriai közepétől (feltéve, hogy $m_1 \geq m_2$ ¹):

$$m_1 \left(\frac{2R}{\pi} - s \right) = m_2 \left(\frac{2R}{\pi} + s \right), \quad (2.1)$$

¹Ellenkező esetben, szimmetriai okokból felcseréljük őket.



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



F
kategória

ahonnan:

$$s = \frac{2R}{\pi} \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.2)$$

A geometriai középpontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték

$$\Theta_K = m_1 R^2 + m_2 R^2 = MR^2, \quad (2.3)$$

ahol $M = m_1 + m_2$. A Steiner-tétel alapján $\Theta_K = \Theta_{TKP} + Ms^2$, ahonnan

$$\Theta_{TKP} = M(R^2 - s^2). \quad (2.4)$$

Tetszőleges, a tömegközépponttól d távolságra lévő felfüggesztési pontra

$$\Theta_d = \Theta_{TKP} + Md^2. \quad (2.5)$$

A fenti paraméterekkel jellemezhető fizikai inga függvénytáblázatban is megtalálható lengés-ideje:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_d}{Mgd}} = \frac{2\pi}{\sqrt{Mg}} \sqrt{\frac{\Theta_d}{d}}, \quad (2.6)$$

mely akkor minimális, ha Θ_d/d minimális:

$$\frac{\Theta_d}{d} = \frac{\Theta_{TKP} + Md^2}{d} = \frac{\Theta_{TKP}}{d} + Md. \quad (2.7)$$

Ezt meghatározhatjuk például úgy, hogy alulról becsüljük a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alapján:

$$\frac{\Theta_{TKP}}{d} + Md \geq 2\sqrt{\frac{\Theta_{TKP}}{d} \cdot Md} = 2\sqrt{M\Theta_{TKP}}. \quad (2.8)$$

Egyenlőség akkor lép fel, amikor a két tag egyenlő, azaz

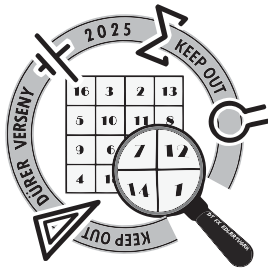
$$d = \sqrt{\frac{\Theta_{TKP}}{M}}. \quad (2.9)$$

(2.4) és (2.9) alapján:

$$d^2 = R^2 - s^2. \quad (2.10)$$

A koszinusz-tétel miatt az (2.10) egyenlőség csak akkor áll fent, ha az *ábrán* szereplő α szög derékszög. Vegyük észre, hogy az *ábrán* szereplő d hosszú szakasz mindig függőleges (hiszen ekkor van a gyűrű stabil egyensúlyi helyzetben, ami körül a kis kitérésű lengések periódusidejét vizsgáljuk), így α csak akkor lehet derékszög, ha az s hosszú szakasz vízszintes. Ez pedig csak akkor fordulhat elő, ha úgy akasztjuk fel a gyűrűt, hogy **a két összeillesztési pont egy függőleges egyenes mentén helyezkedjen el**. A minimális lengésidő (2.4), (2.6), (2.7) és (2.8) alapján:

$$T_{\min} = \frac{2\pi}{\sqrt{Mg}} \sqrt{\frac{\Theta_d}{d}} = \frac{2\pi}{\sqrt{Mg}} \sqrt{2\sqrt{M\Theta_{TKP}}} = 2\pi \sqrt[4]{\frac{4\Theta_{TKP}}{Mg^2}} = 2\pi \sqrt[4]{\frac{4(R^2 - s^2)}{g^2}}. \quad (2.11)$$



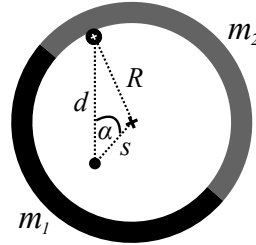
XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



F
kategória



2.1. ábra. A felfüggesztett gyűrű.

Ebbe (2.2)-t behelyettesítve adódik, hogy

$$T_{\min} = 2\pi \sqrt[4]{\frac{4R^2 \left[1 - \left(\frac{2}{\pi} \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \right]}{g^2}}. \quad (2.12)$$

Ha $m_1 \gg m_2$ akkor $1 \gg m_2/m_1 \approx 0$, így

$$s = \frac{2R}{\pi} \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = \frac{2R}{\pi} \cdot \frac{1 - m_2/m_1}{1 + m_2/m_1} \approx \frac{2R}{\pi}. \quad (2.13)$$

A fenti egyenlet és (2.10) alapján:

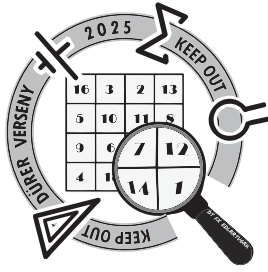
$$d = \sqrt{R^2 - \frac{4R^2}{\pi^2}} = \sqrt{R^2 \left(1 - \frac{4}{\pi^2} \right)}. \quad (2.14)$$

Olyan, mintha az m_2 tömegű félgűrű ott se lenne, azaz a **felfüggesztési helyek az m_1 tömegű félgűrű súlypontján átmenő, a szimmetriatengelyre merőleges egyenes, és a félkörív metszéspontjain** vannak. A lengésidő (2.10), (2.11) és (2.14) alapján:

$$T_{\min} = 2\pi \sqrt[4]{\frac{4R^2 \left(1 - \frac{4}{\pi^2} \right)}{g^2}}. \quad (2.15)$$

3. feladat

A megoldás alap gondolata, hogy a szivattyú által végzett munka megegyezik a rendszerben bekövetkező energiaváltozással a medence feltöltése során. Vizsgáljuk meg külön-külön a nyitott és zárt tartály esetét! Ezeket szemlélteti a 3.1. ábra.

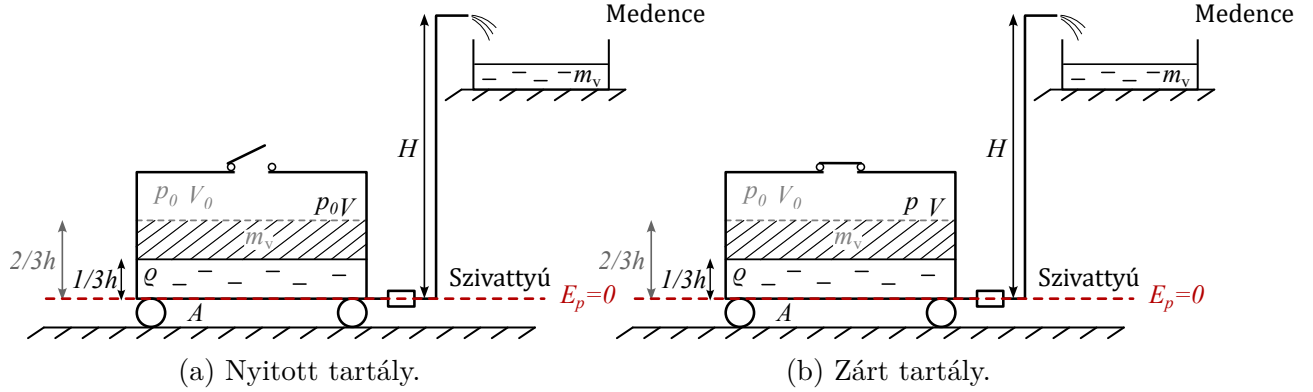


XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)
Elméleti megoldókulcs



F
kategória



3.1. ábra. A vizsgált két eset.

Nytott tartály esete

Ebben az esetben a szivattyú által végzett munka pusztán a víz helyzeti energiájának megváltoztatására fordítódik (felhasználva, hogy a kicsurgó víz sebessége elhanyagolhatóan kicsi), hiszen a mozgó víztömeg mindkét oldalon kapcsolatban áll a külső levegővel, így a két oldalon a légkör által végzett munka épp kioltja egymást. A potenciális energia nullszintjét a szivattyú magasságában felvéve a helyzeti energia megváltozása:

$$\Delta E_h = m_v g H - m_v g \left(\frac{1}{3}h + \frac{1}{6}h \right), \quad (3.1)$$

részletezve:

$$\Delta E_h = \rho A \frac{1}{3} h g H - \rho A \frac{1}{3} h g \frac{1}{2} h = \rho A g h \left(\frac{1}{3} H - \frac{1}{6} h \right). \quad (3.2)$$

Ebben az esetben a szivattyú által végzett munka tehát

$$W_{ny} = \rho A g h \left(\frac{2H - h}{6} \right). \quad (3.3)$$

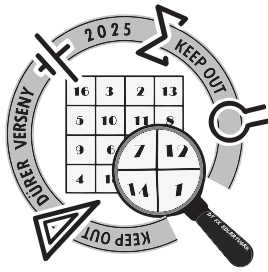
Zárt tartály esete

Zárt tartály esetén a különbséget az előző esethez képest az jelenti, hogy itt a folyadék kezdetben el van zárva a külső légkörtől, a medencébe jutva azonban kapcsolatba kerül vele; így nem egyezik a víztömeg két oldalán a gáz által végzett munka. Ebből adódóan megjelenik további két tag az energiaváltozás felírásakor.

Egyrészt a bezárt gáz izoterm módon (hiszen a tartály fala jó hővezető) kitér, az ennek során végzett munka

$$W_g = p_0 V_0 \ln \frac{V}{V_0}, \quad (3.4)$$

részletezve a térfogatokat:



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



F

kategória

$$W_g = p_0 A \frac{1}{3} h \ln \left(\frac{2/3hA}{1/3hA} \right) = \frac{\ln 2}{3} p_0 Ah. \quad (3.5)$$

A léggör munkája:

$$W_1 = -p_0 \Delta V = -\frac{1}{3} p_0 Ah. \quad (3.6)$$

A szivattyú által végzett munka

$$W_z = W_{ny} + W_g + W_1, \quad (3.7)$$

$$W_z = W_{ny} + \frac{\ln 2}{3} p_0 Ah - \frac{1}{3} p_0 Ah, \quad (3.8)$$

$$\boxed{W_z = W_{ny} + \frac{\ln 2 - 1}{3} p_0 Ah}. \quad (3.9)$$

Mivel $(\ln 2 - 1) < 0 \implies W_z < W_{ny}$, tehát valóban **kisebb munkát végzett volna a szivattyú zárt nyílás esetén**, így Pat-nek volt igaza.

Megjegyzés: A megoldás során könnyű lehet „elfeledkezni” a léggör által okozott tagokról. Ez a hibalehetőség csökkenthető, ha a feladatot a mérnöki gyakorlatban gyakran alkalmazott *entalpia* fogalmával gondoljuk végig. Ennél a módszernél nincs más dolgunk, mint felvenni egy „ellenőrző téfogatot” a nyílt termodinamikai rendszer körül, majd az így lehatárolt térfogatban az állapotváltozásból származó *fizikai munkához* hozzáadni a rendszerhatáron történő anyag be-, illetve *kilépési munkáját*. E három munka összege (a rendszerben esetlegesen bekövetkező helyzeti-, illetve mozgási energiaváltozással kiegészítve) adja az úgynevezett *technikai munkát*, mely a szivattyú által végzett munkát jelenti.

4. feladat

Az első ajtó kiszakadása előtt adiabatikus változás megy végbe, hiszen minden fal hőszigetelő, így a környezettel nem cserélődik hő. Az adiabatikus folyamatkora jellemző egyenlet:

$$p_1 V_1^\kappa = p_0 V_0^\kappa. \quad (4.1)$$

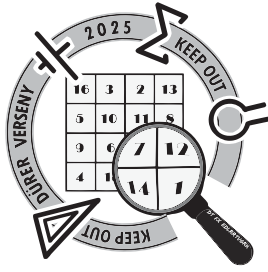
Tudjuk, hogy az ajtó teherbírása

$$F_\alpha = A_1 p_\alpha. \quad (4.2)$$

Felhasználva a (4.1)-es egyenletet, felírhatjuk a gáz térfogatát közvetlenül az első ajtó kiszakadása előtt:

$$V_\alpha = V_0 \cdot \left(\frac{A_1 p_0}{F_\alpha} \right)^{1/\kappa}, \quad (4.3)$$

tehát a dugattyú magassága



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)
Elméleti megoldókulcs



kategória

$$h_\alpha = h_0 \cdot \left(\frac{A_1 p_0}{F_\alpha} \right)^{1/\kappa}. \quad (4.4)$$

Ide behelyettesítve $h_\alpha = 1,11$ m, ahol h_0 a kezdeti magasság. A magasságváltozás

$$\Delta h_\alpha = h_0 \left[1 - \left(\frac{A_1 p_0}{F_\alpha} \right)^{1/\kappa} \right]. \quad (4.5)$$

Az idáig eltelt időt kifejezhetjük a dugattyú sebességével:

$$t_\alpha = \frac{h_0}{v} \cdot \left[1 - \left(\frac{A_1 p_0}{F_\alpha} \right)^{1/\kappa} \right]. \quad (4.6)$$

Erre behelyettesítés után $t_\alpha = 18,86$ s adódik.

Az első ajtó kiszakadása után a légmentes térrészbe beáramlik a levegő, és kitölti azt; hiszen az egész térrészben azonos a nyomás, mely így kisebb lesz az előtte mért értékhez képest. Itt nem használhatjuk az adiabatikus megváltozásra vonatkozó képletet, mivel a folyamat nem közelíthető oly módon, hogy egyensúlyi állapotokon halad keresztül. Viszont a belsőenergia-megmaradás továbbra is igaz lesz, hiszen minden fal hőszigetelő, és külső erők nem végeznek munkát (hiszen a dugattyú nem mozdul el az ajtó pillanatszerű kiszakadása alatt). Ezek alapján

$$E_{b_1} = E_{b_2}, \quad (4.7)$$

$$\frac{f}{2} p_\alpha V_\alpha = \frac{f}{2} p_2 V_2. \quad (4.8)$$

Itt p_2 , V_2 a kiszakadás utáni légtérfogat és nyomás. Mivel ugyanarról a gázzól van szó végig, így f -el egyszerűsíthetünk. Innen kifejezve p_2 -t:

$$p_2 = p_\alpha \cdot \frac{V_\alpha}{V_\alpha + L A_1}. \quad (4.9)$$

Itt felhasználtuk, hogy az ajtók közti térrész térfogata $\Delta V = L A_1$. Ezt követően ismét adiabatikusan csökken a gáz térfogata, és nő a nyomása egészen a második ajtó kiszakadásáig. Tehát a nyomások és a térfogatok között az alábbi formula teremt kapcsolatot:

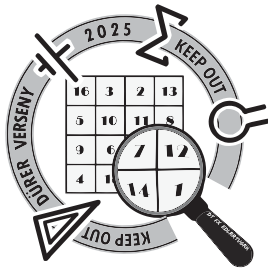
$$p_2 V_2^\kappa = p_\beta V_\beta^\kappa. \quad (4.10)$$

Tudjuk, hogy az ajtó teherbírása F_β . Mivel az ajtón kívül p_0 nyomású levegő található, ezért a benti és a kinti nyomásból származó erők eredőjének kell túllépnie F_β -t ahhoz, hogy az ajtó kiszakadjon. Tehát a kritikus nyomás:

$$p_\beta = \frac{F_\beta}{A_1} + p_0. \quad (4.11)$$

Ezt beírva a (4.10)-es egyenletbe, majd V_β -t kifejezve:

$$V_\beta = V_2 \cdot \left(\frac{A_1 p_2}{F_\beta + A_1 p_0} \right)^{1/\kappa}. \quad (4.12)$$



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



kategória

A mérnök akkor nem válik palacsintává, ha a második ajtó kiszakadásának pillanatában a dugattyú legalább $\sqrt{A_1}$ magasságra van a talajtól. Ezt a térfogattal kifejezve:

$$V_\beta \geq A_1 L + A_0 \cdot \sqrt{A_1}. \quad (4.13)$$

Tehát csak be kell helyettesíteni p_2 és V_2 értékét (4.12)-be és megnézni, hogy ez a feltétel teljesül-e. A (4.9)-es egyenletbe V_α -t helyettesítve kapjuk p_2 -t a megadott paraméterekkel kifejezve:

$$p_2 = \frac{F_\alpha}{A_1} \cdot \frac{V_0 \cdot \left(\frac{A_1 p_0}{F_\alpha}\right)^{1/\kappa}}{V_0 \cdot \left(\frac{A_1 p_0}{F_\alpha}\right)^{1/\kappa} + L A_1}. \quad (4.14)$$

Ezt ki is számolhatjuk, $p_2 = 3,74 \cdot 10^5$ Pa adódik. Ha külön nem számoljuk ki p_2 -t, akkor paraméteresen ezt és V_2 -t beírva a (4.12)-es egyenletbe:

$$V_\beta = \left(V_0 \cdot \frac{F_\alpha}{F_\beta + A_1 p_0}\right)^{1/\kappa} \cdot \left(\frac{A_1 p_0}{F_\alpha}\right)^{1/\kappa^2} \left[V_0 \cdot \left(\frac{A_1 p_0}{F_\alpha}\right)^{1/\kappa} + L A_1\right]^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}. \quad (4.15)$$

Ide behelyettesítve azt kapjuk, hogy $V_\beta \approx 3,81$ m³. A (4.13)-as egyenlet jobb oldalát kiszámolva azt kapjuk, hogy $V_{\max} = 2,875$ m³ térfogat szükséges ahhoz, hogy a mérnököt ne nyomja össze a prés. Mivel V_β kisebb ennél, így **főhősünk élve megússza a kalandot**.

5. feladat

Első lépésként vizsgáljuk azt a folyamatot, amikor a lemez töltése Q^2 és határozzuk meg a kilövés és a becsapódás között eltelt időt. A Gauss-törvény alkalmazásával a térerősségre az $2AE = Q/\varepsilon_0$ összefüggést kapjuk. Ebből kifejezve a térerősséget:

$$E = \frac{Q}{2A\varepsilon_0}, \quad (5.1)$$

majd felhasználva Newton II. törvényét az alábbiakra jutunk:

$$ma = qE = \frac{qQ}{2A\varepsilon_0} \implies a = \frac{qQ}{2Am\varepsilon_0}. \quad (5.2)$$

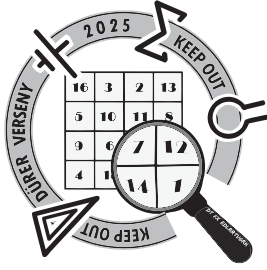
Ahol $m = n \cdot m_e$ az elektroncsomag teljes tömege és $q = n \cdot e$ az elektroncsomag teljes töltése. Feltéve, hogy a kezdeti sebessége az elektronokból álló csomagoknak v_0 , és L utat kell megtenniük a becsapódásig, a következőket írhatjuk fel:

$$v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 = L, \quad (5.3)$$

amit t -re megoldva:

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2aL}}{-a} = \frac{v_0 \mp \sqrt{v_0^2 - 2aL}}{a}. \quad (5.4)$$

²Ez egy csomag repülési ideje alatt állandó.



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



kategória

A két gyök közül a kisebbet kell választanunk, mivel ez tartozik ahhoz, amikor először eléri az elektronsomag a lemezt:

$$t = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2aL}}{a} = 2mA\varepsilon_0 \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2\frac{qQ}{2mA\varepsilon_0}L}}{qQ}. \quad (5.5)$$

Tudjuk, hogy $t < \tau$, azaz a következő kilövés azután következik be, hogy az előző elektronsomag becsapódott. Ekkor a következőt írhatjuk fel a $(k+1)$ -edik elektronsomagnak az első elektronsomag kilövésétől számított T_{k+1} becsapódási idejére (ha $k > 0$, a $k = 0$ esetben $T_0 = L/v_0$):

$$T_{k+1} = k\tau + 2mA\varepsilon_0 \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2\frac{kq^2}{2mA\varepsilon_0}L}}{kq^2}. \quad (5.6)$$

Ahol kihasználtuk, hogy a $(k+1)$ -dik csomag repülése közben a lemez töltése mindvégig $Q = k \cdot q$. Ebből a két becsapódás között eltelt idő már egyszerűen meghatározható. Legyen

$$\tilde{\tau} := T_{k+1} - T_k = \tau + 2mA\varepsilon_0 \left(\frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - \frac{kq^2}{mA\varepsilon_0}L}}{kq^2} - \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - \frac{(k-1)q^2}{mA\varepsilon_0}L}}{(k-1)q^2} \right). \quad (5.7)$$

Felhasználva, hogy a lemez kellően nagy³, az alábbi egyenlőségre jutunk:

$$\sqrt{v_0^2 - \frac{kq^2}{mA\varepsilon_0}L} = v_0 \sqrt{1 - \frac{kq^2}{mA\varepsilon_0 v_0^2}L} \approx v_0 \left(1 - \frac{kq^2}{2mA\varepsilon_0 v_0^2}L - \frac{1}{8} \left(\frac{kq^2 L}{mA\varepsilon_0 v_0^2} \right)^2 \right), \quad (5.8)$$

innen

$$\frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - \frac{kq^2}{mA\varepsilon_0}L}}{kq^2} \approx v_0 \left(\frac{L}{2mA\varepsilon_0 v_0^2} + \frac{1}{8} kq^2 \left(\frac{L}{mA\varepsilon_0 v_0^2} \right)^2 \right). \quad (5.9)$$

Ezt felhasználva, és behelyettesítve az (5.7) egyenlet zárójelében lévő kifejezésre

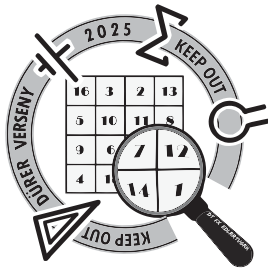
$$\begin{aligned} & \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - \frac{kq^2}{mA\varepsilon_0}L}}{kq^2} - \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - \frac{(k-1)q^2}{mA\varepsilon_0}L}}{(k-1)q^2} \approx \\ & \approx v_0 \left(\frac{L}{2mA\varepsilon_0 v_0^2} + \frac{1}{8} kq^2 \left(\frac{L}{mA\varepsilon_0 v_0^2} \right)^2 \right) - v_0 \left(\frac{L}{2mA\varepsilon_0 v_0^2} + \frac{1}{8} (k-1)q^2 \left(\frac{L}{mA\varepsilon_0 v_0^2} \right)^2 \right) \\ & = v_0 \left(\frac{1}{8} kq^2 \left(\frac{L}{mA\varepsilon_0 v_0^2} \right)^2 \right) - v_0 \left(\frac{1}{8} (k-1)q^2 \left(\frac{L}{mA\varepsilon_0 v_0^2} \right)^2 \right) = \frac{1}{8} v_0 q^2 \left(\frac{L}{mA\varepsilon_0 v_0^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.10)$$

adódik, melyből pedig

$$\tilde{\tau} = \tau + \frac{1}{4} \frac{ne^2 L^2}{m_e A \varepsilon_0 v_0^3} \quad (5.11)$$

eredményre jutunk.

³Ezt korábban is megtettük a térorosság kiszámításánál: $L/\sqrt{A} \ll 1$



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



kategória

1. feladat

(a)

Amíg a hullám visszajut a denevérhez, összesen két Doppler-effektuson megy keresztül. Először, mikor a hullám találkozik a kővel, majd utána, mikor a visszavert hullám eléri a denevért. Amikor a hullám eléri a követ, akkor a hullám forrása a denevér, a megfigyelő pedig a kő. A forrás a megfigyelő felé halad, a megfigyelő pedig a forrástól távolodik, tehát a Doppler-effektus miatt az új frekvencia:

$$f' = f_0 \cdot \frac{c - u_1}{c - v_D}, \quad (1.1)$$

ahol u_1 jelöli a kő sebességét abban a pillanatban, amikor elérte a hullám. Amikor a visszavert hullám eléri a denevért, akkor a forrás a kő, ami távolodik a megfigyelőtől, azaz a denevértől. Ez alapján a denevér által érzékelt frekvencia:

$$f_1 = f' \cdot \frac{c + v_D}{c + u_1}. \quad (1.2)$$

Ide (1.1)-et behelyettesítve:

$$f_1 = \frac{c + v_D}{c + u_1} \cdot \frac{c - u_1}{c - v_D} \cdot f_0. \quad (1.3)$$

Ebből az egyenletből szeretnénk először u_1 -et kifejezni. Bevezetve az $\eta = f_0/f_1$ jelölést, illetve keresztbe szorozva:

$$(c + u_1)(c - v_D) = \eta(c + v_D)(c - u_1). \quad (1.4)$$

Ezeket kifejtve, és a közös tagokat összevonva:

$$u_1(c - v_D + \eta c + \eta v_D) = c^2(\eta - 1) + cv_D(\eta + 1), \quad (1.5)$$

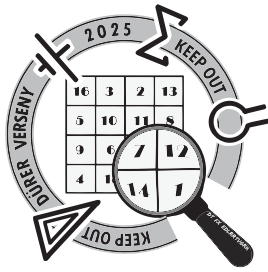
majd innen a kő sebességét kifejezve:

$$u_1 = c \cdot \frac{c(\eta - 1) + v_D(\eta + 1)}{c(\eta + 1) + v_D(\eta - 1)}. \quad (1.6)$$

Bevezetve a $k = v_D/c$ jelölést, egy kicsit szebb alakra hozható a fenti egyenlet:

$$u_1 = c \cdot \frac{\eta(k + 1) + (k - 1)}{\eta(k + 1) - (k - 1)}. \quad (1.7)$$

Ez lesz a kő sebessége akkor, amikor a hullám eléri; tehát ez még nem a keresett sebesség. Ahhoz, hogy azt megkapjuk, vizsgáljuk a testek közti távolságokat!



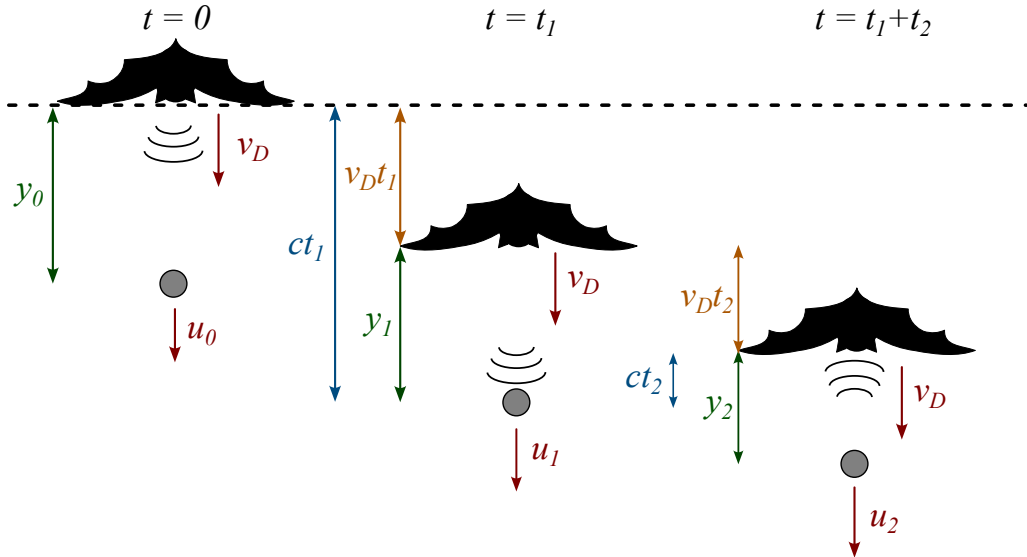
XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



kategória



1.1. ábra. A denevér és a kő helyzete a kritikus pillanatokban.

Az 1.1-es ábrán látható távolságokat kifejezhetjük, felhasználva, hogy a denevér egyenes vonalú egyenletes mozgást végez v_D sebességgel, a kő pedig szabadesik, így gyorsulása g . Az ábra alapján felírhatjuk az alábbi egyenleteket:

$$y_1 = ct_1 - v_D t_1, \quad (1.8)$$

majd hasonló módon a második helyzetre:

$$y_1 = ct_2 + v_D t_2. \quad (1.9)$$

Ezekből t_2 -t kifejezve:

$$t_2 = \frac{c - v_D}{c + v_D} t_1. \quad (1.10)$$

Felhasználva, hogy a teljes idő $T = t_1 + t_2$:

$$T = \frac{2c}{c + v_D} t_1, \quad (1.11)$$

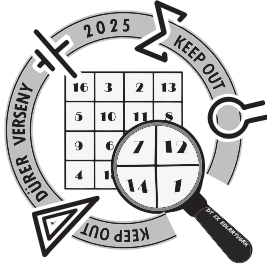
melyből t_1 kifejezhető:

$$t_1 = \frac{c + v_D}{2c} T. \quad (1.12)$$

Használva a korábban bevezetett k paramétert, szép formulával felírhatjuk t_1 és t_2 kifejezéseket:

$$t_1 = \frac{1 + k}{2} T, \quad (1.13)$$

$$t_2 = \frac{1 - k}{2} T. \quad (1.14)$$



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)
Elméleti megoldókulcs



kategória

Innen t_1 -et (1.8)-ba behelyettesítve:

$$y_1 = cT \cdot \frac{1 - k^2}{2}. \quad (1.15)$$

Visszatérve az 1.1-es ábrához, felírható a kiindulási és a t_1 beli távolságok közti kapcsolat:

$$y_1 = y_0 - v_D t_1 + u_0 t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2. \quad (1.16)$$

Továbbá a második helyzetben a kő sebessége a kezdeti sebességgel kifejezve:

$$u_1 = u_0 + g t_1, \quad (1.17)$$

ezt rendezve u_0 -ra:

$$u_0 = u_1 - g t_1, \quad (1.18)$$

amit beírva az (1.16)-os képletbe:

$$y_1 = y_0 + (u_1 - v_D) t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2. \quad (1.19)$$

Ezt y_0 -ra rendezve:

$$y_0 = y_1 + (v_D - u_1) t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2. \quad (1.20)$$

Ide behelyettesítve a (1.13)-mas és (1.15)-ös egyenletekből t_1 -et és y_1 -et:

$$y_0 = cT \cdot \frac{1 - k^2}{2} + \left(k - \frac{u_1}{c}\right) \cdot cT \cdot \frac{1 + k}{2} + \frac{1}{2} g T^2 \left(\frac{1 + k}{2}\right)^2, \quad (1.21)$$

ahonnan kiemelések után:

$$y_0 = cT \cdot \frac{1 + k}{2} \cdot \left(1 - \frac{u_1}{c}\right) + \frac{1}{2} g T^2 \left(\frac{1 + k}{2}\right)^2. \quad (1.22)$$

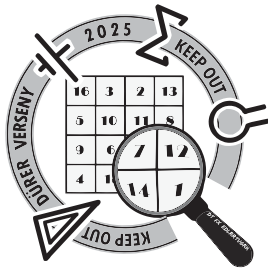
Ide az (1.7)-es egyenletet behelyettesítve kapjuk a keresett távolságot:

$$y_0 = cT \cdot \frac{1 + k}{2} \cdot \left(1 - \frac{\eta(k + 1) + (k - 1)}{\eta(k + 1) - (k - 1)}\right) + \frac{1}{2} g T^2 \left(\frac{1 + k}{2}\right)^2. \quad (1.23)$$

A középső zárójelben közös nevezőre hozva, és egyszerűsítések után:

$$\boxed{y_0 = cT \cdot \frac{1 - k^2}{\eta(k + 1) - (k - 1)} + \frac{1}{2} g T^2 \left(\frac{1 + k}{2}\right)^2}. \quad (1.24)$$

A keresett sebességet pedig úgy kapjuk, hogy az (1.7)-es egyenletbe behelyettesítjük az (1.18)-as és az (1.13)-as egyenleteket:



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



F+

kategória

$$u_0 = c \cdot \frac{\eta(k+1) + (k-1)}{\eta(k+1) - (k-1)} - gT \cdot \frac{1+k}{2}. \quad (1.25)$$

Behelyettesítve a megadott adatokat azt kapjuk, hogy a kő sebessége a hanghullám indulásának pillanatában $u_0 = 6,5 \text{ m/s}$, amikor elérte a hullám, akkor pedig $u_1 = 7 \text{ m/s}$. A kő és a denevér közti kezdei távolságra pedig az adódik, hogy $y_0 \approx 17,4 \text{ m}$.

(b)

Itt is ugyanúgy két Doppler-effektus fog lejátszódni, és használhatjuk az előző részben levezetett (1.3)-as képletet:

$$f_1 = \frac{c + v_b}{c + u_{\max}} \cdot \frac{c - u_{\max}}{c - v_b} \cdot f_0, \quad (1.26)$$

ahol v_b jelöli a denevér sebességét, ami 0 és v_D között van. Tudjuk, hogy a h_0 magasságba dobott kő maximális sebessége (amivel becsapódik a talajba) $u_{\max} = \sqrt{2gh_0}$. Ezt beírva a fenti egyenletbe:

$$f_1 = \frac{c + v_b}{c + \sqrt{2gh_0}} \cdot \frac{c - \sqrt{2gh_0}}{c - v_b} \cdot f_0. \quad (1.27)$$

Az biztos, hogy a hullám frekvenciája nőni fog, tehát a denevér egy magasabb hangot érzékel. A fenti egyenletből könnyen látható, hogy akkor lesz a frekvenciák aránya maximális, ha v_b is maximális, tehát $v_b = v_D$. Ahhoz tehát, hogy bármilyen gyorsan haladva is érzékelje a követ, a denevérnek legalább

$$f_{\max} = \frac{c + v_D}{c + \sqrt{2gh_0}} \cdot \frac{c - \sqrt{2gh_0}}{c - v_D} \cdot f_{\min} \quad (1.28)$$

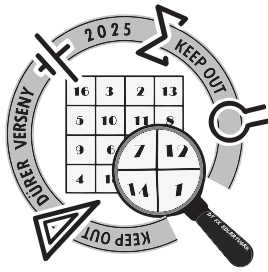
frekvenciájú hullámok érzékelésre kell képesnek lennie. **Ez behelyettesítések után 46,37 kHz-nek adódik.**

(c)

Itt is két Doppler-effektus fog lejátszódni, azonban változik a testek egymáshoz viszonyított mozgási iránya, hiszen a kő a denevér felé repül. Élhetünk a feltételezéssel, hogy a denevér által kibocsájtott egyik hangimpulzus éppen a dobás utáni pillanatban éri el a követ. (Ez teljesen reális, a denevérek hanghullámjai nagyon gyorsan követik egymást.) Ekkor az első Doppler-effektus után a kőről visszavert hang frekvenciája:

$$f' = f_0 \cdot \frac{c + v_0}{c}, \quad (1.29)$$

ahol v_0 a kő kezdeti sebessége. A képletben nem szerepel a denevér sebessége, hiszen az nulla. A második Doppler-effektus is hasonlóan fest, csak ott most is felcserélődik a megfigyelő és a forrás szerepe, így



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



kategória

$$f_1 = f' \cdot \frac{c}{c - v_0}, \quad (1.30)$$

$$f_1 = \frac{c + v_0}{c - v_0} \cdot f_0. \quad (1.31)$$

Megint bevezetve az $\eta = f_0/f_1$ jelölést, és a fenti egyeletet rendezve:

$$v_0 = c \cdot \frac{1 - \eta}{1 + \eta}. \quad (1.32)$$

Mivel a hullámok most is „összenyomódnak” (nő a frekvenciájuk), így a denevérnek úgy van a legjobb esélye érzékelni a követ, ha a legalacsonyabb frekvenciájú hullámaival pásztázza a környezetet. Tehát $f_0 = 45$ kHz, $f_1 = 80$ kHz (a hallási tartomány teje). Ezeket és c értékét behelyettesítve:

$$v_0 = 95,2 \text{ m/s} = 342,72 \text{ km/h}. \quad (1.33)$$

Ha ennél nagyobb kezdősebességgel dobja fel Watson a követ, akkor a Doppler-effektus révén annyira megnő a denevér által érzékelt hullámok frekvenciája, hogy az már kiesik az érzékelési tartományából. Láthatjuk, hogy óriási sebességgel kellene elindítani a követ ahhoz, hogy ez megtörténjen, ezért nem jelent ez problémát a denevéreknek a természetben.

2. feladat

(a)

A megoldás során a vektorokat félkövérrel jelöljük, míg nagyságukat hagyományos betűvel, tehát $|\mathbf{v}| = v$. A robbanás a pálya síkjában minden irányban Δv sebességgel szórta szét a darabokat. Ahol ez a sebesség egy irányba esett a \mathbf{v}_0 kerületi sebességgel ott a darabkák felgyorsultak annyira, hogy elérjék a szökési sebességet, és így elhagyták a Düránusz gravitációs terét.

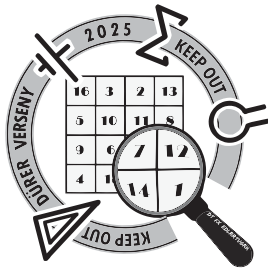
(b)

A problémát érdemes energetikai szempontból vizsgálni. A hold körpályán keringett a Düránusz körül, ezért kezdeti potenciálja:

$$U_0 = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\gamma M}{r_0} = -\frac{v_0^2}{2}, \quad (2.1)$$

mivel a körmozgás feltételéből következik hogy:

$$v_0^2 = \frac{\gamma M}{r_0}. \quad (2.2)$$



XVIII. Dürer Verseny

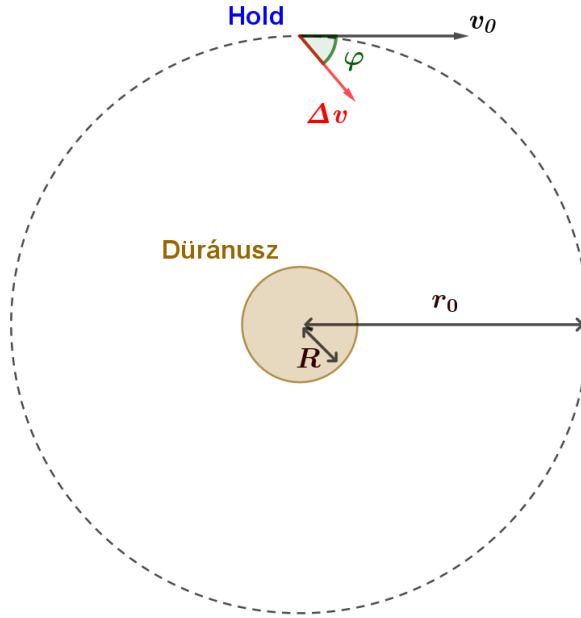
Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



F+

kategória



2.1. ábra. A hold szétrobbanásának pillanata.

A 2.1-es ábra alapján vizsgáljuk meg azt a törmelékdarabkát, mely a robbanás következtében a v_0 kerületi sebességhez képest φ szöget bezáróan kapott Δv nagyságú sebességet. Ennek érintőirányú sebesség komponense $v_0 + \Delta v \cdot \cos \varphi$, sugárirányú komponense pedig $\Delta v \cdot \sin \varphi$. Tehát a teljes sebességének nagysága:

$$v(\varphi) = \sqrt{(v_0 + \Delta v \cdot \cos \varphi)^2 + (\Delta v \cdot \sin \varphi)^2}. \quad (2.3)$$

Ez alapján a vizsgált darabka potenciálja:

$$U(\varphi) = \frac{(v_0 + \Delta v \cos \varphi)^2 + (\Delta v \sin \varphi)^2}{2} - \frac{\gamma M}{r_0} \quad (2.4)$$

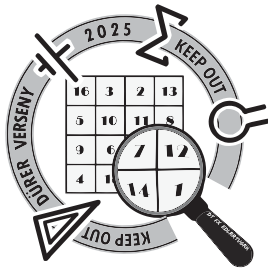
A zárójeleket kibontva, majd az utolsó tag helyére (2.2)-ből v_0^2 -et behelyettesítve:

$$U(\varphi) = \frac{v_0^2 + 2\Delta v v_0 \cos \varphi + \Delta v^2}{2} - v_0^2 = \frac{-v_0^2 + 2\Delta v v_0 \cos \varphi + \Delta v^2}{2}. \quad (2.5)$$

Egy törmelékdarabka elhagyhatja a Düránusz gravitációs terét, ha $U(\varphi) \geq 0$. Vizsgáljuk a kritikus $\varphi = \alpha$ határesetet, amikor $U(\alpha) = 0$. A (2.5) egyenletből látszik, hogy $U(\varphi)$ monoton csökkenő függvény a $\varphi \in [0, \pi]$ intervallumon, ezért ha $\varphi \leq \alpha$, akkor $U(\varphi) \geq 0$.

A (2.5) egyenletet Δv -re megoldva:

$$\begin{aligned} \Delta v &= \frac{-2v_0 \cos \alpha \pm \sqrt{4v_0^2 \cos^2 \alpha + 4v_0^2}}{2} \\ \Delta v &= -v_0 \cos \alpha \pm v_0 \sqrt{\cos^2 \alpha + 1}. \end{aligned} \quad (2.6)$$



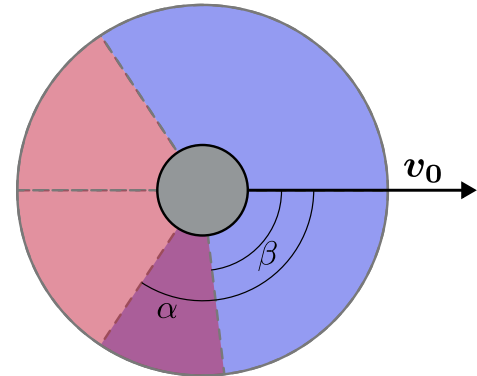
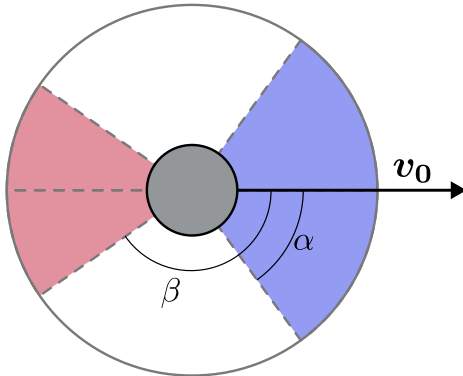
XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



kategória



- (a) Vannak a Düránusz körül pályára álló darabok, melyek a fehér tartományból indulnak. (b) Nincsenek a Düránusz körül pályára álló darabok, mivel a piros és kék tartomány átfed.

2.2. ábra. A törmelékdarabok egyes kategóriáihoz tartozó kiindulási szögtartományok a robbanás pillanatában. Azon törmelékek, melyekre $U(\varphi) \geq 0$ a kékkel jelölt tartományból indulnak, míg a bolygóba becsapódó darabok a pirossal jelölt tartományból.

Honnan tudjuk, hogy nincs olyan törmelékdarabka, mely elhagyhatná a bolygó gravitációs terét, de becsapódik abba? Tegyük fel, hogy van olyan $\varphi = \varphi^*$ szöghöz tartozó darabka, melyre $U(\varphi^*) \geq 0$, viszont mégis becsapódik (ezt a 2.2b. ábra szemlélteti). Ez azt jelenti, hogy minden $\varphi > \varphi^*$ szöghöz tartozó darabka is be fog csapódni, mert az energiája és perdülete is kisebb. Ebből az következik, hogy nincs olyan törmelék mely pályára áll, így ellentmondásra jutottunk a feladat szövegét figyelembe véve. Ezzel bizonyítottuk, hogy minden törmelék ami megszökhet ténylegesen meg is szökik (ezt a 2.2a. ábra szemlélteti).

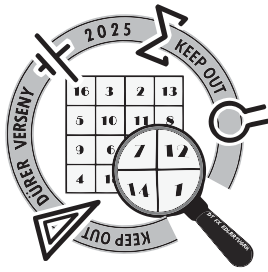
A darabok impulzumomentuma és energiája megegyezik a φ és $-\varphi$ szögekre, mivel sebességeik nagysága és érintő irányú komponenseik megegyeznek. Ezek alapján a holdnak α/π része hagyja el a Düránusz gravitációs terét. Ez éppen a „hiányzó” 23 %, így az alábbi egyenlet írható fel:

$$0,23 = \frac{\alpha}{\pi} \Rightarrow \cos \alpha \approx \frac{3}{4}. \quad (2.7)$$

Ezek alapján a keresett arány egyszerűen kiszámolható ¹:

$$\frac{\Delta v}{v_0} \approx \frac{1}{2}. \quad (2.8)$$

¹Megjegyzés: $(\Delta v/v_0)_1 = 0,5$; $(\Delta v/v_0)_2 = -2$. Nyilvánvalóan csak a pozitív megoldásnak van fizikai értelme.



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



F+
kategória

(c)

Vizsgáljunk most egy olyan m tömegű törmelékdarabkát, mely a robbanás következtében a v_0 kerületi sebességhez képest φ szöget bezáróan kapott $\Delta v = v_0/2$ sebességet. A potenciálját a (b) feladatrészben már felírtuk, most nézzük meg a pályaperdületét:

$$N = m(v_0 + \Delta v \cos \varphi)r_0 = m \left(1 + \frac{\cos \varphi}{2}\right) v_0 r_0. \quad (2.9)$$

Jellemezze ezen darabka pályájának fókuszponthoz legközelebbi pontját egy v^* sebesség (mely érintőirányú) és egy r^* sugár. Ismét keressük azt a $\varphi = \beta$ határesetet (mely már a 2.2. ábrán szerepelt) amikor ez a darabka pont becsapódik a Düránusz felszínébe, azaz $r^* = R$. Ekkor a becsapódás előtti pillanatban a perdülete:

$$N^* = m v^* R. \quad (2.10)$$

A perdületmegmardás alapján² $N = N^*$, tehát v^* kifejezhető:

$$v^* = v_0 \left(1 + \frac{\cos \beta}{2}\right) \frac{r_0}{R}. \quad (2.11)$$

Az energiamegmaradásból következik, hogy a kezdeti és a *-al jelölt helyzetben a potenciál megegyezik, tehát $U = U^*$:

$$\frac{(v_0 + \Delta v \cos \beta)^2 + (\Delta v \sin \beta)^2}{2} - \frac{\gamma M}{r_0} = \frac{(v^*)^2}{2} - \frac{\gamma M}{R}. \quad (2.12)$$

Bal oldalt a (2.4)-ben már felírt potenciált látjuk, melynek eredményét megkapjuk, ha (2.5)-be behelyettesítjük a $\Delta v = 1/2 v_0$ értéket. Emellett v^* értékét behelyettesítve, és az utolsó tagot r_0 -al bővítve:

$$\frac{-v_0^2 + v_0^2 \cos \beta + \frac{1}{4}v_0^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} \left(1 + \frac{\cos \beta}{2}\right)^2 \left(\frac{r_0}{R}\right)^2 - \frac{\gamma M}{r_0} \left(\frac{r_0}{R}\right). \quad (2.13)$$

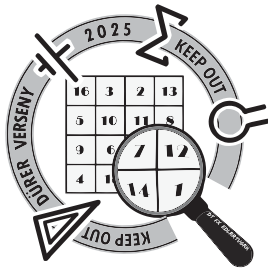
Kihasználva, hogy $\gamma M/r_0 = v_0^2$ és bal oldalon a műveleteket elvégezve:

$$\frac{v_0^2}{2} \left(\cos \beta - \frac{3}{4}\right) = \frac{v_0^2}{2} \left(1 + \frac{\cos \beta}{2}\right)^2 \left(\frac{r_0}{R}\right)^2 - v_0^2 \left(\frac{r_0}{R}\right). \quad (2.14)$$

Végül nullára rendezve:

$$0 = \left(1 + \frac{\cos \beta}{2}\right)^2 \left(\frac{r_0}{R}\right)^2 - 2 \left(\frac{r_0}{R}\right) - \left(\cos \beta - \frac{3}{4}\right). \quad (2.15)$$

²A pályaperdület megmaradása következik abból, hogy a sajátperdülete a törmelékdarabkáknak nem változik a gravitációs vonzóerő hatására.



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



F +

kategória

Ez egy másodfokú egyenlet a keresett r_0/R arányra, melynek megoldása:

$$\begin{aligned} \frac{r_0}{R} &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \left(1 + \frac{\cos \beta}{2}\right)^2 \left(\cos \beta - \frac{3}{4}\right)}}{2 \left(1 + \frac{\cos \beta}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + \left(1 + \frac{\cos \beta}{2}\right)^2 \left(\cos \beta - \frac{3}{4}\right)}}{\left(1 + \frac{\cos \beta}{2}\right)^2}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Minden darabka, aminek Δv sebessége β -nál nagyobb szöget zár be \mathbf{v}_0 -al, ugyanúgy a Düránusz felszínén fog landolni, hiszen minél nagyobb β , annál kisebb az eredő és a radiális sebesség is. Természetesen most is csak egy félkört vizsgálunk, hiszen az elrendezés továbbra is rendelkezik a (b) részben leírt szimmetriával. Ezek alapján, mivel a holdnak 12%-át találták meg a Düránusz felszínén:

$$0,12 = \frac{\pi - \beta}{\pi} \Rightarrow \cos \beta \approx -0,93. \quad (2.17)$$

Ezt felhasználva a keresett arány egyszerűen kiszámolható ³:

$$\boxed{\frac{r_0}{R} \approx 6}. \quad (2.18)$$

3. feladat

Korrektció: Sajnos az elméleti feladatsorban ezen feladat szövege hibásan jelent meg. A helyes megfogalmazás szerint: „Mivel a csőben a víz elég gyorsan folyik, ezért a cső hossza mentén nem alakul ki termikus egyensúly, továbbá a víz a réz által **leadottleadható** hőnek csak η -szorosát veszi fel.”

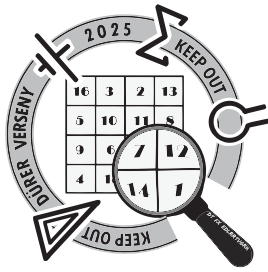
Jelöljük a réztömb hőmérsékletét egy tetszőleges t időpontban T_r -rel, a csőből kifolyó víz hőmérsékletét pedig T_v -vel. Mivel a réz T_1 -ről hűl a víz hatására, a víz pedig T_0 -ról melegszik a réz hatására, ezért $T_0 < T_v < T_r < T_1$ -nek teljesülnie kell minden időpillanatban. Rövid Δt idő alatt (mialatt a réztömb hőmérséklete állandónak tekinthető) a csőbe $\phi \Delta t$ tömegű, T_0 hőmérsékletű víz folyik be, és ugyanekkora tömegű T_v hőmérsékletű víz folyik ki. Ezek alapján a víz által elvont hő mértéke:

$$\Delta Q = m_v c_v \Delta T_v = \phi \Delta t \cdot c_v \cdot (T_v - T_0). \quad (3.1)$$

Tudjuk, hogy ez az η -szorosa annak a hőmennyiségnek, amit akkor kapnánk, ha a termikus egyensúly beállt volna a víz és a réz között, vagyis, ha $T_v = T_r$ lenne:

$$\Delta Q = \eta \cdot \Delta Q|_{T_v=T_r} = \eta \cdot \phi \Delta t \cdot c_v \cdot (T_r - T_0). \quad (3.2)$$

³Megjegyzés: $(r_0/R)_1 = 6,01$; $(r_0/R)_2 = 0,98$. Nyilvánvalóan a második megoldás nem értelmezhető.



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



kategória

Mivel ezt a hőmennyiséget a víz a réztömbtől vonja el, ezért a Δt időszakasz végére a réztömb hőmérséklete kicsiny ΔT_r -rel kevesebbnek tekintendő. Az előzőekhez hasonló összefüggés alapján:

$$\Delta Q = -m \cdot c_r \cdot \Delta T_r, \quad (3.3)$$

hiszen a réztömb hűl, így ΔT_r értéke negatív. A (3.2) és a (3.3) egyenletek jobb oldalát egyenlővé téve megkapjuk, hogy a Δt időtartam és az ez alatt történő ΔT_r hőmérsékletváltozás hányadosa lineárisan függ a réz aktuális hőmérsékletétől:

$$\frac{\Delta T_r}{\Delta t} = -\frac{\eta \phi c_v}{m c_r} (T_r - T_0), \quad (3.4)$$

ami megegyezik a Newton-féle lehűlési törvény alakjával. Ez alapján a vízzel hűtött réztömb rendszere matematikailag ekvivalens egy olyan rendszerrel, amely egy állandó T_0 hőmérsékletű környezetben hűl, viszont az $\eta \phi c_v$ szorzat tölti be a hőátadási tényező és a felület szorzatának szerepét. A Newton-féle lehűlési törvényből származó hőmérséklet-idő-függvény ismeretében (ez egy általánosan ismert összefüggés, de a függvénytáblázatok is tartalmazzák) a réz hőmérsékletének időfüggésére az alábbiakat kapjuk:

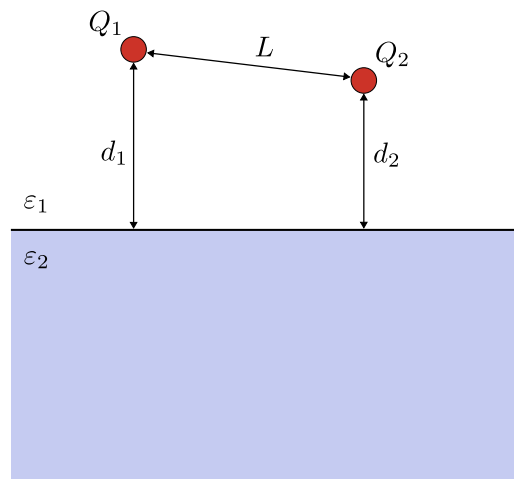
$$T_r(t) = T_0 + (T_1 - T_0) \cdot e^{-\frac{\eta \phi c_v}{m c_r} t}. \quad (3.5)$$

Ebből már algebrai átalakításokkal megkaphatjuk azt az időt, ami alatt a réz hőmérséklete T_2 -re hűl:

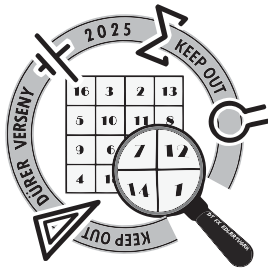
$$T_r(t_2) = T_2 \quad \Longrightarrow \quad t_2 = \frac{m c_r}{\eta \phi c_v} \cdot \ln \left(\frac{T_1 - T_0}{T_2 - T_0} \right) = 114 \text{ s}. \quad (3.6)$$

4. feladat

A feladat szövege szerint a két vizsgált töltésünk (Q_1, Q_2) egy sík dielektromos határfelülethez közel helyezkedik el (lásd 4.1. ábra). A potenciális energia kiszámításához számoljuk ki, hogy mennyi munkát kell végeznünk a töltéselrendezés összeállításának során.



4.1. ábra. A feladat szövegében felvázolt töltéselrendezés.



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

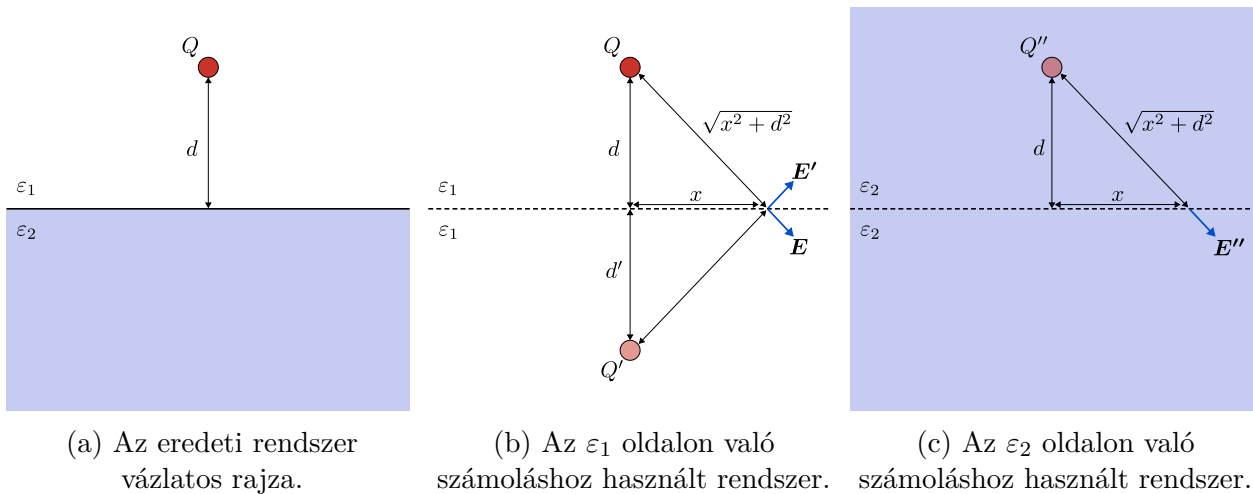
Elméleti megoldókulcs



F +

kategória

A töltésekre ható erők ilyen dielektromos határfelület esetén megadhatók a tükörtöltések módszerének használatával. Először vezessük le, hogy egyetlen Q töltés esetén milyen megoldást ad az eljárás. Legyen a Q töltés egy ε_1 relatív dielektromos állandójú anyagban, míg a határfelület túloldalán legyen a dielektromos állandó ε_2 (lásd 4.2a. ábra).



4.2. ábra. Egyetlen Q töltés esetén a tükörtöltések módszere.

A célunk legyen annak meghatározása, hogy mekkora erő hat a Q töltésre. Ehhez két esetet kell vizsgálnunk aszerint, hogy a határfelület melyik oldalán keressük az elektromos mezőt. Ha az ε_1 oldalon akarjuk kiszámolni az elektromos térerősséget, akkor feltesszük, hogy az egész teret ε_1 anyag tölti ki (lásd 4.2b. ábra). Az elektromos tér felírásához tegyük fel, hogy a Q töltésen kívül egy Q' töltés is jelen van valahol. A tükörtöltések módszere csak akkor használható, ha ezt a Q' töltést a határfelület Q -val ellentétes oldalára helyezjük, továbbá most tegyük fel, hogy Q' helye pontosan a Q helyének határfelületre vett tükrözésével kapható, tehát $d = d'$. Ekkor az *Útmutatásban* említett határfelületi illesztéshez szükséges komponensek:

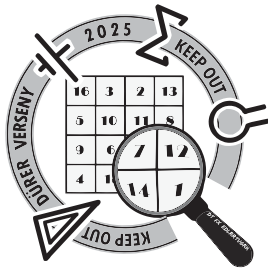
$$E_{\parallel}^t = E_{\parallel} + E'_{\parallel} = \frac{(Q + Q')}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1(d^2 + x^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{d^2 + x^2}}, \quad (4.1)$$

$$D_{\perp}^t = \varepsilon_0\varepsilon_1(E_{\perp} + E'_{\perp}) = \frac{(Q - Q')}{4\pi(d^2 + x^2)} \cdot \frac{d}{\sqrt{d^2 + x^2}}. \quad (4.2)$$

Ahol E_{\parallel} a határfelülettel párhuzamos, míg E_{\perp} az arra merőleges elektromos térerősség komponensét jelölik. Továbbá D^t , E^t a teljes térerősséget, E a Q töltés terét és E' a Q' töltés terét jelentik.

Ha az ε_2 oldalon vizsgáljuk a teret, akkor szintén fel kell tennünk, hogy az egész teret ε_2 anyag tölti ki (lásd 4.2c. ábra). Ekkor viszont nem helyezhetünk töltést az eredetileg is ε_2 -höz tartozó oldalra, így a helyes feltétel úgy kapható, ha az eredeti Q töltés helyére egy Q'' töltést

⁴Ez az illesztési feltételekből is levezethető, hiszen azoknak a határfelület tetszőleges pontjában teljesülniük kell.



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



kategória

képzelnünk, és így vizsgáljuk a kialakuló elektromos teret⁵. Ekkor a határfelületi illesztéshez szükséges komponensek:

$$E_{\parallel}^t = E''_{\parallel} = \frac{Q''}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2(d^2 + x^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{d^2 + x^2}}, \quad (4.3)$$

$$D_{\perp}^t = \epsilon_0\epsilon_2 E''_{\perp} = \frac{Q''}{4\pi(d^2 + x^2)} \cdot \frac{d}{\sqrt{d^2 + x^2}}. \quad (4.4)$$

Ahol \mathbf{E}'' a Q'' töltés elektromos terét jelöli.

A két esetben a határon egyeznie kell a E_{\parallel}^t és D_{\perp}^t komponenseknek⁶, amiből a következő egyenleteket kapjuk:

$$E_{\parallel} + E'_{\parallel} = E''_{\parallel} \implies \frac{Q + Q'}{\epsilon_1} = \frac{Q''}{\epsilon_2}, \quad (4.5)$$

$$D_{\perp} + D'_{\perp} = D''_{\perp} \implies Q - Q' = Q''. \quad (4.6)$$

Az egyenleteket rendezve a következő eredményre jutunk:

$$Q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q, \quad (4.7)$$

$$Q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q. \quad (4.8)$$

Ezáltal tehát a Q töltésre ható erő már egyszerűen kiszámítható:

$$F = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1 \cdot (2d)^2} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0\epsilon_1 d^2}. \quad (4.9)$$

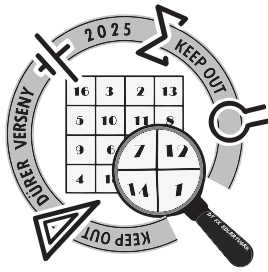
Az előző levezetés alapján ismerjük a megoldást egyetlen töltés esetén, így ennek segítségével már kiszámolhatjuk a feladatban vázolt kéttöltéses elrendeződés potenciális energiáját. Határozzuk meg először, hogy mennyi munkát kell végeznünk ahhoz, hogy a Q_1 töltést a helyére vigyük egy végtelen messzi pontból úgy, hogy közben még a Q_2 töltést végtelen messze tartjuk. Q_1 -et mozgassuk például a határfelületre merőlegesen, ekkor a végzett munka:

$$W_{1-1'} = \int_{d_1}^{\infty} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{d_1}^{\infty} dx \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \frac{Q_1^2}{16\pi\epsilon_0\epsilon_1 x^2} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \frac{Q_1^2}{16\pi\epsilon_0\epsilon_1 d_1}. \quad (4.10)$$

Felmerülhet a kérdés, hogy miért nem használtuk a két ponttöltés közti potenciális energiára vonatkozó képletet ebben az esetben. Ennek az oka az, hogy a szükséges munka éppen fele annak a potenciális energiának, amire a hagyományos képlet vezetne, így az nem alkalmazható. Az eltérés oka szemléletesen az, hogy nekünk csak az eredeti töltést kell mozgatnunk, míg a tükörképe úgy mond „magától” mozog, így nekünk mindig csak $\Delta r/2$ távot kell elmozdítani a töltést ahhoz, hogy a tükörkép és az eredeti töltés közt a távolság Δr -et változzon.

⁵A töltés helye itt is megkapható a határfeltételekből.

⁶Ezek az illesztési feltételek megkaphatók a Maxwell-egyenletek felhasználásával.



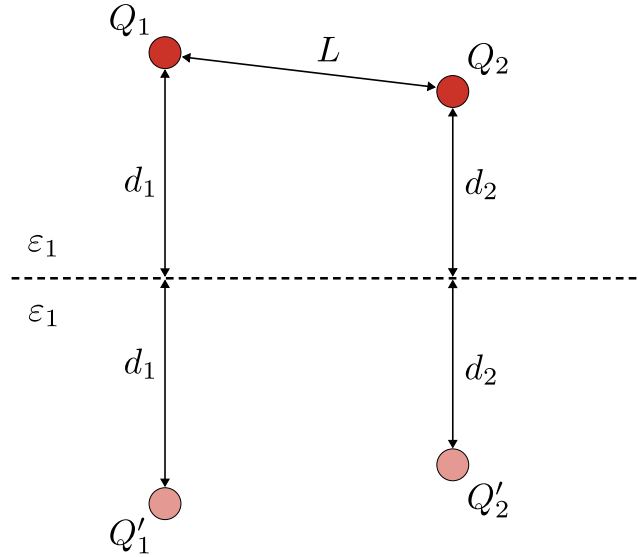
XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



kategória



4.3. ábra. A kéttöltéses elrendeződés megoldása az ε_1 oldalról nézve.

A következő lépésben rögzítsük a Q_1 töltést és hozzuk végtelen távról a végső helyére a Q_2 töltést. Ekkor három tagból fog állni a szükséges munka (lásd 4.3. ábra):

- (1) A Q_1 és Q_2 közötti taszítás miatt fellépő tag, aminél használható a két ponttöltés esetén jól ismert potenciális energiára vonatkozó képlet, mivel egyik sem tükörtöltés:

$$W_{1-2} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 L}. \quad (4.11)$$

- (2) A Q'_1 és Q_2 közötti taszításból származó tag, ahol szintén használható a jól ismert képlet, mivel Q'_1 ebben a lépésben már nem mozog:

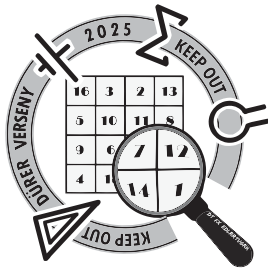
$$W_{1'-2} = \frac{Q'_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 \sqrt{L^2 + 4d_1 d_2}} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 \sqrt{L^2 + 4d_1 d_2}}, \quad (4.12)$$

ahol kihasználtuk, hogy a végső elrendezésben Q'_1 és Q_2 távolsága a következőképp kapható a Pitagorasz-tétel alapján:

$$\Delta s = \sqrt{\Delta s_x^2 + \Delta s_y^2} = \sqrt{(L^2 - (d_1 - d_2)^2) + (d_1 + d_2)^2} = \sqrt{L^2 + 4d_1 d_2}. \quad (4.13)$$

- (3) A Q_2 és Q'_2 közötti taszítás miatti tag, ahol a $W_{1-1'}$ esetén alkalmazott módszert kell használnunk:

$$W_{2-2'} = \int_{d_2}^{\infty} dx \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{Q_2^2}{16\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 x^2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{Q_2^2}{16\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 d_2}. \quad (4.14)$$



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



kategória

A rendszer potenciális energiája az eddig kiszámolt négy tag összegeként kapható meg, így a végeredmény:

$$E_{\text{pot}} = W_{1-1'} + W_{2-2'} + W_{1-2} + W_{1'-2}. \quad (4.15)$$

$$E_{\text{pot}} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{1}{16\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \left(\frac{Q_1^2}{d_1} + \frac{Q_2^2}{d_2} \right) + \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 L} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 \sqrt{L^2 + 4d_1 d_2}}. \quad (4.16)$$

Látszik, hogy az eredmény $Q_1 \leftrightarrow Q_2$ és $d_1 \leftrightarrow d_2$ cseréssel nem változik, amit el is várunk, mivel nem számíthat, hogy melyik töltést helyezzük el először.

5. feladat

A feladat megoldása során végig érdemes hengerkoordináta-rendszerben felírni a megjelenő mennyiségeket, hiszen az egész elrendezés ilyen szimmetriát mutat. Ilyen felírásnál a z tengely lesz a henger szimmetriatengelye, r jelöli az erre merőleges, radiális irányt, illetve φ az érintő irányt. Biztosan tudjuk, hogy a mágneses mező forrásmentes (Maxwell III. törvénye), tehát egy tetszőleges térfogat lapjain be- és kilépő mágneses fluxusok megegyeznek.⁷ A hengersizmetria miatt legyen a vizsgált térfogat egy kis dz hosszúságú, r sugarú henger az z tengely mentén. Ennek a lapjaira felírva a mágneses fluxusokat:

$$B_z(z) \cdot r^2 \pi - B_z(z + dz) \cdot r^2 \pi + B_r(z) \cdot 2r\pi dz = 0. \quad (5.1)$$

Itt úgy vettük, hogy a B_z komponens csökken, tehát a B_r a cső felé mutat, de mint látni fogjuk, fordítva is ugyanazt az eredményt kapnánk. Emellett a fenti egyenletben azért nem kell vektormennyiségekkel számolnunk, mert a két komponens merőleges a két felületre. Az (5.1)-es egyenletet $B_r(z)$ -re rendezve:

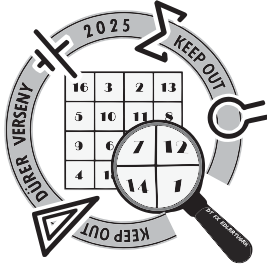
$$B_r(z) = -\frac{r}{2} \frac{B_z(z + dz) - B_z(z)}{dz}. \quad (5.2)$$

Ahogy dz tart nullához úgy a jobb oldalt éppen megjelenik B_z deriváltja:

$$B_r(z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}. \quad (5.3)$$

A feladat lényegi felismerése, hogy ez a komponens fogja megváltoztatni a cső mozgását. Végig a Lorentz-erő hat a csőre, amelynek irányát a jól ismert jobbkéz-szabályból kapjuk. Az egyenesen haladó csőre a z irányú komponens nem fejt ki erőt, az r komponens pedig először olyan erőt fejt ki, hogy a cső elkezd forogni a tengelye körül. Ezután a forgó csőre már a z irányú komponens is erőt fejt ki, de ennek az eredője zérus, így itt is csak az r komponenset kell vizsgálni. Az ebből eredő erő éppen egy z irányú fékezést fog okozni. Szerencsére a forgás és a mozgás egyenletei

⁷Azt is mondhatjuk, hogy a mágneses mezőnek a térfogat határológörbéjére vett felületi integrálja zérus, vagy, hogy nulla a mező rotációja. Ez mind ekvivalens megfogalmazása ugyanannak.



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)
Elméleti megoldókulcs



kategória

külön tárgyalhatóak, ugyanis a cső haladó mozgása csak a forgást befolyásolja közvetlenül, a forgás pedig csak a haladó mozgást (saját magukat nem).

Először megmutatjuk, hogy milyen egyenletekre jutunk a mágneses mező általánosságát feltételezve, majd csak ezután helyettesítjük be a megadott lineáris függést. Nézzük meg először, hogy a $v(t)$ sebességgel haladó csőre mekkora forgatónyomaték hat! A Lorentz-erő egy kis dz hosszúságú darabka esetén, amely z helyen helyezkedik el:

$$dF_1(z, t) = dQ \cdot v(t) \cdot B_r(z). \quad (5.4)$$

Bevezetve a $\sigma = Q/\ell$ vonalmenti töltéssűrűséget, illetve (5.3)-ból B_r -t (5.4)-be helyettesítve:

$$dF_1(z, t) = -\frac{\sigma r}{2} v(t) \frac{dB_z}{dz} dz. \quad (5.5)$$

Erre a darabkára ható forgatónyomaték:

$$dM(z, t) = -\frac{\sigma r^2}{2} v(t) \frac{dB_z}{dz} dz. \quad (5.6)$$

A teljes csőre ható forgatónyomatékot úgy kapjuk, hogy integráljuk ezt a cső teljes hosszára. Ehhez célszerű azt venni, hogy a bal oldali vége $z = \chi$ pontban van.

$$\sum M(z, t) = -\frac{\sigma r^2}{2} v(t) \int_{\chi}^{\chi+\ell} \frac{dB_z}{dz} dz. \quad (5.7)$$

Jobb oldalt éppen egy deriváltfüggvényt integrálunk, így csak a $B(z)$ függvényt kell kiértékelni a kezdeti és végpontokban, így a teljes forgatónyomaték:

$$\sum M(z, t) = -\frac{\sigma r^2}{2} v(t) [B_z(z + \ell) - B_z(z)]. \quad (5.8)$$

A forgásegyenlet alapján:

$$\sum M(z, t) = \dot{\omega}(z, t) \cdot \Theta, \quad (5.9)$$

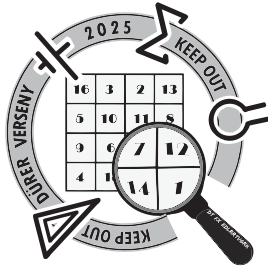
ezt behelyettesítve az előző egyenletbe:

$$\dot{\omega}(z, t) = -\frac{\sigma r^2}{2\Theta} v(t) [B_z(z + \ell) - B_z(z)]. \quad (5.10)$$

Vizsgáljuk most a forgás miatt létrejövő fékező erőt! Itt is egy dz hosszúságú darabkát vizsgálunk, amely $\omega(t)$ szögsebességgel forog és dQ a töltése. Ekkor a rá ható Lorentz-erő:

$$dF_z(z, t) = -dQ \cdot r\omega(t) \cdot B_r(z). \quad (5.11)$$

A negatív előjel fontos, hiszen az erő a negatív z irányba fog mutatni. Itt végiggondolhatjuk, hogy tényleg nem számít B_z monotonitása, tehát a deriváltjának (B_r -nek) az előjele. Ha B_r kifelé mutat, akkor a z tengely szerinti pozitív irányba forgatja a csövet, és B_r ezért lassítja; ha pedig B_r befelé mutat, akkor a másik irányba forog a cső, és B_r amiatt lassítja. Az (5.11)-es egyenletbe megint σ és $B_r(z)$ értékét behelyettesítve:



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



kategória

$$dF_z(z, t) = \frac{\sigma r^2}{2} \omega(t) \cdot \frac{dB_z}{dz} dz, \quad (5.12)$$

innen ismét integrálva kapjuk meg a teljes erőt:

$$\sum F_z(z, t) = \frac{\sigma r^2}{2} \omega(t) \cdot \int_x^{x+\ell} \frac{dB_z}{dz} dz. \quad (5.13)$$

Most is kihasználhatjuk, hogy az integrál argumentumában egy deriváltfüggvény található, illetve a mozgásegyenletet is behelyettesíthetjük:

$$\dot{v}(z, t) = \frac{\sigma r^2}{2m} \omega(t) [B_z(z + \ell) - B_z(z)]. \quad (5.14)$$

Kaptunk tehát két teljesen általános egyenletet, az (5.10)-es és (5.14)-es egyenleteket. Teljesen általános alatt azt értjük, hogy a cső bármilyen paraméterezése, és bármilyen mágneses mező esetén igazak maradnak. Ezeket együtt felírva:

$$\dot{\omega}(z, t) = -\frac{\sigma r^2}{2\Theta} v(t) [B_z(z + \ell) - B_z(z)], \quad (5.15)$$

$$\dot{v}(z, t) = \frac{\sigma r^2}{2m} \omega(t) [B_z(z + \ell) - B_z(z)]. \quad (5.16)$$

Innentől érdemes tárgyalni a speciális $B_z = B_0 + \alpha z$ esetet. Ekkor ugyanis

$$B_z(z + \ell) - B_z(z) = \alpha \ell, \quad (5.17)$$

tehát az egyenletrendszerünk az alábbi alakot ölti:

$$\dot{\omega}(z, t) = -\frac{\sigma r^2 \alpha \ell}{2\Theta} v(t), \quad (5.18)$$

$$\dot{v}(z, t) = \frac{\sigma r^2 \alpha \ell}{2m} \omega(t). \quad (5.19)$$

A második egyenletet idő szerint deriválva:

$$\ddot{v}(t) = \frac{\sigma r^2 \alpha \ell}{2m} \cdot \dot{\omega}(t). \quad (5.20)$$

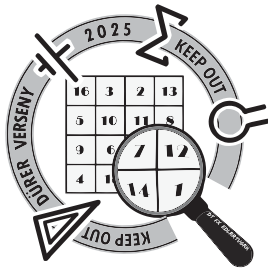
Felhasználva, hogy vékony falú cső esetén $\Theta = mr^2$, és a kapott egyenletbe (5.18)-at behelyettesítve:

$$\ddot{v}(t) = -\frac{\sigma^2 r^2 \alpha^2 \ell^2}{4m^2} \cdot v(t). \quad (5.21)$$

Bevezetve az

$$\Omega^2 = \frac{\sigma^2 r^2 \alpha^2 \ell^2}{4m^2} \quad (5.22)$$

jelölést, egy ismert differenciálegyenletre jutunk:



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Elméleti megoldókulcs



F+

kategória

$$\ddot{v}(t) = -\Omega^2 v(t), \quad (5.23)$$

melynek megoldása természetesen

$$v(t) = A \sin(\Omega t + \phi). \quad (5.24)$$

A kezdeti feltételekből határozzuk meg A és ϕ paramétereket! Ehhez először deriváljuk a kapott $v(t)$ függést, hogy azt utána (5.16)-ba visszaírva kifejezhessük $\omega(t)$ -t:

$$\dot{v}(t) = \Omega A \cos(\Omega t + \phi) = \frac{\sigma r^2 \alpha \ell}{4m} \cdot \omega(t). \quad (5.25)$$

Mivel kezdetben nem forog a henger, így $\omega(0) = 0$. Ezt a fenti egyenletbe beírva:

$$\omega(0) = 0 = \frac{4m\Omega A}{\sigma r^2 \alpha \ell} \cdot \cos(0 \cdot t + \phi), \quad (5.26)$$

ami csak akkor teljesülhet, ha

$$\phi = \frac{\pi}{2}. \quad (5.27)$$

Ezt visszaírva (5.24)-be, illetve felhasználva, hogy $v(0) = v_0$:

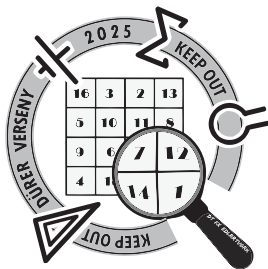
$$A = v_0. \quad (5.28)$$

A végeredmény tehát:

$$v(t) = v_0 \cos\left(\frac{Qr\alpha}{2m} t\right). \quad (5.29)$$

Érdekes, hogy a kapott eredmény három paramétertől is független, amire nem feltétlenül számítottunk:

- B_0 : Teljesen mindegy, hogy mekkora a mágneses mező kezdeti értéke, csak az számít, hogy hogyan változik, hiszen a B_z komponens nincsen hatással a mozgásra, csak ennek a deriváltja.
- α előjele: Észrevehető, hogy a kapott végeredmény független attól, hogy a mágneses mező z komponense nő vagy csökken. Mint már korábban írtuk a B_r komponens biztos, hogy fékezni fogja a csövet, hiszen így teljesül csak a Lenz-törvény. Itt talán az az érdekes, hogy ez matematikailag is szépen megjelent, hiszen $\cos(z) = \cos(-z)$.
- ℓ : A végeredményben nem szerepel a cső hossza. Ez azért lehet elsőre furcsa, mert nagyon hosszú cső esetén óriási különbség lenne a mágneses indukció nagyságában a cső elejénél és végénél, amiről azt gondolhatjuk, hogy számítani kell. Itt is az a magyarázat, hogy ebben a lineáris esetben csak a B_r komponens számít, ami viszont konstans α mindenhol.



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Mérés feladatsor



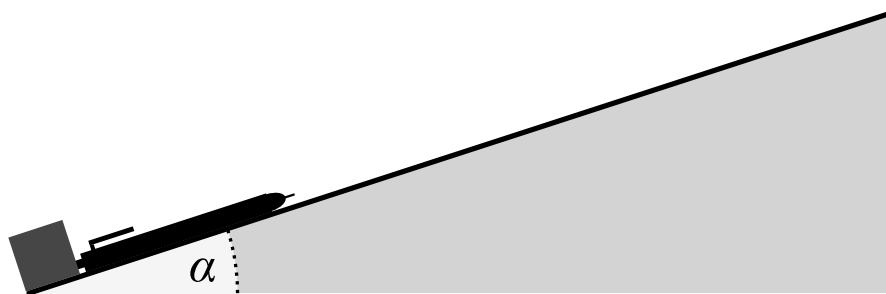
Figyelem! A teljes pontszám eléréséhez nem elegendő a megoldás számszerű közlése, a mérés lépéseit tartalmazó jegyzőkönyv és a végeredmény hibájára vonatkozó becslés is szükséges!

A mérés célja

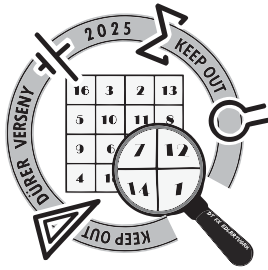
A mérés során egy, a rugója segítségével mozgásba hozott toll lejtőn való csúszását tanulmányozzuk. Célunk a rugóállandó, valamint a lejtő fa felülete és a toll műanyag burkolata közötti csúszási súrlódási együttható meghatározása. Az alkalmazott módszer a test különböző hajlásszögű lejtőkön való csúszásának vizsgálata, ekkor az első megállásig megtett utak mérése lehetőséget ad mindkét paraméter feltérképezésére.

Elméleti bevezető

Tekintsünk egy m tömegű tollat, melynek belsejében egy D rugóállandójú rugó található. A toll végén lévő gomb egyszeri benyomásával, majd elengedésével elérhető, hogy a hegye láthatóvá váljék, és írni lehessen vele. A gomb újbóli megnyomása összenyomja a rugót, így ha ebben az állapotban elengedjük a tollat, és csupán a gomb végét támasztjuk meg, akkor az „kiló” a kezünkől. Kattintsunk kettőt a tollal, hogy ebbe az állapotba kerüljön, de ne engedjük el, hanem tartsuk összenyomva. Így helyezzük egy kellően hosszú, α hajlásszögű lejtő aljára oly módon, hogy a toll párhuzamos legyen a lejtő függőleges keresztmetszetével, valamint hegye felfelé mutasson. A gombot szorítsuk oda egy, a lejtő alján található, kellően stabil tárgyhoz; és tartsuk a kezünkkel, hogy ne „lőjön ki”. Ezt az elrendezést szemlélteti az alábbi *ábra*.



A tollat elengedve „kilövi” magát, majd egy bizonyos s távolság megtétele után megáll a lejtőn, ezután a súrlódási viszonyoktól függően elkezdhet visszafelé csúszni. Az s távolság ismeretében tudunk következtetni a keresett μ súrlódási együtthatóra feltéve, hogy ismerjük a rugó összenyomódásának mértékét, a toll tömegét, valamint az α szöget. Ezen értékek segítségével meghatározható a rugóállandó is.



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Mérés feladatsor



Mérési eszközök

A fő mérési eszköz egy $m = 10,5$ g tömegű, közönséges *rugós toll*, amelynek rugóját a „kilövés” során $x = 8,5$ mm-rel nyomjuk össze. A feladat során rendelkezésre áll még egy *deszka*, egy *kartondoboz*, melynek leszedhető fedele szolgálhat a kilövés támaszaként, valamint két *mérőszalag* is. A deszkát a kartondobozzal alátámasztva létrehozható egy változtatható hajlásszögű lejtő, melyen a toll mozgása vizsgálható. A nehézségi gyorsulás a következőkben minden esetben közelíthető úgy, mint $g = 9,81$ m/s².

Elméleti feladatok

1. feladat

(1 pont)

Írjuk fel a toll elengedése és első megállása közötti mozgásra a munkatételt!

2. feladat

(6 pont)

Rendezzük át a felírt egyenletet oly módon, hogy az egyik oldalon egy $\operatorname{tg} \alpha$ -ban lineáris függvény szerepeljen, mely $\operatorname{tg} \alpha$ -n kívül csak a keresett mennyiségeket tartalmazza; a másik oldalon pedig mérhető, valamint ismert paraméterek legyenek!

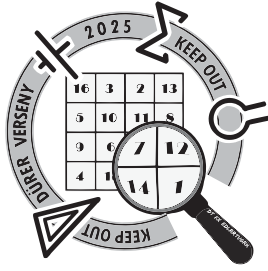
Mérési feladatok

3. feladat

(12 pont)

A kartondobozzal alátámasztva a deszkát, hozzunk létre egy nem túl meredek lejtőt! A lejtő aljáról „lőjük ki” a tollat, és mérjük meg az általa megállásig megtett utat! Érdemes a mérést többször is elvégezni, és a legnagyobb 5 értéket (s_1, s_2, \dots, s_5) lejegyezni, majd a későbbiekben ezen mért értékek s átlagával számolni, de közben fontos figyelni arra, hogy az egymást követő „kilövések” között a lejtő meredeksége ne változzék. A kartondoboz elcsúsztatásával és forgatásával változtassuk meg a lejtő meredekségét, és mérjük a megtett utakat a fent leírt módon legalább 10 különböző α szög esetén! Ne felejtsük el, hogy mindig csak a toll egyik pontja által megtett utat kell mérni, és a toll hegye „tollhossznyi előnyből” indul a többi ponthoz képest!

A mért adatok lejegyzésére az alábbi *táblázat* használható. Az α szög meghatározásához mérjük meg a lejtő h magasságát, és L hosszát! Írjuk fel minden meredekség esetén a lejtő α hajlásszögének tangensét, valamint a 2. feladatban levezetett képlet mért mennyiségeket tartalmazó oldalán álló kifejezés értékét (jelölje ezt a továbbiakban C , tüntessük fel C mértékegységét is)! Ábrázoljuk milliméterpapíron az így kapott összetartozó értékpárokat!



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Mérés feladatsor



kategória

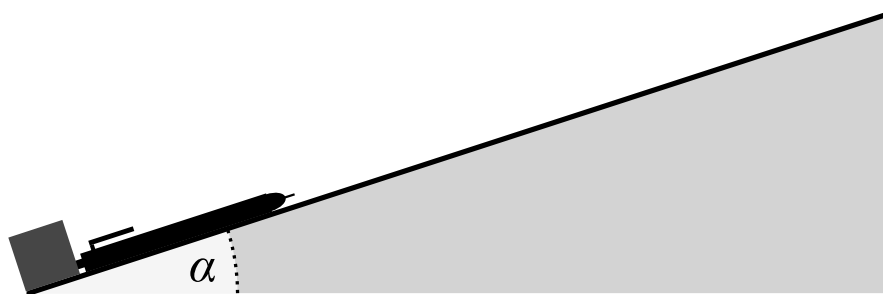
Figyelem! A teljes pontszám eléréséhez nem elegendő a megoldás számszerű közlése, a mérés lépéseit tartalmazó jegyzőkönyv és a végeredmény hibájára vonatkozó becslés is szükséges!

A mérés célja

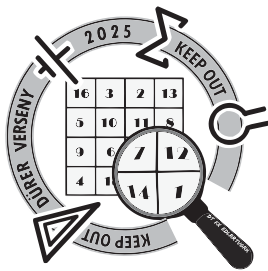
A mérés során egy, a rugója segítségével mozgásba hozott toll lejtőn való csúszását tanulmányozzuk. Célunk a rugóállandó, valamint a lejtő fa felülete és a toll műanyag burkolata közötti csúszási súrlódási együttható meghatározása. Az alkalmazott módszer a test különböző hajlásszögű lejtőkön való csúszásának vizsgálata, ekkor az első megállásig megtett utak mérése lehetőséget ad mindkét paraméter feltérképezésére.

Elméleti bevezető

Tekintsünk egy m tömegű tollat, melynek belsejében egy D rugóállandójú rugó található. A toll végén lévő gomb egyszeri benyomásával, majd elengedésével elérhető, hogy a hegye láthatóvá váljék, és írni lehessen vele. A gomb újbóli megnyomása összenyomja a rugót, így ha ebben az állapotban elengedjük a tollat, és csupán a gomb végét támasztjuk meg, akkor az „kiló” a kezünkől. Kattintsunk kettőt a tollal, hogy ebbe az állapotba kerüljön, de ne engedjük el, hanem tartsuk összenyomva. Így helyezzük egy kellően hosszú, α hajlásszögű lejtő aljára oly módon, hogy a toll párhuzamos legyen a lejtő függőleges keresztmetszetével, valamint hegye felfelé mutasson. A gombot szorítsuk oda egy, a lejtő alján található, kellően stabil tárgyhoz; és tartsuk a kezünkkel, hogy ne „lőjön ki”. Ezt az elrendezést szemlélteti az alábbi *ábra*.



A tollat elengedve, az „kilóvi” magát, majd egy bizonyos s távolság megtétele után megáll a lejtőn, ezután a súrlódási viszonyoktól függően elkezdhet visszafelé csúszni. Az s távolság ismeretében tudunk következtetni a keresett μ súrlódási együtthatóra feltéve, hogy ismerjük a rugó összenyomódásának mértékét, a toll tömegét, valamint az α szöget. Ezen értékek segítségével meghatározható a rugóállandó is.



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Mérés feladatsor



Mérési eszközök

A fő mérési eszköz egy $m = 10,5$ g tömegű, közönséges *rugós toll*, amelynek rugóját a „kilövés” során $x = 8,5$ mm-rel nyomjuk össze. A feladat során rendelkezésre áll még egy *deszka*, egy *kartondoboz*, melynek leszedhető fedele szolgálhat a kilövés támaszaként, valamint két *mérőszalag* is. A deszkát a kartondobozzal alátámasztva létrehozható egy változtatható hajlásszögű lejtő, melyen a toll mozgása vizsgálható. A nehézségi gyorsulás a következőkben minden esetben közelíthető úgy, mint $g = 9,81$ m/s².

Elméleti feladat

1. feladat

(7 pont)

Alkalmasan megválasztott egyenlettel írjuk le a toll mozgását az elengedése és első megállása között! Hozzuk a kapott kifejezést olyan alakra, hogy az egyenlet egyik oldalán csak mérhető, valamint ismert mennyiségek legyenek; míg a másik oldalon valamely változtatható mennyiség lineáris függvénye szerepeljen, ahol az együtthatókban csak a keresett paraméterek vannak.

Mérési feladatok

2. feladat

(12 pont)

A kartondobozzal alátámasztva a deszkát, hozzunk létre egy nem túl meredek lejtőt! A lejtő aljáról „lőjük ki” a tollat, és mérjük meg az általa megállásig megtett utat! Érdekes a mérést többször is elvégezni, majd a későbbiekben a válogatott mért értékek s átlagával számolni, de eközben fontos figyelni arra, hogy az egymást követő „kilövések” között a lejtő meredeksége ne változzék.

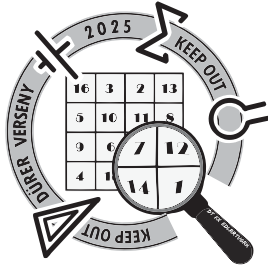
A kartondoboz elcsúsztatásával és forgatásával változtassuk meg a lejtő meredekségét, és mérjük a megtett utakat a fent leírt módon legalább 10 különböző α szög esetén!

Az 1. feladatban levezetett összefüggés alapján próbáljuk meg milliméterpapíron ábrázolni az egyenlet két oldalán szereplő (mért és ismert adatokból számolható) mennyiség közti lineáris kapcsolatot. Végezzük is el az ábrázolást! Mennyire jó az illeszkedés?

3. feladat

(4 pont)

Röviden diszkutáljuk, hogy milyen tényezők járulnak hozzá az adatok értékének mérési hibájához! Körülbelül mekkora mértékű bizonytalanságot eredményeznek ezek az előző pontban választott két mennyiség értékében? Tüntessük fel ezt a bizonytalanságot a grafikonon!



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Mérés feladatsor



4. feladat

(12 pont)

Illesszünk az ábrázolt adatpontokra egyenest, és az elméleti feladatban kapott összefüggés segítségével számoljuk ki D és μ értékét!

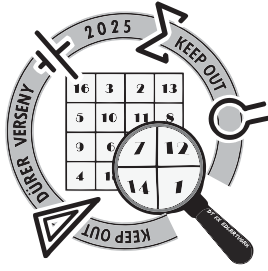
A legjobbnak vélt illesztés mellett illesszük még azokat az előzőtől legjobban eltérő egyeneseket is, amelyek még „híhetők”, azaz éppen áthaladnak nagyjából az összes adatpont hibatarományán! Határozzuk meg ezek szükséges paramétereit is, és számoljuk ki belőle D , valamint μ értékének bizonytalanságát!

Segítség: μ és D bizonytalansága meghatározható úgy, hogy kiszámoljuk a hozzájuk tartozó minimális és maximális értékeket, de alkalmazhatjuk a hibaterjedés szabályait is.

A mérés elvégzésére és a jegyzőkönyv megírására 90 perc áll a csapatok rendelkezésére.

Sikeres versenyzést kívánnak:

a szervezők



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Mérés megoldókulcs



F
F
F+
kategória

Megjegyzés: Az F+ kategória esetén a feladatok számozása, illetve a lejtőként használt faanyag némiképp eltért a fent közölt megoldásban alkalmazottól (így a kapott μ érték is különböző), azonban a mérés elve teljes egészében megegyezett a mintamegoldásban bemutatottakkal.

Elméleti feladatok

1. feladat

Érdekes az elrendezést energetikai szempontból vizsgálni.

Amikor felhúzzuk a tollat, a rugó összenyomódik valamekkora x távolsággal. A toll elengedése után a rugóban tárolt rugalmas energia először a toll mozgási energiájává alakul. Ezután a gravitációs erő és a súrlódási erő végez munkát a tollon. A munkatétel alapján:

$$\frac{1}{2}Dx^2 = mgs \sin \alpha + mg \cos \alpha \cdot \mu s. \quad (1)$$

2. feladat

A fenti egyenletben x és s mérhető, míg m -et és g -t ismertnek tekinthetjük. A feladatban is írtaknak megfelelően érdemes úgy átrendezni az (1)-es egyenletet, hogy a bal oldalra gyűjtjük az ismert és mérhető mennyiségeket; míg a jobb oldalon egy $\operatorname{tg} \alpha$ -ban lineáris kifejezés áll, mely emellett a keresett paramétereket tartalmazza:

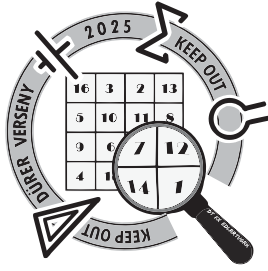
$$\frac{x^2}{2mg} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{D} \operatorname{tg} \alpha + \frac{\mu}{D} \quad (2)$$

A bal oldalon az első tényező egy ismert konstans, az $1/(\cos \alpha \cdot s)$ hányadost pedig minden mérésnél ki tudjuk számolni. Az egyenlet ezen oldalát ábrázolva $\operatorname{tg} \alpha$ függvényében - az elmélet szerint - az adatpontokra egy egyenes illeszthető, melynek meredekségéből kiszámíthatjuk a rugóállandót, a függőleges tengelymetszetből pedig a csúszási súrlódási együtthatót.

Mérési feladatok

3. feladat

A mérés során a lejtő hajlásszögét a kartondoboz kétféle pozícióba forgatásával, illetve vízszintes eltolásával módosítottuk. A beállítás során arra törekedtünk, hogy (a deszka hosszúságát is figyelembe véve) a kiszámított $\operatorname{tg} \alpha$ értékek a mérési intervallumot közel egyenletes módon lefedjék. Mindegyik meredekség esetén 10 kilövést hajtottunk végre, melyeknél leolvastuk a deszka oldalára ragasztott mérőszalag segítségével az indítási helytől az első megállásig mért elmozdulást. Ezek közül az 5 legnagyobb s_1, s_2, \dots, s_5 érték s átlagával számoltunk tovább. A hajlásszög tangense a lejtő mért geometriai paramétereiből az alábbi összefüggés szerint számítható:



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Mérés megoldókulcs



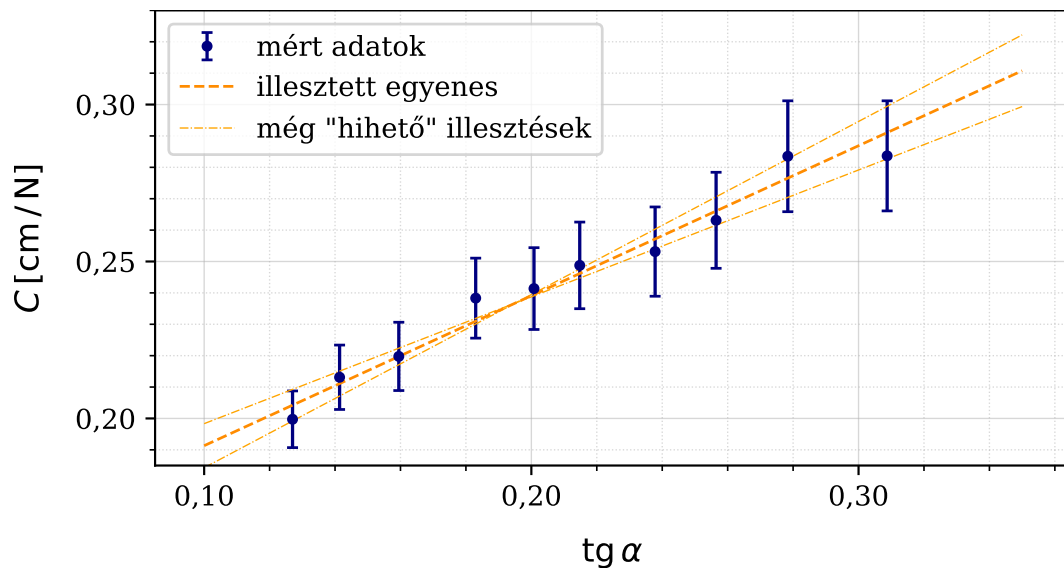
FF+
kategória

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{\sqrt{L^2 - h^2}}. \quad (3)$$

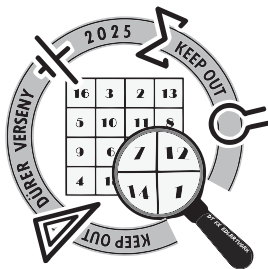
Végül a fentiekben elvégzett számítások után a 2. feladat-ban kapott egyenlet bal oldalát (C) is kiszámíthatjuk. Az eredményeket az 1. táblázat, a kiszámolt $C - \operatorname{tg} \alpha$ adatpárokat az 1. ábra mutatja.

h [m]	L [m]	s_1 [m]	s_2 [m]	s_3 [m]	s_4 [m]	s_5 [m]	s [m]	$\operatorname{tg} \alpha$	C [cm/N]
0,126	1,000	0,185	0,181	0,175	0,174	0,170	0,177	0,127	0,200
0,126	0,900	0,173	0,168	0,164	0,163	0,163	0,166	0,141	0,213
0,126	0,800	0,165	0,164	0,161	0,161	0,157	0,162	0,159	0,220
0,126	0,640	0,150	0,149	0,148	0,147	0,147	0,148	0,201	0,238
0,126	0,700	0,152	0,149	0,149	0,149	0,149	0,150	0,183	0,241
0,236	1,020	0,144	0,144	0,143	F 0,141	0,140	0,142	0,238	0,249
0,126	0,600	0,151	0,147	0,145	0,139	0,139	0,144	0,215	0,253
0,236	0,950	0,143	0,139	0,138	0,136	0,132	0,138	0,256	0,263
0,236	0,880	0,130	0,130	0,128	0,127	0,127	0,128	0,278	0,284
0,236	0,800	0,133	0,133	0,128	0,127	0,126	0,129	0,309	0,284

1. táblázat. A mért adatok, illetve az ezekből származtatott mennyiségek.



1. ábra. A mért adatokból számolt C mennyiség a lejtő hajlásszögének függvényében és az adatpontokra illesztett egyenesek.



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Mérés megoldókulcs



kategória

4. feladat

A mérés során kétféle mennyiséget mérünk: a lejtő geometriai jellemzőit (h és L), valamint a toll által megtett utat (s). A geometriai jellemzők mérésének hibája egyszerűen a mérőszalag leolvasásából fakadhat, ezt $\Delta h = \Delta L = 1$ mm-nek tekintjük. Ennek mértéke két nagyságrenddel kisebb, mint h és L tipikus értékei, tehát elég nagy biztonsággal eltekinthetünk ezek, és közvetlenül a hajlásszög mérésének hibájától. A megtett út mérésének hibája már számottevőbb. Bár a többszöri mérés biztosítja azt, hogy az átlag a valódi érték körül legyen, még nagyon nagy számú mérés esetén sem lehetünk biztosak abban, hogy ennek pontos értéke jobban megközelelti a valós értéket, mint amekkora a toll álló helyzetének meghatározási pontossága. Egyrészt itt is jelen van a leolvasási hiba, de az elengedés folyamatából eredő bizonytalanság miatt a toll kezdősebességének nagysága és iránya is változik az egyes "kilövések" során. Ezen kívül elegendően meredek lejtő esetén a toll visszacsúszása is nehezíti a pontos mérést. Ugyan az eszközökkel megvalósítható mérési elrendezésben a toll sebessége lehetővé teszi, hogy a vonalzó főbeosztásához képest nagyjából meghatározzuk a toll végső helyzetét, de az ember érzékelési ideje miatt egy 5-10 milliméteres bizonytalanság mindenképpen marad. Ez alapján tekintsük a mérési hibát $\Delta s \approx 0,8$ cm-nek¹! Ezzel a konstans értékkel akár egyesével is kiszámolhatjuk minden C érték hibáját (ahogy az 1. ábrán csináltuk), de egy egyszerű nagyságrendi becslés tehető, ha megvizsgáljuk azt az esetet, amikor ennek a hatása a legjelentősebb, vagyis amikor a mért távolság a legkisebb. A legnagyobb meredekségnél a mért értékek átlaga $s = 0,129$ m, amely a bizonytalanság miatt azt jelenti, hogy s valahova 0,121 m és 0,137 m közé esik, tehát a C mennyiség értékének valahova 0,268 cm/N és 0,304 cm/N közé kell esnie, vagyis C bizonytalansága körülbelül $\Delta C \approx 0,018$ cm/N.

5. feladat

A (2) egyenlet alapján azt várjuk, hogy C és $\tan \alpha$ mennyiségek között lineáris kapcsolat van, ezért a mért adatokra egyenest illesztünk, amelyet az 1. ábrán ábrázoltunk. Az illesztett egyenes meredeksége $\lambda = 0,478$ cm/N, az y -tengelymetszete pedig $C_0 = 0,144$ cm/N. Ebből $D = 1/\lambda = 2,09$ N/cm és $\mu = C_0 \cdot D = 0,300$.

Az 1. ábrán illesztett két segédegyenes meredeksége $\lambda_1 = 0,552$ cm/N és $\lambda_2 = 0,404$ cm/N; az y -tengelymetszete pedig $C_{0,1} = 0,129$ cm/N és $C_{0,2} = 0,158$ cm/N. Ebből a keresett paraméterek minimális és maximális értékei $D_1 = 1,81$ N/cm és $D_2 = 2,47$ N/cm, valamint $\mu_1 = 0,234$ és $\mu_2 = 0,391$. A paraméterek mérésének eredménye tehát

$$D = [2,09 \pm 0,38] \text{ N/cm} \quad \text{és} \quad (4)$$

$$\mu = [0,300 \pm 0,091] \quad (5)$$

¹A megoldás során $\Delta s \approx 0,8$ cm értékkel számoltunk, de a versenyzőktől bármilyen hasonló nagyságrendű, helyes érveléssel kapott értéket elfogadtunk.

A XVIII. Dürer Verseny (2024-2025) döntőjének eredményei - F kategória

Hely	Csapatnév	Tagok	Évf.	Iskola	Felkészítő tanárok	Kifejtős forduló						Mérési forduló	Össz
						1.	2.	3.	4.	5.	Σ		
1.	Csapatnév	Erdélyi Dominik Ujvári Sarolta Zólomy Csanád Zsolt	11. 11. 11.	Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest	Schramek Anikó, Nagy Piroska Mária	8	8	12	10	6	44	18	62
2.	HaΨ!	Papp Emese Petra Bánkuti Bálint Tóth-Turán Száva	10. 12. 12.	ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és Kollégium; Budapest	Gyertyán Attila, Zsigri Ferenc	9	7	5	7	4	32	28	60
2.	Nóra és a boyz	Maráczi Nóra Szabó András Sámuel Kiss Adorján Timon	11. 11. 12.	Kaposvári Táncsics Mihály Gimnázium; Kaposvár	Hunka Gáborné, Matics Martin	8	13	7	11	0	39	21	60
4.	A Kémia Applikált Fizika	Major-Pomozi Léda Takách Máté Zhang Steve	12. 11. 12.	ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és Kollégium; Budapest	Deák Márta	8	5	6	10	7	36	20	56
5.	Még van egy hónap	Tajta Sára Jávor Botond Gerlei Dániel	11. 11. 10.	Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest Városmajori Gimnázium; Budapest Városmajori Gimnázium; Budapest	Ábrám László, Dr. Nagy Piroska Mária, Jáger Csaba	9	15	5	3	1	33	21	54
6.	Szalaiék	Papp Leila Ferenczi-Nagy András Horváth Vilmos	11. 12. 11.	Kecskeméti Katona József Gimnázium; Kecskemét	Szalai Péter	8	1	4	12	2	27	20	47
7.	Cipőfűzőleszorítópöcök	Bartucz Eszter Bianka Szepesi Zoltán László Balás Borbála	12. 10. 12.	Budapest V. kerületi Eötvös József Gimnázium; Budapest Budapest V. kerületi Eötvös József Gimnázium; Budapest Budai Ciszterci Szent Imre Gimnázium; Budapest	Sas Tamás, Feke Zsolt, Köszeghyné Keresztes Éva	7	2	11	2	3	25	18	43
8.	Cuncimókusok	Peiker Flóra Siska Máté Szolyák Balázs	12. 11. 12.	Földes Ferenc Gimnázium; Miskolc	Kovács Benedek	8	5	6	3	2	24	13	37
9.	Dormientes	Đurčovič Adam Poló Zsófia Žigo Boglárka	11. 11. 12.	Selye János Gimnázium; Révkomárom	Kustyán Marianna, Hevesi Anikó	6	3	4	6	0	19	17	36
10.	Féktelen Fizikusok	Szabó Máté Porhanda Réka Gálfi Benedek	12. 12. 11.	Kőbányai Szent László Gimnázium; Budapest	Sárkány Péter	8	0	6	3	5	22	3	25

A XVIII. Dürer Verseny (2024-2025) döntőjének eredményei - F+ kategória

Hely	Csapatnév	Tagok	Évf.	Iskola	Felkészítő tanárok	Kifejtős forduló						Mérési forduló	Össz
						1.	2.	3.	4.	5.	Σ		
1.	A kos	Bencz Benedek Vincze Csongor Tóth Kolos Barnabás	12. 12. 11.	Baár-Madas Református Gimnázium, Általános Iskola és Kollégium; Budapest Baár-Madas Református Gimnázium, Általános Iskola és Kollégium; Budapest Budapest V. kerületi Eötvös József Gimnázium; Budapest	Horváth Norbert, Varga Balázs	8	14	9	14	14	59	29	88
2.	Kiszámíthatatlan	Vincze-Pál András Elekes Panni Elekes Dorottya	11. 10. 12.	Budapest-Fasori Evangélikus Gimnázium; Budapest	Izsa Éva	10	13	9	0	1	33	28	61
3.	Herman A	Szabó Donát Ujpál Bálint Ivák László	12. 12. 10.	Miskolci Herman Ottó Gimnázium; Miskolc	Dudás Imre, Veres Pálné Kiss Jutka	3	8	9	2	6	28	28	56
4.	#XaE/+17fD	Erdélyi Kata Csilling Dániel Dulácska Dániel	12. 12. 11.	Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest	Schramek Anikó, Nagy Piroska Mária	7	9	9	2	0	27	26	53
5.	Hold my beer!	Palatinszky Ábel Szén Boldizsár Jávor Bence	11. 11. 12.	Városmajori Gimnázium; Budapest	Palkovics Péter, Jäger Csaba	5	9	9	1	0	24	12	36