XVIII. DÜRER VERSENY

KIADVÁNY | C, D, E, E+ kategóriák

XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Kifejtős feladatsor

C kategória

---

1. Dürerlandiát egyetlen folyó, az egyenes Düna vágja két részre. A folyó egyik oldalán csak nyomozók, a folyó másik oldalán csak bűnözők laknak. A nyomozók mindig igazat mondanak, a bűnözők mindig hazudnak. Anita, Áron, Beni, Dani, Gergő és Kartal, Dürerlandia hat lakója, éppen egy szabályos hatszög hat csúcsában laknak, ebben a sorrendben. Közülük öten az alábbi állításokat teszik:

- Anita: Dani nyomozó.
- Áron: Gergővel a Düna ugyanazon oldalán lakunk.
- Beni: Kartal bűnöző.
- Gergő: Áron és Dani a Düna különböző oldalán laknak.
- Dani: Kartallal a Düna ugyanazon oldalán lakunk.

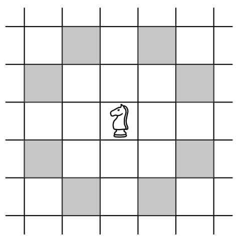
A hat lakó közül ki nyomozó és ki bűnöző? A megoldásotok során indokoljátok meg azt is, hogy miért nincs más lehetőség!

2. a) Máté egy 4×4-es táblázatba 12 nem feltétlenül különböző számot írt, minden mezőbe legfeljebb egy számot. Azt a feladatot adta Áronnak, hogy fejezze be szabályosan az általa elkezdett kitöltést bűnös négyzetté. Észrevették, hogy Áron ezt többféleképpen is meg tudja valósítani. Adjatok példát a Máté által készített táblázatra és annak többféle szabályos befejezésére!
b) Bizonyítsátok be, hogy ha Máté 13 számot írt volna a táblázatba, akkor mindenképp legfeljebb egy szabályos befejezés létezne!
Bűnös négyzet alatt azon 4×4-es táblázatokat értjük, melynek minden mezőjében pontosan egy szám áll, továbbá bármely sorában, oszlopában és a két nagy átlójában is ugyanaz a négy szám összege.

3. a) Anett, Andris, Kartal és Benedek kártyáznak. Négy különböző színű paklijuk van, mindegyik négy lapot tartalmaz, megszámozva 1-től 4-ig. Először összekeverik a 16 lapot, majd mind a négyen húznak négy lapot a kezükbe, amiket megmutatnak egymásnak. Ezután közösen eldöntik, hogy milyen sorrendben ülnek le körben, és azt is, hogy ki kezd. A játék folyamán a kör mentén óramutató járásával megegyező irányban sorban raknak le egy-egy lapot, de egy lapot csak akkor rakhatnak le, ha már minden nála kisebb számú, vele azonos színű le lett rakva. Akkor nyernek, ha az összes lapot lerakják. Ha valaki a sorra kerülésekor nem tud rakni és még van lap a kezében, veszítenek. Mutassatok olyan húzást, amelynél akárhogy is döntenek és játszanak, veszítenek!
b) Mutassátok meg, hogy ha mind a négy pakliból csak az 1-es és 2-es lapokkal játszanak, akkor mindig tudnak nyerni!

4. Az ABC háromszögben az AB oldal hossza 5 cm, a BC oldal hossza 4 cm, a CA oldal hossza 3 cm. Tükrözzük a C pontot a B csúcs belső szögfelezőjére, így kapjuk a D pontot. Tükrözzük a C pontot az AB oldalegyenesre, így kapjuk az E pontot. Határozzátok meg a DE szakasz hosszát!

5. a) Áron felírt egy hatjegyű számot a táblára. Ezután Máté megcserélheti a táblán lévő szám első jegyét a második jegyével. Ezután Benedek megcserélheti a táblán lévő szám harmadik jegyét a negyedikkel. Ezután Zsuzsi megcserélheti a táblán lévő szám ötödik jegyét a hatodikkal. Írhatott-e Áron olyan számot, hogy abból kiindulva nyolc, páronként különböző hatjegyű számot kaphatnak, melyek mindegyike osztható 7-tel?
b) Áron egy másik táblára is felírt egy hatjegyű számot. Ezután Domonkos letörölheti a szám első néhány, akár nulla, de legfeljebb öt jegyét, amiket aztán ugyanolyan sorrendben a szám végére kell írnia. Írhatott-e Áron olyan számot, hogy abból kiindulva hat, páronként különböző hatjegyű számot kaphat Domonkos, melyek mindegyike osztható 17-tel?
Egy hatjegyű szám első jegye nem lehet 0.



6. Játék: Egy 4×4-es tábla egyik mezőjén kezdetben egy huszár áll. Két játékos felváltva lép a huszárral. Nem szabad olyan mezőre lépni, amelyen korábban már járt a huszár, így a kezdőmezőre sem. Az veszít, aki nem tud lépni.
Az ábrán a szürke mezők mutatják, hogy hogyan lehet lépni egy huszárral.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a huszár kezdőmezőjének ismeretében, hogy kezdők szeretnétek lenni, vagy másodikok.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat sorszáma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 2 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.
A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:

a XVIII. Dürer Verseny szervezői

XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Kifejtős feladatsor

D kategória

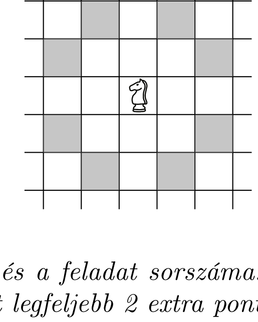
1. a) Máté egy 4×4-es táblázatba 12 nem feltétlenül különböző számot írt, minden mezőbe legfeljebb egy számot. Azt a feladatot adta Áronnak, hogy fejezze be szabályosan az általa elkezdett kitöltést bűnös négyzetté. Észrevették, hogy Áron ezt többféleképpen is meg tudja valósítani. Adjatok példát a Máté által készített táblázatra és annak többféle szabályos befejezésére!
b) Bizonyítsátok be, hogy ha Máté 13 számot írt volna a táblázatba, akkor mindenképp legfeljebb egy szabályos befejezés létezne!
Bűnös négyzet alatt azon 4×4-es táblázatokat értjük, melynek minden mezőjében pontosan egy szám áll, továbbá bármely sorában, oszlopában és a két nagy átlójában is ugyanaz a négy szám összege.

2. Egy pingpongbajnokságon 100 játékos vett részt, mindenki mindenkivel egy meccset játszott. A győzelem 1 pontot ért, a vereség 0-t. Tudjuk, hogy a bajnokság befejeztével bármely három résztvevőre igaz, hogy valamelyikük legyőzte a másik kettőt. Határozzátok meg a játékosok végső pontszámait!
Minden meccsnek egy győztese és egy vesztese lett, döntetlen nem született.

3. Az $ABCD$ paralelogrammában az AB oldal hossza 3 egység és a BC oldal hossza 2 egység. A CD oldal D-hez közelebbi harmadolópontja legyen E, továbbá a DA oldal felezőpontja legyen F. Az AC és BF egyenesek metszéspontját jelöljük G-vel.
a) Bizonyítsátok be, hogy az FEB szög derékszög!
b) Határozzátok meg az EG szakasz hosszát!

4. Egy kegyetlen király olyan börtönt építtetett, melyben a 36 cella egy 6×6-os négyzetrács alakban helyezkedik el és bármely két élszomszédos cella között fal található. Néhány cella már most is egy-egy rab kijelölt helye, de minden cella legfeljebb egy rabhoz tartozik. A király idővel arra jut, hogy túl kegyetlen a rabokkal, ezért lebontat néhány falat olyan módon, hogy bármelyik cellából bármelyik másikba el lehessen jutni. Azt viszont nem szeretné, hogy a rabok túl jól érezzék magukat, ezért bármely két, eredetileg egy sorban vagy oszlopban lévő rab között szeretne meghagyni legalább egy falat, hogy ne lássák egymást a kijelölt helyükről. Legfeljebb hány rabot tarthat fogva a király, ha a feltételeknek megfelelően le tud bontatni falakat?

5. a) Áron felírt egy hatjegyű számot a táblára. Ezután Máté megcserélheti a táblán lévő szám első jegyét a második jegyével. Ezután Benedek megcserélheti a táblán lévő szám harmadik jegyét a negyedikkel. Ezután Zsuzsi megcserélheti a táblán lévő szám ötödik jegyét a hatodikkal. Írhatott-e Áron olyan számot, hogy abból kiindulva nyolc, páronként különböző hatjegyű számot kaphatnak, melyek mindegyike osztható 7-tel?
b) Áron egy másik táblára is felírt egy hatjegyű számot. Ezután Domonkos letörölheti a szám első néhány, akár nulla, de legfeljebb öt jegyét, amiket aztán ugyanolyan sorrendben a szám végére kell írnia. Írhatott-e Áron olyan számot, hogy abból kiindulva hat, páronként különböző hatjegyű számot kaphat Domonkos, melyek mindegyike osztható 17-tel?
Egy hatjegyű szám első jegye nem lehet 0.



6. Játék: Egy 4×4-es tábla egyik mezőjén kezdetben egy huszár áll. Két játékos felváltva lép a huszárral. Nem szabad olyan mezőre lépni, amelyen korábban már járt a huszár, így a kezdőmezőre sem. Az veszít, aki nem tud lépni.
Az ábrán a szürke mezők mutatják, hogy hogyan lehet lépni egy huszárral.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a huszár kezdőmezőjének ismeretében, hogy kezdők szeretnétek lenni, vagy másodikok.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat sorszáma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 2 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.
A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:

a XVIII. Dürer Verseny szervezői

XVIII.
Dürer Verseny
Döntő (2025. 02. 07-09.)

Kifejtős feladatsor

E kategória

---

1. a) Anett, Andris, Kartal és Benedek kártyáznak. Négy különböző színű paklijuk van, mindegyik négy lapot tartalmaz, megszámozva 1-től 4-ig. Először összekeverik a 16 lapot, majd mind a négyen húznak négy lapot a kezükbe, amiket megmutatnak egymásnak. Ezután közösen eldöntik, hogy milyen sorrendben ülnek le körben, és azt is, hogy ki kezd. A játék folyamán a kör mentén óramutató járásával megegyező irányban sorban raknak le egy-egy lapot, de egy lapot csak akkor rakhatnak le, ha már minden nála kisebb számú, vele azonos színű le lett rakva. Akkor nyernek, ha az összes lapot lerakják. Ha valaki a sorra kerülésekor nem tud rakni és még van lap a kezében, veszítenek. Mutassatok olyan húzást, amelynél akárhogy is döntenek és játszanak, veszítenek!
b) Mutassátok meg, hogy ha mind a négy pakliból csak az 1-es és 2-es lapokkal játszanak, akkor mindig tudnak nyerni!
c) Ha mind a négy pakliból három lapot használnak, 1-től 3-ig számozva, akkor is tudnak mindig nyerni?

2. Legyen az ABC háromszög olyan, hogy $CAB\sphericalangle = CBA\sphericalangle = 72°$. A D pont az AC oldalon helyezkedik el úgy, hogy $DA = AB$ teljesül. A C-ből az ABD háromszög köréírt köréhez húzott érintők érintési pontjait jelölje E és F. Bizonyítsátok be, hogy az EF szakasz felezőpontja éppen az ABC háromszög köréírt körének középpontja!

3. a) Áron felírt egy hatjegyű számot a táblára. Ezután Máté megcserélheti a táblán lévő szám első jegyét a második jegyével. Ezután Benedek megcserélheti a táblán lévő szám harmadik jegyét a negyedikkel. Ezután Zsuzsi megcserélheti a táblán lévő szám ötödik jegyét a hatodikkal. Írhatott-e Áron olyan számot, hogy abból kiindulva nyolc, páronként különböző hatjegyű számot kaphatnak, melyek mindegyike osztható 7-tel?
b) Áron egy másik táblára is felírt egy hatjegyű számot. Ezután Domonkos letörölheti a szám első néhány, akár nulla, de legfeljebb öt jegyét, amiket aztán ugyanolyan sorrendben a szám végére kell írnia. Írhatott-e Áron olyan számot, hogy abból kiindulva hat, páronként különböző hatjegyű számot kaphat Domonkos, melyek mindegyike osztható 17-tel?
Egy hatjegyű szám első jegye nem lehet 0.

4. Geronimo gondolt egy egész együtthatós P polinomra. Ezt szeretné kitalálni Thea, aki ehhez minden percben kérdezhet Geronimotól egy q racionális számot, amire Geronimo rögtön elmondja Theanak $P(q)$ értékét.
a) Van-e olyan P polinom, amelyre létezik Theanak véges sok olyan kérdése, amikből együtt ki tudja találni P-t?
b) Geronimo elárulta Theanak, hogy P foka 2025 és főegyütthatója 1. Bizonyítsátok be, hogy semmilyen ilyen P-re nem létezik 2024 olyan kérdése Theanak, amikből együtt ki tudja találni P-t!
Egy 2025-ödfokú $P(x) = a_{2025}x^{2025} + a_{2024}x^{2024} + \ldots + a_1x + a_0$ polinom együtthatói az $a_{2025}, \ldots, a_0$ számok, főegyütthatója a_{2025}. Thea akkor tudja kitalálni a P polinomot, ha az általa ismert információknak az egész együtthatós polinomok közül csak P felel meg.

5. Megadható-e végtelen sok általános helyzetű egyenes a síkon úgy, hogy az egyenesek által meghatározott metszéspontok minden egyenestől egész távolságra legyenek?
Egyenesek egy halmaza általános helyzetű, ha semelyik kettő nem párhuzamos, és semelyik három nem megy át egy ponton.

6. Játék: Kezdetben egy pozitív egészekből álló (n, k) rendezett számpár van felírva egy lapra. Két játékos felváltva lép, ha a nem áthúzott (a, b) számpár szerepel a lapon, a soron lévő játékosnak egy lépésben át kell húznia (a, b)-t és helyette felírnia vagy az $(a, b + 1)$, vagy az $(a - b, b)$ számpárt. Az nyer, aki először ír fel olyan számpárt, amelyben nem mindkét szám pozitív.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el n és k ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat sorszáma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 2 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.
A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:

a XVIII. Dürer Verseny szervezői

XVIII.
Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Kifejtős feladatsor

E+ kategória

---

1. Legyen az ABC háromszög olyan, hogy $CAB\sphericalangle = CBA\sphericalangle = 72°$. A D pont az AC oldalon helyezkedik el úgy, hogy $DA = AB$ teljesül. A C-ből az ABD háromszög köréírt köréhez húzott érintők érintési pontjait jelölje E és F. Bizonyítsátok be, hogy az EF szakasz felezőpontja éppen az ABC háromszög köréírt körének középpontja!

2. Geronimo gondolt egy egész együtthatós P polinomra. Ezt szeretné kitalálni Thea, aki ehhez minden percben kérdezhet Geronimotól egy q racionális számot, amire Geronimo rögtön elmondja Theanak $P(q)$ értékét.
a) Van-e olyan P polinom, amelyre létezik Theanak véges sok olyan kérdése, amikből együtt ki tudja találni P-t?
b) Geronimo elárulta Theanak, hogy P főegyütthatója 1. Bizonyítsátok be, hogy minden ilyen P-re létezik véges sok olyan kérdése Theanak, amikből együtt ki tudja találni P-t! Határozzátok meg P függvényében, hogy ehhez legkevesebb hány kérdésre van szüksége Theanak!
Thea akkor tudja kitalálni a P polinomot, ha az általa ismert információknak az egész együtthatós polinomok közül csak P felel meg.

3. a) Igaz-e, hogy tetszőleges pozitív egész N esetén megadható N darab általános helyzetű egyenes a síkon úgy, hogy az egyenesek által meghatározott metszéspontok minden egyenestől egész távolságra legyenek?
b) Megadható-e végtelen sok ilyen tulajdonságú, általános helyzetű egyenes?
Egyenesek egy halmaza általános helyzetű, ha semelyik kettő nem párhuzamos, és semelyik három nem megy át egy ponton.

4. Legyen S a pozitív egészeknek egy nemüres véges részhalmaza, és legyen G egy n csúcsú összefüggő fagráf. Bármely u, v csúcsokra jelölje $d(u, v)$ a két csúcs gráfelméleti távolságát, azaz az u, v csúcsokat összekötő egyértelmű út éleinek számát. Hívjuk *felderítésnek* azon $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}$ csúcssorozatokat, melyekre $v_1 = v_{n+1}$, a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsok páronként különbözők és bármely $1 \le i \le n$-re a $d(v_i, v_{i+1})$ távolság S-beli. Egy felderítés *sikeres*, ha a $d(v_1, v_2), d(v_2, v_3), \ldots, d(v_n, v_{n+1})$ számok között minden $s \in S$ szám ugyanannyiszor szerepel. Mely S halmazok esetén létezik olyan G véges, legalább két csúcsú összefüggő fagráf, amely sikeresen felderíthető?

5. Egy pozitív egész k számot *kriminálisnak* nevezünk, ha léteznek olyan különböző m, n pozitív egészek, melyre a k számnak az m-es és n-es számrendszerbeli felírása is kétjegyű, méghozzá ugyanabból a két számjegyből állnak, csak fordított sorrendben. Bizonyítsátok be, hogy létezik olyan K pozitív egész, hogy minden $k \ge K$ egész kriminális!
A pozitív egész b, k számokra k-nak a b-s számrendszerbeli felírása az a $(b_d, b_{d-1}, \ldots, b_1, b_0)$ egészekből álló rendezett számsor, amelyben $0 \le b_i < b$ minden $i < d$-re és $0 < b_d < b$, illetve amelyre $k = b_d \cdot b^d + b_{d-1} \cdot b^{d-1} + \ldots + b_1 \cdot b + b_0$. Ilyenkor $(b_d, b_{d-1}, \ldots, b_1, b_0)$ a számjegyek, és a számjegyek száma $d + 1$. Például a 7-nek a 3-as számrendszerbeli felírása $(2, 1)$, míg az 5-ös számrendszerbeli felírása $(1, 2)$, így a 7 kriminális.

6. Játék: Kezdetben egy pozitív egészekből álló (n, k) rendezett számpár van felírva egy lapra. Két játékos felváltva lép, ha a nem áthúzott (a, b) számpár szerepel a lapon, a soron lévő játékosnak egy lépésben át kell húznia (a, b)-t és helyette felírnia vagy az $(a, b + 1)$, vagy az $(a - b, b)$ számpárt. Az nyer, aki először ír fel olyan számpárt, amelyben nem mindkét szám pozitív.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el n és k ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Mindegyik megoldást külön lapra írjátok, amelyen szerepeljen a csapat neve, kategóriája, és a feladat sorszáma. Mindegyik feladat olvasható és megfelelően indokolt megoldása 12 pontot ér. Feladatonként legfeljebb 2 extra pont is szerezhető lényegesen különböző második megoldással vagy általánosítással.
A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánnak:

a XVIII. Dürer Verseny szervezői

XVIII.
Dürer Verseny
Döntő (2025. 02. 07-09.)

Kifejtős megoldókulcs

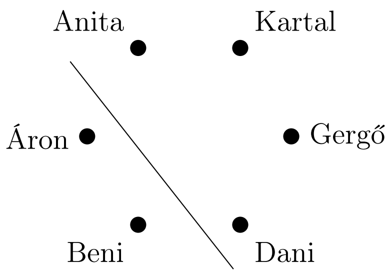
C kategória

C1. Dürerlandiát egyetlen folyó, az egyenes Düna vágja két részre. A folyó egyik oldalán csak nyomozók, a folyó másik oldalán csak bűnözők laknak. A nyomozók mindig igazat mondanak, a bűnözők mindig hazudnak. Anita, Áron, Beni, Dani, Gergő és Kartal, Dürerlandia hat lakója, éppen egy szabályos hatszög hat csúcsában laknak, ebben a sorrendben. Közülük öten az alábbi állításokat teszik:

- Anita: Dani nyomozó.
- Áron: Gergővel a Düna ugyanazon oldalán lakunk.
- Beni: Kartal bűnöző.
- Gergő: Áron és Dani a Düna különböző oldalán laknak.
- Dani: Kartallal a Düna ugyanazon oldalán lakunk.

A hat lakó közül ki nyomozó és ki bűnöző? A megoldásotok során indokoljátok meg azt is, hogy miért nincs más lehetőség!
Szűcs Gábor feladata

Megoldás:



Ha Dani nyomozó, akkor igazat mond, így Kartal vele azonos oldalon lakik, így nyomozó. Ha Dani bűnöző, akkor hazudik, tehát Kartal vele ellentétes oldalon lakik, így nyomozó. Tehát Kartal biztosan nyomozó. Ekkor viszont Beni hazudik, így Beni bűnöző.

Ha Áron nyomozó, akkor igazat mond, így Gergő vele azonos oldalon lakik, így nyomozó. Ha Áron bűnöző, akkor hazudik, tehát Gergő vele ellentétes oldalon lakik, így nyomozó. Tehát Gergő biztosan nyomozó.

Gergő igazat mond, tehát Áron és Dani a Düna két különböző oldalán lakik. Ha Dani bűnöző, akkor Áron nyomozó, ekkor viszont mivel a Düna egyenes, így a bűnözők partján csak Beni és Dani lakhat, így Anita nyomozó. Viszont Anita így igazat mond, de Dani nem nyomozó, azaz ez az eset nem lehetséges.

Ha Dani nyomozó, akkor Áron bűnöző, és Anita igazat mond, tehát ő is nyomozó. Ekkor Áron és Beni bűnözők, a többiek nyomozók, és ez lehetséges is, ha a Düna Anita és Áron, valamint Beni és Dani között folyik keresztül.

C2. **a)** Máté egy 4×4-es táblázatba 12 nem feltétlenül különböző számot írt, minden mezőbe legfeljebb egy számot. Azt a feladatot adta Áronnak, hogy fejezze be szabályosan az általa elkezdett kitöltést bűnös négyzetté. Észrevették, hogy Áron ezt többféleképpen is meg tudja valósítani. Adjatok példát a Máté által készített táblázatra és annak többféle szabályos befejezésére!
b) Bizonyítsátok be, hogy ha Máté 13 számot írt volna a táblázatba, akkor mindenképp legfeljebb egy szabályos befejezés létezne!
Bűnös négyzet alatt azon 4×4-es táblázatokat értjük, melynek minden mezőjében pontosan egy szám áll, továbbá bármely sorában, oszlopában és a két nagy átlójában is ugyanaz a négy szám összege.
Dürer Matekest feladat

Megoldás: a)

Máté táblázata:

2	2	2	2
	2	2	
	2	2	
2	2	2	2

Egy lehetséges befejezés:

2	2	2	2
3	2	2	1
1	2	2	3
2	2	2	2

Egy másik befejezés:

2	2	2	2
1	2	2	3
3	2	2	1
2	2	2	2

b) Mivel Máté már 13 mezőt kitöltött, így van olyan oszlop, amelynek minden mezőjében már áll szám. Ugyanis ha minden oszlopból legfeljebb 3 mező lenne kitöltve, akkor összesen csak legfeljebb

$4 \cdot 3 = 12$ kitöltött mező lehetne. Azaz ebből az oszlopból már meg tudja határozni, hogy mennyi lehet a sorok és az oszlopok összege egy szabályos befejezett kitöltésben.

Ekkor viszont egy üres mezőt csak akkor nem tud Áron egyértelműen kitölteni, ha a sorában és az oszlopában is van még rajta kívül üres mező. Hiszen ha például egy sorban csak egy üres mező lenne, akkor azt ki lehetne tölteni úgy, hogy a már meghatározott sorösszegből kivonjuk a sorban lévő három számot.

Ha valamikor két különböző összeg keletkezik, csak az előbbiekben leírt típusú lépések után, vagy valahová kétféle számot kellene írni, mert a sorában, oszlopában, vagy nagyátlójában kétféle a maradék 3 szám összege, akkor az igazolja, hogy nem lehet szabályosan befejezni a kitöltést, így ez az eset nem lehetséges.

Tegyük fel, hogy Áron kitöltött mindent, amit egyértelműen ki tudott tölteni, és még többféleképpen is szabályosan befejezhető a táblázat. Ekkor még biztosan van kitöltetlen mező. Ezt nem tudta egyértelműen kitölteni, így a sorában van még legalább egy üres mező. Ezt a két mezőt szintén nem tudta még egyértelműen kitölteni a feltevésünk szerint, azaz mindkettő oszlopában van rajta kívül üres mező. Ezek a mezők különbözők, így legalább 4 kitöltetlen mező van, ami ellentmondás. Azaz nem fejezhető be többféleképpen szabályosan bűnös négyzetté a táblázat.

C3. **a)** Anett, Andris, Kartal és Benedek kártyáznak. Négy különböző színű paklijuk van, mindegyik négy lapot tartalmaz, megszámozva 1-től 4-ig. Először összekeverik a 16 lapot, majd mind a négyen húznak négy lapot a kezükbe, amiket megmutatnak egymásnak. Ezután közösen eldöntik, hogy milyen sorrendben ülnek le körben, és azt is, hogy ki kezd. A játék folyamán a kör mentén óramutató járásával megegyező irányban sorban raknak le egy-egy lapot, de egy lapot csak akkor rakhatnak le, ha már minden nála kisebb számú, vele azonos színű le lett rakva. Akkor nyernek, ha az összes lapot lerakják. Ha valaki a sorra kerülésekor nem tud rakni és még van lap a kezében, veszítenek. Mutassatok olyan húzást, amelynél akárhogy is döntenek és játszanak, veszítenek!
b) Mutassátok meg, hogy ha mind a négy pakliból csak az 1-es és 2-es lapokkal játszanak, akkor mindig tudnak nyerni!
Kocsis Anett feladata

Megoldás: **a)** Jelöljük a négy színt A-val, B-vel, C-vel és D-vel, továbbá innentől a kártyalapokat úgy fogjuk jelölni, hogy a színük mögé írjuk a számukat (például a C színű 3-as számú lapra innentől $C3$-ként fogunk hivatkozni).

Legyenek Anett lapjai $A1, A2, B1$ és $B2$, Andris lapjai $C1, C2, D1$ és $D2$, Kartal lapjai $A3, A4, B3$ és $B4$, továbbá Benedek lapjai $C3, C4, D3$ és $D4$. Ekkor ahhoz, hogy Kartal le tudjon rakni egy lapot az első körben, az kell, hogy vagy a $A1$ és $A2$ is le legyen már rakva, vagy pedig $B1$ és $B2$ is (hiszen $A3$ és $A4$ lerakásának előfeltétele $A2$ lerakása, $B3$ és $B4$ lerakásának pedig $B2$ lerakása). Viszont mivel $A1$ és $A2$, illetve $B1$ és $B2$ is Anett kezében van, és mivel Anett legfeljebb egyszer kerülhet sorra Kartal előtt, nem lehet egyik lappár sem lerakva, mielőtt Kartal sorra kerül, így legkésőbb Kartal sorra kerülésekor veszíteni fognak ebben az osztásban.

b) Vegyük észre, hogy ha az összes 1-es le lett már rakva, akkor akármelyik lap lerakható.

Ha mind a négy embernek van 1-es kártyája, akkor azt le tudja rakni mindegyikük az első körben és a második körben utána a 2-est.

Ha csak három embernek van 1-es kártyája, akkor pontosan az egyikőjüknél két 1-es van és pontosan az egyiküknél két 2-es. Ekkor, ha a két 1-essel rendelkező kezdi a kört, majd utána az egy 1-essel rendelkezők lerakják a saját 1-esüket, akkor az utolsó ember valamelyik 2-esének színéből már biztosan szerepelt az 1-es korábban, így azt a lapját ki tudja rakni. Ezután ismét az a játékos jön, akinek eredetileg két 1-ese volt és miután a másikat lerakja, már az összes 1-es le lesz rakva, azaz a többiek már be tudják fejezni a kört.

Ha csak két embernek van 1-es kártyája, akkor a másik két ember két-két 2-essel rendelkezik. Kezdjen ebben az esetben az a két játékos, akinek csak 1-ese van. Miután az első játékos kijátszott egy 1-est, valamelyik csupa 2-esel rendelkező játékos már biztosan ki tudja játszani a 2-esét abból a színből. Ezután a másodikként sorra kerülő játékos biztosan tud úgy lerakni egy 1-est, hogy arra utána a másik kizárólag 2-essel rendelkező játékos is le tudja már rakni valamelyik 2-esét. Így az első körben még nem veszítenek, a második pedig azzal kezdődik, hogy az első két játékos lerakja a megmaradó 1-eseit, tehát azt a kört is biztosan be tudják fejezni.

Az nem lehetséges, hogy kettőnél kevesebb ember rendelkezik 1-es kártyával, tehát a feladat állítását bebizonyítottuk.

C4. Az ABC háromszögben az AB oldal hossza 5 cm, a BC oldal hossza 4 cm, a CA oldal hossza 3 cm. Tükrözzük a C pontot a B csúcs belső szögfelezőjére, így kapjuk a D pontot. Tükrözzük a C pontot az AB oldalegyenesre, így kapjuk az E pontot. Határozzátok meg a DE szakasz hosszát!
Takács Tamás és Hegedűs Dániel feladata

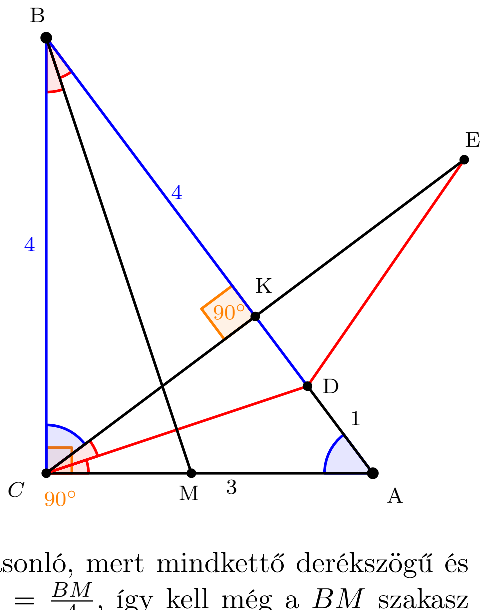
1. Megoldás:

Használjuk a lenti ábra jelöléseit. Vegyük észre, hogy CK az ABC háromszögnek az AB oldalához tartozó magassága. A háromszög területét így kétféleképp felírva a következőt kapjuk: $\frac{BC \cdot AC}{2} = \frac{AB \cdot CK}{2}$, így $CK = \frac{12}{5}$, valamint a tükrözés miatt $KE = CK = \frac{12}{5}$. A CKB háromszög derékszögű, így a Pitagorasz-tételt felírva rá megkapjuk, hogy $BK^2 + CK^2 = BC^2$, így $BK = \frac{16}{5}$. Tudjuk továbbá, hogy D az AB oldalra esik és $BD = BC = 4$, hiszen D-t a B csúcs szögfelezőjére tükrözve kaptuk. Ekkor $KD = BD - BK = 4 - \frac{16}{5} = \frac{4}{5}$. Ekkor viszont az EKD háromszög derékszögű, így felírhatjuk rá a Pitagorasz-tételt: $DE^2 = KD^2 + KE^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{32}{5}$, így $DE = \sqrt{\frac{32}{5}}$ cm $= \frac{4\sqrt{10}}{5}$ cm.

2. Megoldás:

Használjuk az ábra jelöléseit. Mivel a háromszög három oldalaira $3^2 + 4^2 = 5^2$, ezért a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt $ACB\sphericalangle = 90°$. Mivel a B belső szögfelezőjére tükröztük C-t, így D az AB oldalra esik. Mivel a tükrözés távolságtartó, így a DE szakasz hossza azonos a CD szakasz hosszával. Sőt $DEK\triangle$ egybevágó $DCK\triangle$-gel. Továbbá $BCK\triangle$ hasonló $ABC\triangle$-höz, mert a tükrözés miatt $BKC\sphericalangle = 90° = ACB\sphericalangle$, így a B-nél lévő szög azonos, vagyis két-két szögük megegyezik. Ebből $\frac{CK}{BC} = \frac{CK}{4} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$, tehát $CK = \frac{12}{5}$.

Ismét a tükrözés távolságtartása miatt $BC = BD$, így $BCD\triangle$ egyenlőszárú és $BCD\sphericalangle = \frac{180° - ABC\sphericalangle}{2}$. Utóbbiból és az $ABC\sphericalangle + BAC\sphericalangle = 90°$ egyenlőségből: $DCK\sphericalangle = BCD\sphericalangle - BCK\sphericalangle = 90° - \frac{ABC\sphericalangle}{2} - BAC\sphericalangle = 90° - \frac{ABC\sphericalangle + 2 \cdot BAC\sphericalangle}{2} = 90° - \frac{90° + BAC\sphericalangle}{2} = \frac{90° - BAC\sphericalangle}{2} = \frac{ABC\sphericalangle}{2}$. $(*)$
Ugyanakkor $ACD\sphericalangle = 90° - BCD\sphericalangle = \frac{ABC\sphericalangle}{2}$, tehát az $ACK\triangle$-ben CD szögfelező és a háromszög szögei páronként megegyeznek $ABC\triangle$ szögeivel, így hasonló a két háromszög. Ebből következik, hogy $\frac{AK}{AC} = \frac{AK}{3} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$, vagyis $AK = \frac{9}{5}$, valamint $AD = AB - BD = AB - BC = 5 - 4 = 1$, ezért $DK = AK - AD = \frac{4}{5}$. Mivel $CDK\triangle$ derékszögű, ezért a Pitagorasz-tétel miatt $CD^2 = CK^2 + DK^2 = \frac{144}{25} + \frac{16}{25} = \frac{160}{25} = 10 \cdot \frac{16}{25}$. Tehát a válasz $DE = CD = \sqrt{10} \cdot \frac{4}{5}$ cm.



3. Megoldás, szögfelező-tétellel

$(*)$-tól folytatva: Vegyük észre, hogy $CDK\triangle$ és $BCM\triangle$ hasonló, mert mindkettő derékszögű és $DCK\sphericalangle = CBM\sphericalangle$. Ebből következik, hogy $\frac{CD}{CK} = \frac{CD \cdot 5}{12} = \frac{BM}{BC} = \frac{BM}{4}$, így kell még a BM szakasz hossza. A szögfelező-tétel miatt $\frac{BC}{AB} = \frac{CM}{AM}$, amiből $CM = \frac{4}{5} \cdot AM$, valamint $CM + AM = \left(\frac{4}{5} + 1\right) \cdot AM = \frac{9}{5} \cdot AM = AC = 3$, így $AM = \frac{5}{3}$ és $CM = \frac{4}{3}$. A $BCM\triangle$-re Pitagorasz-tételt alkalmazva kapjuk, hogy $BM^2 = BC^2 + CM^2 = 16 + \frac{16}{9} = \frac{16 \cdot 10}{9}$, tehát $BM = \frac{4 \cdot \sqrt{10}}{3}$. Ekkor tehát a válasz: $DE = CD = \frac{BM \cdot 12}{4 \cdot 5} = \frac{4\sqrt{10} \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{4 \cdot \sqrt{10}}{5}$ cm.

C5. **a)** Áron felírt egy hatjegyű számot a táblára. Ezután Máté megcserélheti a táblán lévő szám első jegyét a második jegyével. Ezután Benedek megcserélheti a táblán lévő szám harmadik jegyét a negyedikkel. Ezután Zsuzsi megcserélheti a táblán lévő szám ötödik jegyét a hatodikkal. Írhatott-e Áron olyan számot, hogy abból kiindulva nyolc, páronként különböző hatjegyű számot kaphatnak, melyek mindegyike osztható 7-tel?
b) Áron egy másik táblára is felírt egy hatjegyű számot. Ezután Domonkos letörölheti a szám első néhány, akár nulla, de legfeljebb öt jegyét, amiket aztán ugyanolyan sorrendben a szám végére kell írnia. Írhatott-e Áron olyan számot, hogy abból kiindulva hat, páronként különböző hatjegyű számot kaphat Domonkos, melyek mindegyike osztható 17-tel?
Egy hatjegyű szám első jegye nem lehet 0.
Dürer Matekest feladat

Megoldás: **a)** Igen, Áron írhatott ilyen számot.

Jelöljük a hatjegyű számot, és a megcserélhető számpárokat így:

$$\overline{abcdef}; \quad (a;b); \quad (c;d); \quad (e;f)$$

Ahhoz, hogy nyolc különböző, hatjegyű számot képezhessünk, a számpároknak két-két különböző számjegyet kell tartalmaznia, valamint az $(a;b)$ számpár nem tartalmazhatja a 0 számjegyet.

Képezzünk két olyan számot, melyek az utolsó számpár számjegyeinek felcserélésével egymásba alakíthatóak. Írjuk fel a számokat helyiérték szerint!

$$100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + 1f$$
$$100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10f + 1e$$

Az összegek 7-es osztási maradéka a tagok maradékainak összege. Ha a két, 7-tel osztható összeget kivonjuk egymásból, akkor egy 7-tel osztható számot kapunk. Mivel a különbség $9e - 9f$, és a 7 és a 9 relatív prímek, így a megcserélt $(e;f)$ számpár két tagjának 7-es maradéka azonos, különben nem lehetne a különbség 7-tel osztható.

Azaz olyan számpárokat használhatunk, ahol a különbség 7 lesz csere esetén, és ez ugyanígy megmutatható az $(a;b)$ és $(c;d)$ számpárokra is. Ezek csak a $(0;7)$, $(1;8)$ és $(2;9)$ számpárok. Nézzük meg, hogy számpárok mennyit adnak a hatjegyű szám 7-es maradékához, ha az egyes helyiértékpárokon szerepelnek:

	$(a;b)$	$(c;d)$	$(e;f)$
$(0;7)$	0	0	0
$(1;8)$	2	1	4
$(2;9)$	4	2	1

Mivel a számok 7-tel oszthatók, a számpárok maradékainak összege a 7-nek egy többszöröse. Ez a táblázatból kiolvasható módon csak úgy valósítható meg, ha a három számpár:

$$(0;7),(0;7),(0;7) \quad \text{vagy} \quad (1;8),(1;8),(1;8) \quad \text{vagy} \quad (2;9),(2;9),(2;9).$$

Ezek közül azonban a $(0;7)$ párt nem használhatjuk fel az első helyen, mivel nem hatjegyű számot is eredményez.

Tehát például az 181818, vagy a 292929 szám megfelel a feltételeknek.

b) Nem, Áron nem írhatott ilyen számot.

Tegyük fel, hogy van ilyen 17-tel osztható szám! Írjuk fel ezt a számot, valamint azt a számot, amit az első számjegy letörlésével, majd a szám végére írásával kapunk, helyiérték szerinti összegben!

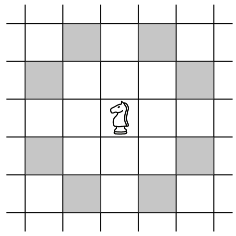
$$x_0 = 100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + 1f$$
$$x_1 = 100000b + 10000c + 1000d + 100e + 10f + 1a$$

Jelöljük a $10000b + 1000c + 100d + 10e + 1f$ összeget S-el! Ekkor a két szám:

$$x_0 = 10^5 a + S$$
$$x_1 = 10S + 1a$$

Ha x_0-t megszorozzuk 10-el, akkor $10x_0 = 10^6 a + 10S$. Ekkor $10x_0 - x_1 = (10^6 - 1)a$. Mivel x_0 és x_1 a feltételezésünk szerint osztható 17-tel, így a $10x_0 - x_1$ különbség is osztható 17-tel.

Ekkor $(10^6 - 1) = 999999 = 999 \cdot 1001 = 9 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Mivel a 17 nem szerepel a prímtényezős felbontásban, ezért a $(10^6 - 1)a$ szorzat akkor és csak akkor lehet 17-tel osztható, ha a osztható 17-tel. Mivel a egy 1 és 9 közé eső számjegy, ez ellentmondás. Tehát nem létezhet a feladatnak megfelelő x_0 szám.

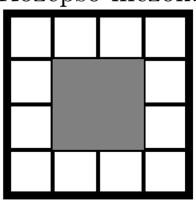


C6. Játék: Egy 4×4-es tábla egyik mezőjén kezdetben egy huszár áll. Két játékos felváltva lép a huszárral. Nem szabad olyan mezőre lépni, amelyen korábban már járt a huszár, így a kezdőmezőre sem. Az veszít, aki nem tud lépni.
Az ábrán a szürke mezők mutatják, hogy hogyan lehet lépni egy huszárral.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a huszár kezdőmezőjének ismeretében, hogy kezdők szeretnétek lenni, vagy másodikok.

Hegedűs Dániel feladata

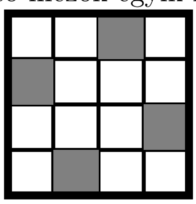
Megoldás: A stratégia szempontjából a táblát 4 fajta mezőre bontjuk:

Középső mezők:

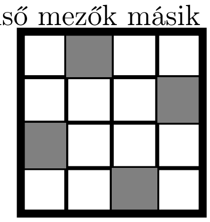


Sarokmezők:

Szélső mezők egyik köre:

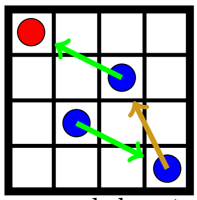


Szélső mezők másik köre:



Szimmetria miatt csak 3 különböző kezdőmező esetét kell megnéznünk.

1. eset: A huszár a négy középső mező egyikéről indul.

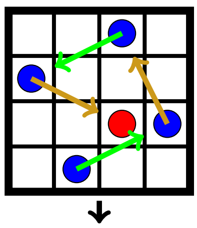


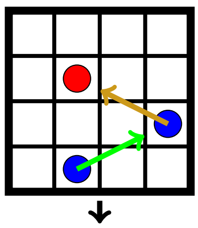
Ilyenkor a kezdőjátékos könnyen tud nyerni. A kezdőjátékos először belép a sarokba, ezután a második játékosnak csak 1 lehetséges lépése van az ábrán látható módon. Ezt követően a kezdőjátékos belép a szemközti sarokba, és nyer.

A táblázat szélén, de nem a sarokban lévő mezőket a fenti felosztásnál úgy osztottuk ketté, hogy a 4-4 mezőn körbe tud ugrálni a huszár. A következő két esetben a nyerő stratégia olyan lesz, hogy a győztes játékos sose hagy el egy ilyen kört, hanem továbbugrik körbe.

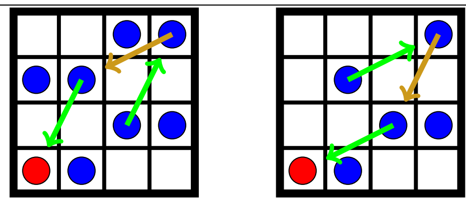
2. eset: A huszár egy szélső, de nem sarokmezőről indul.

Ilyenkor is a kezdőjátékos tud nyerni. A fent leírtaknak megfelelően kezdjen a körön körbemenni, a második játékosnak az első vagy a második lépésében be kell lépni egy középső mezőre. A két lehetséges állás a jobb oldalon látható.





Bármelyik eset is áll fenn, a kezdőjátékos az előző esethez hasonlóan beugrik egy sarokba, majd onnan a második játékosnak csak egy lehetősége van, innen a kezdőjátékos a szemközti sarokba lépve nyer.

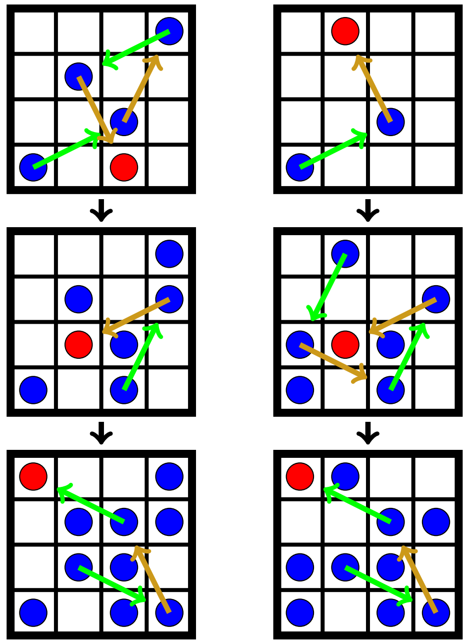


3. eset: A huszár egy sarokmezőről indul.

Ilyenkor is a kezdőjátékos nyer. Az első lépésben belép középre. A második játékos vagy a sarokba lép, ilyenkor egyértelmű a folytatás, vagy egy szélső, de nem sarokmezőre. Ezek után a második játékos egy szélső, de nem sarokmezőre kell, hogy lépjen, innen az első játékos ismét elindul körbe.

Az előző esethez hasonlóan az első játékos a kör mentén lép addig, ameddig a második játékos belép egy középső mezőre.

Végül ismét belép az első játékos az egyik sarokba, a második játékos egyértelmű lépése után pedig a szemközti sarokba lépve nyer.



D1. **a)** Máté egy 4×4-es táblázatba 12 nem feltétlenül különböző számot írt, minden mezőbe legfeljebb egy számot. Azt a feladatot adta Áronnak, hogy fejezze be szabályosan az általa elkezdett kitöltést bűnös négyzetté. Észrevették, hogy Áron ezt többféleképpen is meg tudja valósítani. Adjatok példát a Máté által készített táblázatra és annak többféle szabályos befejezésére!

b) Bizonyítsátok be, hogy ha Máté 13 számot írt volna a táblázatba, akkor mindenképp legfeljebb egy szabályos befejezés létezne!

Bűnös négyzet alatt azon 4×4-es táblázatokat értjük, melynek minden mezőjében pontosan egy szám áll, továbbá bármely sorában, oszlopában és a két nagy átlójában is ugyanaz a négy szám összege.

Dürer Matekest feladat

Megoldás: Lásd a C2 feladat megoldását.

D2. Egy pingpongbajnokságon 100 játékos vett részt, mindenki mindenkivel egy meccset játszott. A győzelem 1 pontot ért, a vereség 0-t. Tudjuk, hogy a bajnokság befejeztével bármely három résztvevőre igaz, hogy valamelyikük legyőzte a másik kettőt. Határozzátok meg a játékosok végső pontszámait!

Minden meccsnek egy győztese és egy vesztese lett, döntetlen nem született.

Hegedűs Dániel feladata

1. Megoldás:

Tegyük fel, hogy van két olyan résztvevő, A és B, akiknek azonos a pontszáma, ez legyen x. Feltehetjük továbbá az általánosság megszorítása nélkül, hogy B legyőzte A-t. Ekkor B további $x-1$ embert győzött le, A pedig további x-et. Ekkor skatulyaelv alapján biztosan lesz olyan játékos, nevezzük C-nek, akit A legyőzött, de B nem.

Vegyük ekkor az A, B és C játékosokat és vizsgáljuk meg a közöttük zajló meccseket. B legyőzte A-t, A legyőzte C-t, míg C pedig nyert B ellen. Tehát találtunk 3 olyan embert, ahol nincs senki, aki legyőzte volna a másik kettőt, ami ellentmondás.

Így nem lehet kettő játékosnak azonos a pontszáma. Egy játékos pontszáma 0 és 99 között bármilyen egész szám lehet. Ez éppen 100 darab szám, tehát mindegyik szám valamely csapatnak a végső pontszáma: $0, 1, 2, \ldots, 99$. Ez lehetséges is, ha a játékosokat sorba állítjuk, és mindenki legyőzte a mögötte állókat. Ekkor bármely három játékos közül a legelöl álló legyőzte a másik kettőt.

2. Megoldás:

Indukcióval bizonyítjuk azt, hogy tetszőleges játékosszámú bajnokságban van olyan játékos, aki mindenki mást legyőzött. 3 játékos esetén a feladat feltételei miatt az egyik játékos biztosan megverte a másik kettőt, így ekkor igazoltuk az állítást. Most tegyük fel, hogy az állítást már beláttuk k játékosból álló bajnokságra.

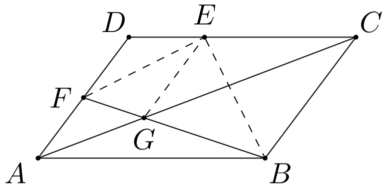
Most bizonyítsuk az állítást $k+1$ játékos esetén. Jelöljük az egyik játékost A-val. Az A-n kívüli k játékos közt is mindenki játszott mindenkivel pontosan egyszer, így az indukció miatt csak őket nézve létezik egy B játékos, aki mindenki mást megvert köztük. Vizsgáljuk az A és B játékos közti meccs eredményét. Ha B megverte A-t, akkor B mindenkit legyőzött, így igazoltuk az állítást. Ha pedig A verte meg B-t, akkor a feladat feltételei miatt tetszőleges másik C játékost is meg kellett, hogy verjen A, hiszen B legyőzte C-t és A legyőzte B-t. Így ez esetben A az a játékos, aki mindenki mást legyőzött. Indukcióval beláttuk, hogy van a bajnokságban olyan játékos, aki mindenki mást legyőzött.

Tekintsük most a 100 fős pingpongbajnokságot. Az állításunkat felhasználva létezik játékos, aki mindenki mást legyőzött, így neki 99 pontja lett. Csak a maradék 99 játékost tekintve köztük szintén lesz valaki, aki mindenki mást legyőzött, az előbb látott állítás miatt. Így neki 98 pontja lett. Őt is kivéve, hasonlóan haladva a végső pontszámok: 99, 98, ..., 1 és 0.

Ez lehetséges is, ha a játékosokat sorba állítjuk, és mindenki legyőzte a mögötte állókat. Ekkor bármely három játékos közül a legelöl álló legyőzte a másik kettőt. Valójában a megoldás során beláttuk, hogy minden a feladat feltételeinek megfelelő bajnokságban a játékosok sorbaállíthatóak ilyen módon.

D3. Az $ABCD$ paralelogrammában az AB oldal hossza 3 egység és a BC oldal hossza 2 egység. A CD oldal D-hez közelebbi harmadolópontja legyen E, továbbá a DA oldal felezőpontja legyen F. Az AC és BF egyenesek metszéspontját jelöljük G-vel.
a) Bizonyítsátok be, hogy az FEB szög derékszög!
b) Határozzátok meg az EG szakasz hosszát!
Osztényi József feladata

Megoldás:



a) Legyen $DAB\sphericalangle = BCD\sphericalangle = \alpha$. Ekkor $ABC\sphericalangle = CDA\sphericalangle = 180° - \alpha$.

Mivel E a CD szakasz D-hez közelebbi harmadolópontja, ezért $CE = 2$, $DE = 1$. Mivel F az AD oldal felezőpontja, ezért $DF = 1$.

Ebből kapjuk, hogy a BCE háromszög egyenlő szárú, mivel $BC = CE = 2$, valamint az EDF háromszög is egyenlő szárú, mert $ED = DF = 1$.

Ekkor tudjuk, hogy $CEB\sphericalangle = 90° - \frac{180°-\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$, valamint $DEF\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Ebből már következik, hogy $FEB\sphericalangle = 180° - \frac{\alpha}{2} - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 90°$.

b) Vegyük észre, hogy az AGF és CGB háromszögek hasonlóak, mert szögeik egyenlők, hiszen $AGF\sphericalangle$ és $CGB\sphericalangle$ csúcsszögek, és $FAG\sphericalangle$ és $GCB\sphericalangle$ pedig váltószögek. Mivel $\frac{FA}{BC} = \frac{1}{2}$, ezért $\frac{GF}{GB} = \frac{1}{2}$. Vagyis G az FB szakasz F-hez közelebbi harmadoló pontja.

Mivel AD és BC párhuzamos, továbbá E és G is harmadolópontok, ezért EG is párhuzamos BC-vel és DA-val. Ebből viszont már hasonlóság miatt következik, hogy $\frac{EG}{AD} = \frac{CE}{CD}$, azaz $EG = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$.

D4. Egy kegyetlen király olyan börtönt építtetett, melyben a 36 cella egy 6×6-os négyzetrács alakban helyezkedik el és bármely két élszomszédos cella között fal található. Néhány cella már most is egy-egy rab kijelölt helye, de minden cella legfeljebb egy rabhoz tartozik. A király idővel arra jut, hogy túl kegyetlen a rabokkal, ezért lebontat néhány falat olyan módon, hogy bármelyik cellából bármelyik másikba el lehessen jutni. Azt viszont nem szeretné, hogy a rabok túl jól érezzék magukat, ezért bármely két, eredetileg egy sorban vagy oszlopban lévő rab között szeretne meghagyni legalább egy falat, hogy ne lássák egymást a kijelölt helyükről. Legfeljebb hány rabot tarthat fogva a király, ha a feltételeknek megfelelően le tud bontatni falakat?
Nagy Kartal feladata

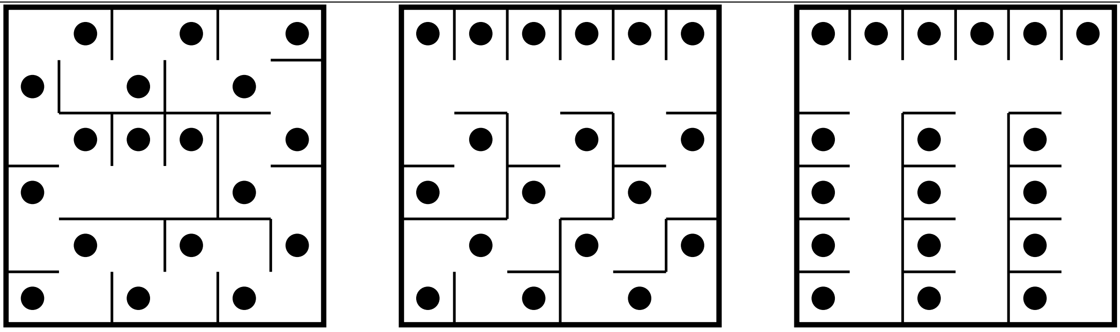
1. Megoldás:

Tekintsük a cellákat külön-külön tartományoknak, amiket falak választanak el egymástól. A király célja, hogy a kezdetben 36 tartományból 1 tartomány maradjon, azaz bármelyik cellából el lehessen jutni bármelyik cellába. Ennek eléréséhez egyesével rombolja le a falakat. Egy fal lerombolásakor vagy eggyel csökken a tartományok száma, ha két különböző tartomány között van a fal vagy nem változik, ha egy tartományon belül van a fal. Tehát ahhoz, hogy a király 1 tartományt kapjon, legalább 35 falat le kell romboljon. Mivel kezdetben 60 fal volt, ezért maximum $60 - 35 = 25$ fal maradhat a rombolás után.

Ha egy sorban s rab van, akkor legalább $s - 1$ falat meg kell tartani abban a sorban, hogy ne lássák egymást. Így a sorokban összesen legalább $r - 6$ fal van, ha r a rabok száma az egész börtönben. Hasonlóképpen az oszlopokban is legalább $r - 6$ fal van, így a rabok számából és a falak maximális számából ezt az egyenlőtlenséget írhatjuk fel:

$$2r - 12 \leq 25$$

Ebből következik, hogy $r \leq 18{,}5$, azaz legfeljebb 18 rabot tarthat fogva a király. Erre van több példa is, három lehetséges konstrukció:



2. Megoldás:

Tekintsük a 6×6-os rács celláit egy gráf csúcsainak, és a lebontott falakat a csúcsokat összekötő éleknek. Így egy 36 csúcsú gráfunk van, melynek kezdetben 0 éle van.

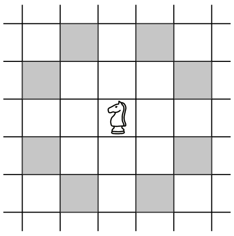
A király célja egy feszítőfa létrehozása, hogy bármelyik csúcsból bármelyik csúcsba el lehessen jutni az élek mentén. Ehhez legalább 35 él szükséges, azaz legalább 35 falat le kell bontani. Kezdetben $2\cdot 5\cdot 6=60$ fal van, így a lebontás után legfeljebb $60-35=25$ fal marad. Innentől kezdve követhetjük az 1. Megoldást.

D5. **a)** Áron felírt egy hatjegyű számot a táblára. Ezután Máté megcserélheti a táblán lévő szám első jegyét a második jegyével. Ezután Benedek megcserélheti a táblán lévő szám harmadik jegyét a negyedikkel. Ezután Zsuzsi megcserélheti a táblán lévő szám ötödik jegyét a hatodikkal. Írhatott-e Áron olyan számot, hogy abból kiindulva nyolc, páronként különböző hatjegyű számot kaphatnak, melyek mindegyike osztható 7-tel?
b) Áron egy másik táblára is felírt egy hatjegyű számot. Ezután Domonkos letörölheti a szám első néhány, akár nulla, de legfeljebb öt jegyét, amiket aztán ugyanolyan sorrendben a szám végére kell írnia. Írhatott-e Áron olyan számot, hogy abból kiindulva hat, páronként különböző hatjegyű számot kaphat Domonkos, melyek mindegyike osztható 17-tel?
Egy hatjegyű szám első jegye nem lehet 0.

Dürer Matekest feladat

Megoldás: Lásd a C5 feladat megoldását.

D6. **Játék:** Egy 4×4-es tábla egyik mezőjén kezdetben egy huszár áll. Két játékos felváltva lép a huszárral. Nem szabad olyan mezőre lépni, amelyen korábban már járt a huszár, így a kezdőmezőre sem. Az veszít, aki nem tud lépni.
Az ábrán a szürke mezők mutatják, hogy hogyan lehet lépni egy huszárral.
Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el a huszár kezdőmezőjének ismeretében, hogy kezdők szeretnétek lenni, vagy másodikok.
Hegedűs Dániel feladata



Megoldás: Lásd a C6 feladat megoldását.

XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Kifejtős megoldókulcs

E kategória

E1. **a)** Anett, Andris, Kartal és Benedek kártyáznak. Négy különböző színű paklijuk van, mindegyik négy lapot tartalmaz, megszámozva 1-től 4-ig. Először összekeverik a 16 lapot, majd mind a négyen húznak négy lapot a kezükbe, amiket megmutatnak egymásnak. Ezután közösen eldöntik, hogy milyen sorrendben ülnek le körben, és azt is, hogy ki kezd. A játék folyamán a kör mentén óramutató járásával megegyező irányban sorban raknak le egy-egy lapot, de egy lapot csak akkor rakhatnak le, ha már minden nála kisebb számú, vele azonos színű le lett rakva. Akkor nyernek, ha az összes lapot lerakják. Ha valaki a sorra kerülésekor nem tud rakni és még van lap a kezében, veszítenek. Mutassatok olyan húzást, amelynél akárhogy is döntenek és játszanak, veszítenek!

b) Mutassátok meg, hogy ha mind a négy pakliból csak az 1-es és 2-es lapokkal játszanak, akkor mindig tudnak nyerni!

c) Ha mind a négy pakliból három lapot használnak, 1-től 3-ig számozva, akkor is tudnak mindig nyerni?

Kocsis Anett feladata

Megoldás: a) Jelöljük a négy színt A-val, B-vel, C-vel és D-vel, továbbá innentől a kártyalapokat úgy fogjuk jelölni, hogy a színük mögé írjuk a számukat (például a C színű 3-as számú lapra innentől $C3$-ként fogunk hivatkozni).

Legyenek Anett lapjai $A1, A2, B1$ és $B2$, Andris lapjai $C1, C2, D1$ és $D2$, Kartal lapjai $A3, A4, B3$ és $B4$, továbbá Benedek lapjai $C3, C4, D3$ és $D4$. Ekkor ahhoz, hogy Kartal le tudjon rakni egy lapot az első körben, az kell, hogy vagy a $A1$ és $A2$ is le legyen már rakva, vagy pedig $B1$ és $B2$ is (hiszen $A3$ és $A4$ lerakásának előfeltétele $A2$ lerakása, $B3$ és $B4$ lerakásának pedig $B2$ lerakása). Viszont mivel $A1$ és $A2$, illetve $B1$ és $B2$ is Anett kezében van, és mivel Anett legfeljebb egyszer kerülhet sorra Kartal előtt, nem lehet egyik lappár sem lerakva, mielőtt Kartal sorra kerül, így legkésőbb Kartal sorra kerülésekor veszíteni fognak ebben az osztásban.

b) Vegyük észre, hogy ha az összes 1-es le lett már rakva, akkor akármelyik lap lerakható.

Ha mind a négy embernek van 1-es kártyája, akkor azt le tudja rakni mindegyikük az első körben és a második körben utána a 2-est.

Ha csak három embernek van 1-es kártyája, akkor pontosan az egyikőjüknél két 1-es van és pontosan az egyiküknél két 2-es. Ekkor, ha a két 1-essel rendelkező kezdi a kört, majd utána az egy 1-essel rendelkezők lerakják a saját 1-esüket, akkor az utolsó ember valamelyik 2-esének színéből már biztosan szerepelt az 1-es korábban, így azt a lapját ki tudja rakni. Ezután ismét az a játékos jön, akinek eredetileg két 1-ese volt és miután a másikat lerakja, már az összes 1-es le lesz rakva, azaz a többiek már be tudják fejezni a kört.

Ha csak két embernek van 1-es kártyája, akkor a másik két ember két-két 2-essel rendelkezik. Kezdjen ebben az esetben az a két játékos, akinek csak 1-ese van. Miután az első játékos kijátszott egy 1-est, valamelyik csupa 2-esel rendelkező játékos már biztosan ki tudja játszani a 2-esét abból a színből. Ezután a másodikként sorra kerülő játékos biztosan tud úgy lerakni egy 1-est, hogy arra utána a másik kizárólag 2-essel rendelkező játékos is le tudja már rakni valamelyik 2-esét. Így az első körben még nem veszítenek, a második pedig azzal kezdődik, hogy az első két játékos lerakja a megmaradó 1-eseit, tehát azt a kört is biztosan be tudják fejezni.

Az nem lehetséges, hogy kettőnél kevesebb ember rendelkezik 1-es kártyával, tehát a feladat állítását bebizonyítottuk.

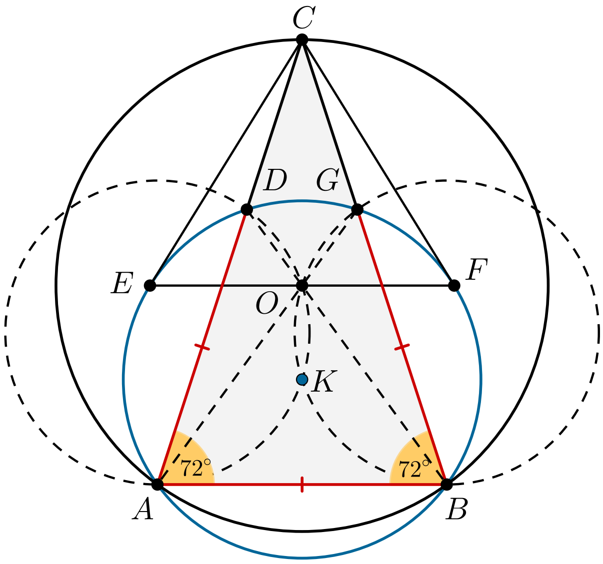
c) Nem, nem tudnak. Ha Anett lapjai $A1, A2$ és $D1$, Andris lapjai $B1, B2$ és $D2$, Kartal lapjai $C1, C2$ és $D3$, Benedek lapjai pedig az $A3, B3$ és $C3$, akkor az a) feladatrészhez hasonló módon láthatjuk, hogy Benedek nem fogja tudni lerakni semelyik lapját az első körben semmilyen sorrend esetén, hiszen se az $A1, A2$, se a $B1, B2$, sem pedig a $C1, C2$ lappár nem lehet lerakva addigra, mire ő sorra kerül, mert mindenki más addig legfeljebb csak egyszer rak.

E2. Legyen az ABC háromszög olyan, hogy $CAB\sphericalangle = CBA\sphericalangle = 72°$. A D pont az AC oldalon helyezkedik el úgy, hogy $DA = AB$ teljesül. A C-ből az ABD háromszög köréírt köréhez húzott érintők érintési pontjait jelölje E és F. Bizonyítsátok be, hogy az EF szakasz felezőpontja éppen az ABC háromszög köréírt körének középpontja!
Hegedűs Dániel feladata

1. Megoldás: Legyen G az a pont a BC szakaszon, amelyre $BG = AB$. Jelölje továbbá K az $ABDGEF$ pontokon átmenő kör középpontját. Legyen végül O az (AKD) és (BKG) körök K-tól különböző metszéspontja.

Először azt látjuk be, hogy O az ABC háromszög köréírt körének középpontja. Egyrészt szimmetria miatt O rajta van az ACB szög felezőjén, így $OCB\sphericalangle = 18°$. Másrészt kiszámoljuk az OBC szöget: $OBC\sphericalangle = OBG\sphericalangle = OKG\sphericalangle = \frac{DKG\sphericalangle}{2} = DBG\sphericalangle = ABC\sphericalangle - ABD\sphericalangle = 72° - 54° = 18°$, mivel hogy $BAD\sphericalangle = 72°$ és $AB = AD$, ezért $ABD\sphericalangle = 54°$. Vagyis $OCB\sphericalangle = OBC\sphericalangle$, amiből $OC = OB$, de szimmetria miatt $OB = OA$, vagyis O tényleg az ABC háromszög köréírt körének a középpontja.

Ezek után belátjuk, hogy O az EF szakasz felezőpontja. Szimmetria miatt tudjuk, hogy $C-O-K$ pontok egy egyenesre esnek. Ekkor a C pontnak az $ABDGEF$ körre vett hatványa $CF^2 = CG \cdot CB$. Ezen felül a C pont $BGOK$ körre vett hatánya $CG \cdot CB = CO \cdot CK$. Ebből kapjuk, hogy $CF^2 = CO \cdot CK$, amiből következik, hogy $COF\sphericalangle = CFK\sphericalangle = 90°$. Szimmetria miatt tudjuk, hogy $FO = EO$, de már tudjuk, hogy $EOF\sphericalangle = 180°$, amiből következik, hogy O az EF szakasz felezőpontja. Ezzel pedig beláttuk a bizonyítandó állítást.



2. Megoldás: Definiáljuk O-t az (ABC) kör középpontjaként. Most is vegyük észre, hogy $O \in BD$, hiszen egyszerű szögszámolással $OBA\sphericalangle = \dfrac{180° - AOB\sphericalangle}{2} = \dfrac{180° - 2BAC\sphericalangle}{2} = 54° = \dfrac{180° - BAD\sphericalangle}{2} = DBA\sphericalangle$. Azt kell igazolni, hogy C és O egymás inverzei az (ABD) körre nézve. Invertáljuk az ábrát az (ABC) körre. Ekkor az A, B, C pontok helyben maradnak, O elmegy a végtelenbe. Az invertálás után a bizonyítandó állítás az, hogy C és O képei egymás inverzei az (ABD) kör képére nézve, azaz, hogy C az (ABD^*) kör középpontja, ahol D^*-gal jelöljük D inverzét az (ABC) körre nézve. Persze $CA = CB$, tehát elég lenne látni, hogy $CD^* = CB$. Viszont az invertálás miatt $BD^*C\sphericalangle = OD^*C\sphericalangle = OCD\sphericalangle = 18° = 72° - 54° = DBC\sphericalangle = D^*BC$. Ezzel a BCD^* háromszög valóban egyenlőszárú, amivel pedig beláttuk az állítást.

E3. **a)** Áron felírt egy hatjegyű számot a táblára. Ezután Máté megcserélheti a táblán lévő szám első jegyét a második jegyével. Ezután Benedek megcserélheti a táblán lévő szám harmadik jegyét a negyedikkel. Ezután Zsuzsi megcserélheti a táblán lévő szám ötödik jegyét a hatodikkal. Írhatott-e Áron olyan számot, hogy abból kiindulva nyolc, páronként különböző hatjegyű számot kaphatnak, melyek mindegyike osztható 7-tel?
b) Áron egy másik táblára is felírt egy hatjegyű számot. Ezután Domonkos letörölheti a szám első néhány, akár nulla, de legfeljebb öt jegyét, amiket aztán ugyanolyan sorrendben a szám végére kell írnia. Írhatott-e Áron olyan számot, hogy abból kiindulva hat, páronként különböző hatjegyű számot kaphat Domonkos, melyek mindegyike osztható 17-tel?
Egy hatjegyű szám első jegye nem lehet 0.
Dürer Matekest feladat

Megoldás: Lásd a C5 feladat megoldását.

E4. Geronimo gondolt egy egész együtthatós P polinomra. Ezt szeretné kitalálni Thea, aki ehhez minden percben kérdezhet Geronimotól egy q racionális számot, amire Geronimo rögtön elmondja Theanak $P(q)$ értékét.
a) Van-e olyan P polinom, amelyre létezik Theanak véges sok olyan kérdése, amikből együtt ki tudja találni P-t?
b) Geronimo elárulta Theanak, hogy P foka 2025 és főegyütthatója 1. Bizonyítsátok be, hogy semmilyen ilyen P-re nem létezik 2024 olyan kérdése Theanak, amikből együtt ki tudja találni P-t!
Egy 2025-ödfokú $P(x) = a_{2025}x^{2025} + a_{2024}x^{2024} + \ldots + a_1x + a_0$ polinom együtthatói az $a_{2025}, \ldots, a_0$ számok, főegyütthatója a_{2025}. Thea akkor tudja kitalálni a P polinomot, ha az általa ismert információknak az egész együtthatós polinomok közül csak P felel meg.
Beke Csongor feladata

Megoldás: a) A válasz az, hogy nincs. Tegyük fel, hogy valamilyen P polinom esetén Thea valamilyen $q_1 = a_1/b_1, q_2 = a_2/b_2, \ldots, q_N = a_N/b_N$ kérdésekre kapott válaszokból ki tudja találni P-t. Tekintsük a $P^*(x) = P(x) + (b_1x - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_Nx - a_N)$ polinomot. Figyeljük meg, hogy ez nem egyenlő P-vel, azonban a $q_1, q_2, \ldots, q_N$ helyettesítési értékeken megegyezik P-vel, ami ellentmond annak, hogy Thea ki tudta találni a P polinomot.

b) Tegyük fel hogy Thea a $q_1 = a_1/b_1, q_2 = a_2/b_2, \ldots, q_{2024} = a_{2024}/b_{2024}$ értékeket kérdezte meg, amiből már meg tudta határozni P-t. Ekkor, az előző feladatrészhez hasonlóan, a $P^*(x) = P(x) + (b_1x - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_{2024}x - a_{2024})$ polinom ugyanazt rendeli q_1-hez, q_2-höz, …, és q_{2024}-hez is, mint P, és mivel P foka 2025 és főegyütthatója 1, így P^* foka is 2025 és főegyütthatója 1, hiszen a hozzáadott tag legfeljebb 2024-edfokú. Ellentmondás, így 2024 kérdés tényleg nem elég.

E5. Megadható-e végtelen sok általános helyzetű egyenes a síkon úgy, hogy az egyenesek által meghatározott metszéspontok minden egyenestől egész távolságra legyenek?
Egyenesek egy halmaza általános helyzetű, ha semelyik kettő nem párhuzamos, és semelyik három nem megy át egy ponton.

Megoldás:

A válasz nem.

Indirekten tegyük fel, hogy megadható végtelen sok egyenes, és legyen az egyik e egyenesen két metszéspont A és B. Tekintsünk egy tetszőleges e-től különböző f egyenest, és legyen f' az az egyenes, ami f-fel párhuzamos és áthalad az A ponton. Figyeljük meg, hogy mivel f az indirekt feltevésünk szerint egész távolságra volt A-tól és B-től, így f-et egy egész hosszúságú vektorral kell eltolni, hogy f'-t kapjuk, azaz f' is egész távolságra van B-től. Ez azzal ekvivalens, hogy van olyan egész sugarú kör B körül, amit f' érint. Mivel csak véges sok olyan egész sugarú kör van, aminek B a középpontja és A nem belső pontja, és minden ilyen körhöz legfeljebb két érintő húzható A-n keresztül, így f' csak véges sokféle lehet. Ez azonban ellentmondás, mivel a végtelen sok egyenes mindegyikéhez tudjuk venni a vele párhuzamos, A-n áthaladó egyenest, és ezeknek különbözőknek kéne lennie, mert feltettük, hogy nincs két párhuzamos egyenes. Tehát nem lehet megadni végtelen sok egyenest a feltételeknek megfelelően.

E6. Játék: Kezdetben egy pozitív egészekből álló (n, k) rendezett számpár van felírva egy lapra. Két játékos felváltva lép, ha a nem áthúzott (a, b) számpár szerepel a lapon, a soron lévő játékosnak egy lépésben át kell húznia (a, b)-t és helyette felírnia vagy az $(a, b+1)$, vagy az $(a-b, b)$ számpárt. Az nyer, aki először ír fel olyan számpárt, amelyben nem mindkét szám pozitív.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el n és k ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás: Nevezzünk egy helyzetet nyerő helyzetnek, ha onnan kezdve a második játékosnak van nyerő stratégiája, különben vesztő helyzetnek. Végignézzük a lehetséges (a, b) számpárokra, hogy nyerő vagy vesztő helyzetek.

Világos, hogy ha $a \leq b$, az egy vesztő helyzet. Ha $a \leq 2b$, akkor ha valaki a-t csökkenti, veszít, ha pedig mindketten felváltva b-t növelgetik, akkor az veszít, akinek a lépésénél $b = a$ lesz, így azok a nyerő helyzetek, amelyekben $a - b$ páratlan.

Most megmutatjuk, hogy amennyiben $a > 2b$, ha a páros és b páratlan, az egy nyerő helyzet, ha pedig a és b is páros, vagy a és b is páratlan, az vesztő helyzet. Amennyiben ezt megsejtjük, már nem nehéz bizonyítani. A (páros, páros) esetből b-t növelve lehet nyerő mezőre lépni. A (páratlan, páratlan) helyzetből is tudunk (páros, páratlan) helyzetbe lépni, ha a helyett $a - b$ írunk. Figyeljük meg, hogy ezek akkor is nyerő helyzetbe visznek, ha a lépés után $a \leq 2b$. Végül azt kell megmutatni, hogy a (páros, páratlan) helyzetek nyerők, azaz onnan csak vesztőre lehet lépni, ami pedig világos, mert az egyik lehetőség két páros, a másik két páratlan számba visz, amik mindenképpen vesztők az eddigiek alapján.

Már csak az az eset maradt, amikor $a > 2b$, a páratlan és b páros. Ekkor b növelése vesztő helyzetre visz. Ha pedig mindkét játékos felváltva a-t csökkenti, akkor az nyer, aki először csökkenti a-t $2b$ alá, így azok a nyerő helyzetek, amikor $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ páratlan.

E+1. Legyen az ABC háromszög olyan, hogy $CAB\sphericalangle = CBA\sphericalangle = 72°$. A D pont az AC oldalon helyezkedik el úgy, hogy $DA = AB$ teljesül. A C-ből az ABD háromszög köréírt köréhez húzott érintők érintési pontjait jelölje E és F. Bizonyítsátok be, hogy az EF szakasz felezőpontja éppen az ABC háromszög köréírt körének középpontja!
Hegedűs Dániel feladata

Megoldás: Lásd a E2 feladat megoldását.

E+2. Geronimo gondolt egy egész együtthatós P polinomra. Ezt szeretné kitalálni Thea, aki ehhez minden percben kérdezhet Geronimotól egy q racionális számot, amire Geronimo rögtön elmondja Theanak $P(q)$ értékét.
a) Van-e olyan P polinom, amelyre létezik Theanak véges sok olyan kérdése, amikből együtt ki tudja találni P-t?
b) Geronimo elárulta Theanak, hogy P főegyütthatója 1. Bizonyítsátok be, hogy minden ilyen P-re létezik véges sok olyan kérdése Theanak, amikből együtt ki tudja találni P-t! Határozzátok meg P függvényében, hogy ehhez legkevesebb hány kérdésre van szüksége Theanak!
Thea akkor tudja kitalálni a P polinomot, ha az általa ismert információknak az egész együtthatós polinomok közül csak P felel meg.
Beke Csongor feladata

Megoldás: a) A válasz az, hogy nincs. Tegyük fel, hogy valamilyen P polinom esetén Thea valamilyen $q_1 = a_1/b_1, q_2 = a_2/b_2, \dots, q_N = a_N/b_N$ kérdésekre kapott válaszokból ki tudja találni P-t. Tekintsük a $P^*(x) = P(x) + (b_1x - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_Nx - a_N)$ polinomot. Figyeljük meg, hogy ez nem egyenlő P-vel, azonban a $q_1, q_2, \dots, q_N$ helyettesítési értékeken megegyezik P-vel, ami ellentmond annak, hogy Thea ki tudta találni a P polinomot.

b) Azt állítjuk, hogy legkevesebb n kérdés szükséges, ahol n a P polinom fokát jelöli.

Megmutatjuk, hogy $n-1$ kérdés nem elég. Tegyük fel hogy Thea a $q_1 = a_1/b_1, q_2 = a_2/b_2, \dots, q_{n-1} = a_{n-1}/b_{n-1}$ értékeket kérdezte meg. Ekkor, az előző feladatrészhez hasonlóan, a $P^*(x) = P(x) + (b_1x - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_{n-1}x - a_{n-1})$ polinom ugyanazt rendeli q_1-hez, q_2-höz, …, és q_{n-1}-hez is, mint P, és mivel P foka n és főegyütthatója 1, így P^* foka is n és főegyütthatója 1, hiszen a hozzáadott tag legfeljebb $(n-1)$-edfokú. Tehát $n-1$ kérdés nem elég.

Most megmutatjuk, hogy n kérdésből már ki tudja találni Thea a P polinomot bármely n-edfokú P esetén. Legyen az első kérdés $q_1 = 1/2$, a válasz erre pedig $a_1/b_1 \cdot 2^k$, ahol $k \in \mathbb{Z}$, a_1, b_1 páratlan egész számok. Azt állítjuk, hogy P foka $-k$. Ez azért van, mert ha $R(x) = x^m + r_{m-1}x^{m-1} \cdots + r_1x + r_0$, ahol r_i egész, akkor $R(1/2) \cdot 2^m$ egy egész szám, viszont $R(1/2) \cdot 2^{m-1}$ nem. Ezzel az első kérdés után Thea már tudja P fokát, n-et. Legyenek a további kérdések a $q_i = 1/(i+1)$ értékeken, ahol $2 \leq i \leq n$. Ekkor a $P(x) - x^n$ polinom legfeljebb $n-1$ fokú, és n különböző pontban tudja Thea az értékét, így ismert, hogy Lagrange-interpoláció segítségével meg tudja határozni a $P(x) - x^n$ polinomot, így a P-t is.

E+3. **a)** Igaz-e, hogy tetszőleges pozitív egész N esetén megadható N darab általános helyzetű egyenes a síkon úgy, hogy az egyenesek által meghatározott metszéspontok minden egyenestől egész távolságra legyenek?
b) Megadható-e végtelen sok ilyen tulajdonságú, általános helyzetű egyenes?
Egyenesek egy halmaza általános helyzetű, ha semelyik kettő nem párhuzamos, és semelyik három nem megy át egy ponton.

Megoldás: a) Megmutatjuk, hogy bármely tetszőlegesen nagy pozitív egész N esetén létezik N ilyen egyenes. Egyeneseinket az $a_ix + b_iy + c_i = 0$ alakban definiáljuk, ahol az a_i, b_i, c_i értékeit később választjuk meg. Figyeljük meg, hogy az $a_ix + b_iy + c_i = 0$ és $a_jx + b_jy + c_j = 0$ egyenesek metszéspontja a következőképpen adható meg:

$$\left(\frac{c_ib_j - b_ic_j}{b_ia_j - a_ib_j}, \frac{a_ic_j - c_ia_j}{b_ia_j - a_ib_j}\right),$$

ahol $b_ia_j - a_ib_j \neq 0$, mivel nincs két párhuzamos egyenes. Következésképpen, ha minden a_i, b_i és c_i racionális, akkor bármely két egyenes metszéspontja is racionális koordinátájú lesz.

Ismert, és könnyű kiszámolni, hogy egy (x_0, y_0) pont távolsága az $ax + by + c = 0$ egyenestől a következőképpen adható meg:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Úgy választjuk meg az $\left(a_i, b_i, \sqrt{a_i^2 + b_i^2}\right)$ hármasokat, hogy primitív pitagoraszi számhármasok legyenek. Ez biztosítja, hogy bármely racionális koordinátájú pont racionális távolságra lesz mind az N egyenestől. Továbbá, az egyenesek meredeksége, a_i/b_i, különböző lesz a primitívség miatt, így semelyik két egyenes sem lesz párhuzamos. Most meg kell győződnünk arról, hogy nem létezik olyan pont, amelyen három egyenes is áthalad. Szerencsére ezt könnyen el lehet érni, mivel csak véges sok egyenesünk van, és a c_i konstansokat szabadon választhatjuk racionális számoknak. Végül, mivel csak véges sok különböző távolságunk van, a konfigurációt nagyíthatjuk ezeknek a távolságoknak a nevezőinek legkisebb közös többszörösével, így minden távolság egész értékűvé válik.

b) A válasz nem.

Indirekten tegyük fel, hogy megadható végtelen sok egyenes, és legyen az egyik e egyenesen két metszéspont A és B. Tekintsünk egy tetszőleges e-től különböző f egyenest, és legyen f' az az egyenes, ami f-fel párhuzamos és áthalad az A ponton. Figyeljük meg, hogy mivel f az indirekt feltevésünk szerint egész távolságra volt A-tól és B-től, így f-et egy egész hosszúságú vektorral kell eltolni, hogy f'-t kapjuk, azaz f' is egész távolságra van B-től. Ez azzal ekvivalens, hogy van olyan egész sugarú kör B körül, amit f' érint. Mivel csak véges sok olyan egész sugarú kör van, aminek B a középpontja és A nem belső pontja, és minden ilyen körhöz legfeljebb két érintő húzható A-n keresztül, így f' csak véges sokféle lehet. Ez azonban ellentmondás, mivel a végtelen sok egyenes mindegyikéhez tudjuk venni a vele párhuzamos, A-n áthaladó egyenest, és ezeknek különbözőknek kéne lennie, mert feltettük, hogy nincs két párhuzamos egyenes. Tehát nem lehet megadni végtelen sok egyenest a feltételeknek megfelelően.

E+4. Legyen S a pozitív egészeknek egy nemüres véges részhalmaza, és legyen G egy n csúcsú összefüggő fagráf. Bármely u, v csúcsokra jelölje $d(u, v)$ a két csúcs gráfelméleti távolságát, azaz az u, v csúcsokat összekötő egyértelmű út éleinek számát. Hívjuk *felderítésnek* azon $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}$ csúcssorozatokat, melyekre $v_1 = v_{n+1}$, a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsok páronként különbözők és bármely $1 \leq i \leq n$-re a $d(v_i, v_{i+1})$ távolság S-beli. Egy felderítés *sikeres*, ha a $d(v_1, v_2), d(v_2, v_3), \ldots, d(v_n, v_{n+1})$ számok között minden $s \in S$ szám ugyanannyiszor szerepel. Mely S halmazok esetén létezik olyan G véges, legalább két csúcsú összefüggő fagráf, amely sikeresen felderíthető?
Németh Márton feladata

Megoldás: Megmutatjuk, hogy pontosan akkor létezik megfelelő G fagráf, ha S-ben van páratlan elem.

Szükségesség: Először vizsgáljuk azt, hogy S-ben csak páros számok vannak. Ekkor egy tetszőleges G fagráfot színezzünk ki két színnel, feketével és fehérrel úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színt kapjanak, és tegyük fel, hogy a kezdő csúcs fehér. Páros hosszúságú lépésekkel így fehér mezőről mindig fehér mezőre lépünk, azaz a feketékre sosem juthatunk el, tehát nem tudjuk az egész gráfot bejárni.

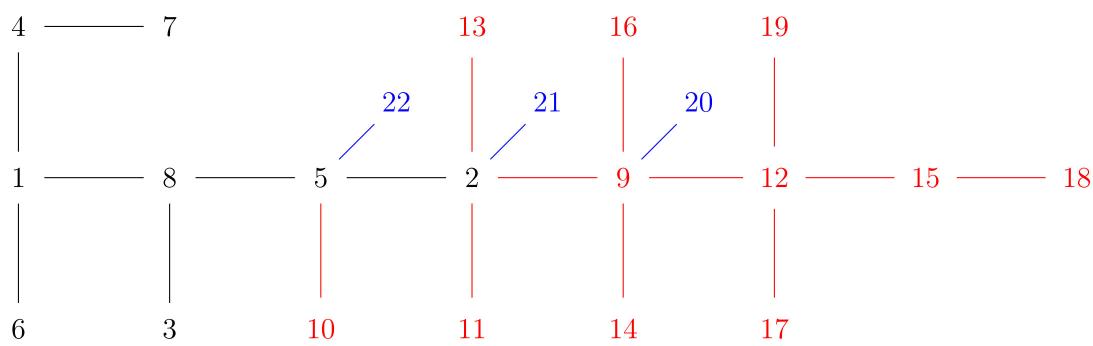
Konstrukció: Most tegyük fel, hogy S-ben van páratlan elem!

Először megmutatjuk, hogy ha $a > 1$, $b \geq 1$ különböző elemei S-nek, és $a + b - 2 \notin S \setminus \{a, b\}$, továbbá az $S' = S \setminus \{a, b\} \cup \{a + b - 2\}$ halmazra létezik megfelelő G' gráf, akkor S-re is. G'-ben legyen egy sikeres felderítés a csúcsok v_1, v_2, $\ldots$, $v_{|G'|}$, v_1 sorrendje. Ekkor tudjuk, hogy $|S'| \cdot k = |G'|$, ahol minden típusú lépést pontosan k-szor használtunk. Most minden $a+b-2$ méretű lépés esetén végezzük a következő módosítást: amikor $u \in G'$-ből lépünk $v \in G'$-be, akkor a köztük futó legrövidebb, $a+b-2$ hosszú úton legyenek a $u, w_1, w_2, \ldots, w_{a+b-3}, w_{a+b-2} = v$ csúcsok. Adjunk hozzá egy $\bar{w}$ levelet a w_{a-1} csúcshoz, és a felderítést módosítsuk úgy, hogy u-ból $\bar{w}$-be, $\bar{w}$-ből v-be megyünk. Mivel a legrövidebb utak hossza ezek között nyilván rendre a és b, így egy $a+b-2$-lépés helyett egy a-lépést és egy b-lépést csináltunk.

Ez a módosítás fagráfból nyilván fagráfot csinál, hiszen csak leveleket adtunk hozzá csúcsokhoz. Indukáljunk $|S|$-en! Ha $|S| \geq 3$, és S tartalmaz páratlan elemet, akkor legyen a a legnagyobb páratlan elem, b pedig egy tetszőleges páros elem S-ben. $S' = S \setminus \{a, b\} \cup \{a+b-2\}$-nek kevesebb eleme van mint S-nek, és tartalmaz páratlan elemet, így kész vagyunk. Ha S csak páratlan elemeket tartalmaz, akkor legyen a és b két tetszőleges elem S-ből, ugyanezt a műveletet elvégezve szintén készen vagyunk, hiszen S-ből még marad legalább egy páratlan elem S'-ben is.

Ha $|S| = 2$, és S-ben van páros elem is, akkor ezekből S'-t képezve szintén készen vagyunk, így csak azokat az eseteket kell már csak belátnunk, amikor S egy vagy kettő páratlan számból áll.

Ha $|S| = 1$, először mutatunk egy konstrukciót $S = \{3\}$-ra:



Világos, hogy bármely l-ra (a pirossal és kékkel jelzett mintát folytatva) elérhetjük, hogy a gráfban bármely csúcstól legyen $l+1$ távolságban lévő csúcs. Egy G gráfra, a legnagyobb olyan l számot, amire minden csúcsra, van tőle l távolságra lévő csúcs, a továbbiakban $l(G)$-nek jelöljük.

Indukciósan tegyük fel, hogy egy páratlan k esetén már találtunk megfelelő G-t $S = \{k\}$-re és $l(G) \geq k+1$, megmutatjuk, hogy $S = \{k+2\}$ esetén létezik megfelelő G'. G-ben a kezdőcsúcshoz adjunk hozzá egy levelet, legyen ez a kezdőcsúcs G'-ben. Most vegyük sorra G csúcsait, és járjuk be őket: ha el akarunk jutni egy $x \in V(G)$ csúcs egy új, hozzáadott levelébe, és most éppen egy új, az $y \in V(G)$ csúcshoz rakott levélben vagyunk, akkor vegyük G csúcsainak egy $y, v_1, v_2, \ldots, x$ sorozatát, melyben szomszédos csúcsok között k hosszú út húzódik, mindegyikhez rakjunk egy új levelet, és ezeken a leveleken menjünk végig sorban. Tehát mivel bármely G-beli csúcstól van $k+1$ távolságra lévő G-beli csúcs (ez $l(G) \geq k+1$ miatt teljesül), elég ennek egy levelébe eljutni akárhonnan, onnan a kívánt csúcsba lépni, majd kilépni egy új levélbe, és ezt G minden csúcsára megcsinálni, majd végül eljutni egy olyan levélbe, mely $k+2$ távolságra van az új kezdőcsúcstól. Ekkor könnyen látszik, hogy $l(G') \geq l(G)$ is teljesül.

Vagyis, ha a $S = \{k\}$-ra szeretnénk konstrukciót, akkor kiindulunk egy az $S = \{3\}$ esetre jó, G gráfból, amire $l(G) \geq k+1$. Majd a fenti lépések ismétlésével kapjuk a kívánt konstrukciót.

Mivel $S = \{1\}$ triviális (a két csúcsú fa megfelelő), az állítást egyelemű S-ekre megmutattuk.

Már csak az az eset maradt, amikor $S = \{p, q\}$, ahol $p < q$ páratlanok. Ha $p > 1$, akkor vegyünk egy G konstrukciót $S = \{q\}$-ra. Mivel q páratlan, és egy fa mindig párosgráf, G-nek páros sok csúcsa van (tehát páros sokszor q-léptünk benne). Egy $v_i \to v_j$ q-lépés helyett, melynek köztes csúcsai a $v_i, a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}, v_j$, csinálhatjuk azt, hogy hozzáadunk egy x levelet a_{p-1}-hez és egy y levelet a_1-hez, majd a q-lépést lecseréljük a $v_i \to x \to y \to v_j$ lépésekre. Ezzel 2-vel növeltük a p-lépések számát, ezt néhányszor megcsinálva elérjük, hogy ugyanannyi p és q lépés legyen.

Amikor $S = \{1, 2k + 1\}$, akkor legyen a gráf:

Ezzel a konstrukció leírását befejeztük.

E+5. Egy pozitív egész k számot *kriminálisnak* nevezünk, ha léteznek olyan különböző m, n pozitív egészek, melyre a k számnak az m-es és n-es számrendszerbeli felírása is kétjegyű, méghozzá ugyanabból a két számjegyből állnak, csak fordított sorrendben. Bizonyítsátok be, hogy létezik olyan K pozitív egész, hogy minden $k \geq K$ egész kriminális!
A pozitív egész b, k számokra k-nak a b-s számrendszerbeli felírása az a $(b_d, b_{d-1}, \ldots, b_1, b_0)$ egészekből álló rendezett számsor, amelyben $0 \leq b_i < b$ minden $i < d$-re és $0 < b_d < b$, illetve amelyre $k = b_d \cdot b^d + b_{d-1} \cdot b^{d-1} + \ldots + b_1 \cdot b + b_0$. Ilyenkor $(b_d, b_{d-1}, \ldots, b_1, b_0)$ a számjegyek, és a számjegyek száma $d+1$. Például a 7-nek a 3-as számrendszerbeli felírása $(2, 1)$, míg az 5-ös számrendszerbeli felírása $(1, 2)$, így a 7 kriminális.
Beke Csongor feladata

Megoldás:

Először megmutatjuk, hogy ha $k \geq 4$ egy nem kriminális szám, és d egy pozitív egész szám, amire $d^5 < k$, akkor $d \mid k$.

Rögzítsük k-t, d szerinti indukcióval látjuk be, $d = 1$ triviális. Legyen $d^5 < k$ és minden $d' < d$-re $d' \mid k$, viszont tegyük fel, hogy $d \nmid k$. Ekkor legyen k d-vel való osztási maradéka r ahol $1 \leq r \leq d - 1$, valamint $\ell = [d, r] < d^2$, ahol a kapcsos zárójel a legkisebb közös többszöröst jelöli. Mivel $d \mid k - r$ és $r \mid k - r$, ezért $\ell \mid k - r$, valamint $r \mid k - \ell$. Legyen $m = \frac{k-r}{\ell}$ és $n = \frac{k-\ell}{r}$, ekkor $k = m \cdot \ell + r = n \cdot r + \ell$. Ezek a k szám m és n számrendszerbeli felírásai, amennyiben $\ell < m$, $r < m$, $\ell < n$ és $r < n$.

Tudjuk, hogy $\ell \geq d > r$, valamint $m < n$, hiszen ez ekvivalens a $(k - r)r < (k - \ell)\ell$ állítással, ami következik abból, hogy az x-hez $(k - x)x$-et rendelő függvény szigorúan nő $k/2$-ig, és $r < \ell < d^2 < k^{2/5} \leq k/2$, ha $k \geq 4$. Szóval elég azt belátni, hogy $\ell < m$, mert akkor a másik három egyenlőtlenség is teljesül. Ez pedig azért van, mert

$$k > d^5 \geq d^4 + d \geq \ell^2 + r,$$

azaz $m = \frac{k-r}{\ell} > \ell$. Ezzel beláttuk, hogy k kriminális, ami ellentmondás, így $d \mid k$ tényleg teljesül ha $d^5 < k$.

Már csak azt kell belátni, hogy létezik egy olyan K pozitív egész, hogy minden $k \geq K$-hoz létezik $d < k^{1/5}$, amire $d \nmid k$. Legyen K az első 10 prímszám szorzata, azaz $K = \prod_{i=1}^{10} p_i = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 = 6469693230$. Tegyük fel, hogy létezik $k \geq K$ ami nem teljesíti a feltételt. Ekkor az első tíz prím mind osztja k-t, mivel $29^5 < K \leq k$. Legyen p kitevője k-ban e_p, ahol p az első 10 prímszám egyike. Ekkor $k \geq \prod_{i=1}^{10} p_i^{e_{p_i}}$, ahol p_i az i. prím, azaz létezik egy $p \in \{p_1, \ldots, p_{10}\}$, amire $p^{e_p} < k^{1/10}$. De ekkor $d = p^{2e_p} < k^{1/5}$, viszont $d \nmid k$, ellentmondás. Ezzel beláttuk a feladat állítását.

Megjegyzés: Az összes nem kriminális szám listája:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 18, 20, 24, 32, 48, 60, 72, 168, 720.$$

E+6. Játék: Kezdetben egy pozitív egészekből álló (n, k) rendezett számpár van felírva egy lapra. Két játékos felváltva lép, ha a nem áthúzott (a, b) számpár szerepel a lapon, a soron lévő játékosnak egy lépésben át kell húznia (a, b)-t és helyette felírnia vagy az $(a, b+1)$, vagy az $(a-b, b)$ számpárt. Az nyer, aki először ír fel olyan számpárt, amelyben nem mindkét szám pozitív.

Győzzétek le a szervezőket kétszer egymás után ebben a játékban! Ti dönthetitek el n és k ismeretében, hogy a kezdő vagy a második játékos bőrébe szeretnétek bújni.

Megoldás: Lásd a E6 feladat megoldását.

XVIII.

Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Váltó feladatsor

C kategória

C-1. Egy mesebeli cseresznyefának 25 ága van, minden ágból 93 gally ágazik el és minden gallyon 4 cseresznye található. Hány cseresznye van a fán? (3 pont)

C-2. Melyik az a legnagyobb négyjegyű szám, melynek minden számjegye különböző, a számjegyei csökkenő sorrendben állnak, továbbá az első és utolsó számjegyének szorzata megegyezik a két középső számjegyének szorzatával? (3 pont)

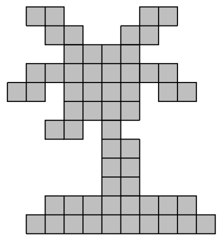
C-3. Maigret felügyelő 2025 januárjában összesen négy ügyet oldott meg, ezeket különböző napokon tette. Az év első napján, szerdán oldotta meg az elsőt. A másodikként megoldott ügy megoldásának dátumában a napnak 6 pozitív osztója van. A harmadik és a negyedik ügy megoldása 12 nap eltéréssel történt. Az utolsó ügyet vasárnap oldotta meg. Mi a négy ügy megoldásának dátumaiban a napok összege?
Januárban 31 nap van. (3 pont)

C-4. Rex felügyelő, a kutya, bárányokkal és kétfejű nyulakkal álmodott, összesen 60 lábat és 20 fejet számolt. Hány báránnyal álmodott Rex, ha a saját lábait is beleszámolta, de a fejét nem?
Minden állatnak 4 lába volt az álmában, továbbá Rex a saját fején kívül minden testrészt megszámolt, ami a szövegben szerepel. (3 pont)

C-5. Péter nyomozó a 0, 1, 2, 3 számkártyákból kirakott egy prímet, mindegyik kártyából legfeljebb egyet használva. Mi a legnagyobb prím, amit kirakhatott? (4 pont)

C-6. Egy 6×4-es táblázat néhány mezőjébe csokit tettünk, majd minden mezőre ráírtuk, hogy a vele szomszédos mezők közül hányban van csoki. Két mező szomszédos, ha van közös oldaluk vagy csúcsuk. Legfeljebb hány csoki lehet a táblázatban, ha minden mezőre legfeljebb 2-es számot írtunk?
A csokit tartalmazó mezőkre is írtunk számot. Semelyik mező sem szomszédos önmagával. (4 pont)

C-7. Mennyi a legkisebb olyan körlap sugarának a négyzete, amely teljesen lefedi az ábrázolt pálmafát, és a sugarának négyzete egész szám?
Az ábrán a kis négyzetek oldalainak hossza 1. (4 pont)



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Váltó feladatsor

C kategória

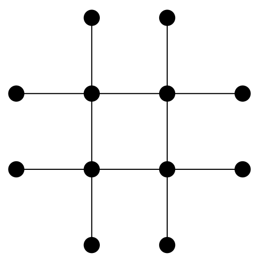
C-8. Egy városban van hat kritikus pont, melyek egy szabályos hatszög csúcsaiban helyezkednek el. Egy szökött fegyencet üldöznek, ezért hogy lerázza az őt követő kutyákat, tett egy sétát a városban a hat kritikus pont között. Végül a kiindulási helyére tért vissza, de ezenkívül semelyik másik kritikus pontban nem járt egynél többször. Mindig egyenesen ment egy kritikus pontból a következőbe úgy, hogy összesen minél több pontban messe a saját útját. Legfeljebb hány metszéspontot hozhatott létre?
Ha egy metszésponton kettőnél többször haladt át, az továbbra is csak egy metszéspontnak számít. A kritikus pontok nem számítanak metszéspontnak. (4 pont)

C-9. Scooby-Doo otthoni készletében 32 doboz mogyoróvajas, 19 doboz juharszirupos és 34 doboz mályvacukros Scooby Snack van. Ahhoz, hogy egy nap jóllakjon, az alábbi lehetőségek valamelyikét kell elfogyasztania:

- 3 doboz mogyoróvajas, 1 doboz juharszirupos és 1 doboz mályvacukros Scooby Snack,
- 1 doboz juharszirupos és 2 doboz mályvacukros Scooby Snack,
- 4 doboz mogyoróvajas és 2 doboz mályvacukros Scooby Snack.

Legfeljebb hány napon lakhat jól Scooby-Doo, ha csak az otthoni készletét fogyaszthatja? (5 pont)

C-10. Molli és Tamás meglátogattak 4-4 várost úgy, hogy köztük csak utak mentén közlekedtek. Az ábrán pontok jelölik városokat, ahol járhattak, és szakaszok a köztük haladó utakat. Tudjuk, hogy minden városban legfeljebb az egyikük járt, valamint minden városban legfeljebb egyszer jártak. Hányféleképpen tehették ezt meg?
Két esetet akkor tekintünk különbözőnek, ha Molli és Tamás közül legalább az egyikük más városokat látogatott meg, vagy ugyanazokat más sorrendben. (5 pont)



C-11. Egy kártyapakli 16 lapból áll, piros, sárga, zöld és kék színben van 1-1 kutya, macska, ló és hal. Alex kirakott négy lapot az asztalra a pakliból. Ezután Béla az egyik lapon megváltoztatta vagy a színt, vagy az állatot. Ekkor azt vette észre, hogy az így kapott négy kártyán mind a négy szín és mind a négy állat pontosan egyszer fordul elő. Hányféle lehetett az Alex által kirakott négy lap, ha a kirakott lapok sorrendje nem számít?

(5 pont)

C-12. Adott egy $ABCD$ trapéz, melynek az AB és CD oldalai párhuzamosak. A B és C csúcsok belső szögfelezőinek métszéspontja legyen M. Az M pontnak a BC oldalra vett tükörképe legyen P. A BC oldal hossza 6 egység, a D és P pontok távolsága 8 egység, továbbá $CBP\sphericalangle = 30°$. Mennyi a DB szakasz egységekben kifejezett hosszának négyzete? (5 pont)

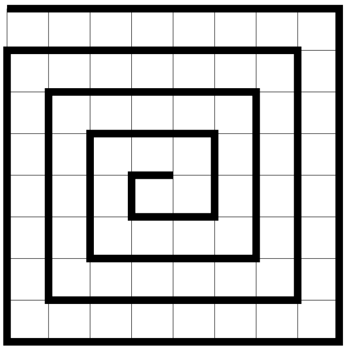
XVIII. Dürer Verseny

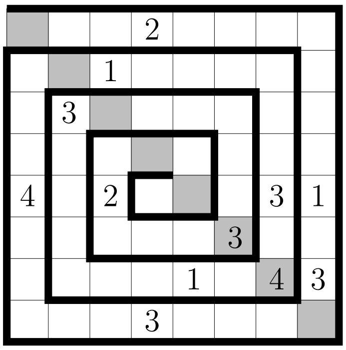
Döntő (2025. 02. 07-09.)

Váltó feladatsor

C kategória

C-13. Csabinak, a kis csigának a háza a bal oldali ábrán látható módon 8×8 négyzetből áll. Csabi most tanulja a számokat, egyelőre még csak 4-ig tud számolni. Csabi bátyja úgy akarja segíteni a tanulását, hogy néhány négyzetbe beír egy számot az $1, 2, 3, 4$ közül. Szeretné, hogy a csigavonal mentén kívülről befelé haladva a nemüres négyzetekben az $1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, \ldots, 4$ számok szerepeljenek ebben a sorrendben. Továbbá, hogy Csabi fel ne boruljon, arra is szeretne figyelni, hogy minden sorban és oszlopban mind a négy számjegy pontosan egyszer szerepeljen. Eddig a jobb oldali ábrán látható jegyeket írta be, segíts neki befejezni a kitöltést! Mennyi lesz végül azon szürke mezőkben lévő számok szorzata, melyek nem maradnak üresen?





(6 pont)

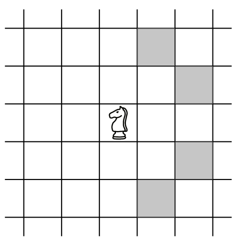
C-14. Scooby-Dooék a következő 30 évben minden januárban döntenek, hogy vagy lecserélik a járgányukat egy újra 9 Dürer dollárért, vagy megszervizeltetik az aktuális járgányukat annyi Dürer dollárért, ahány éves. Legalább hány Dürer dollárt kell Scooby-Dooéknak a járgányaikra költeniük a következő 30 évben összesen, ha már eldöntötték, hogy első alkalommal új járgányt fognak venni?

(6 pont)

C-15. Hányféleképpen juthatunk el egy huszárral a 8×8-as sakktábla bal alsó sarkából a jobb felső sarkába, ha nem léphetünk balra?

Az ábrán a szürke mezők mutatják, hogy hová tud egy huszár egy lépésben eljutni úgy, hogy nem lép balra. A huszárral nem léphetünk le a sakktábláról.

(6 pont)



C-16. Egy kitalált választás szabályai a következők: minden szavazó felállít egy sorrendet a jelöltek között. A választás győztese több körben dől el. Minden körben minden szavazat ahhoz a jelölthöz kerül, aki a sorrendben legelöl van a még versenyben lévő jelöltek közül. Akihez egy körben a legkevesebb szavazat tartozik, végleg kiesik. Ha több ilyen is van, sorsolás dönt köztük a kieső jelöltről. Néhány kör után már csak egy jelölt marad, a győztes. A legutóbbi kitalált választáson négy jelölt indult, A, B, C és D. Tudjuk, hogy 200 szavazó $ABCD$ sorrendbe tette a jelölteket, 150-en a $BCDA$, 201-en pedig a $CDAB$ sorrendet választották. Ezenkívül előfordult x választónál ($x \geq 1$) a $DBCA$ sorrend is, de az eddig felsoroltakon kívül más sorrend nem volt. Hányféle lehet x, ha a választást C nyerte és egy sorsolás sem volt?

(6 pont)

XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Váltó feladatsor

D kategória

D-1. Maigret felügyelő 2025 januárjában összesen négy ügyet oldott meg, ezeket különböző napokon tette. Az év első napján, szerdán oldotta meg az elsőt. A másodikként megoldott ügy megoldásának dátumában a napnak 6 pozitív osztója van. A harmadik és a negyedik ügy megoldása 12 nap eltéréssel történt. Az utolsó ügyet vasárnap oldotta meg. Mi a négy ügy megoldásának dátumaiban a napok összege?
Januárban 31 nap van. (3 pont)

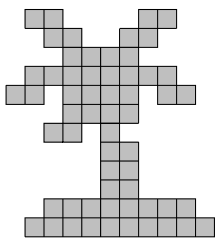
D-2. Rex felügyelő, a kutya, bárányokkal és kétfejű nyulakkal álmodott, összesen 60 lábat és 20 fejet számolt. Hány báránnyal álmodott Rex, ha a saját lábait is beleszámolta, de a fejét nem?
Minden állatnak 4 lába volt az álmában, továbbá Rex a saját fején kívül minden testrészt megszámolt, ami a szövegben szerepel. (3 pont)

D-3. Egy 6×4-es táblázat néhány mezőjébe csokit tettünk, majd minden mezőre ráírtuk, hogy a vele szomszédos mezők közül hányban van csoki. Két mező szomszédos, ha van közös oldaluk vagy csúcsuk. Legfeljebb hány csoki lehet a táblázatban, ha minden mezőre legfeljebb 2-es számot írtunk?
A csokit tartalmazó mezőkre is írtunk számot. Semelyik mező sem szomszédos önmagával. (3 pont)

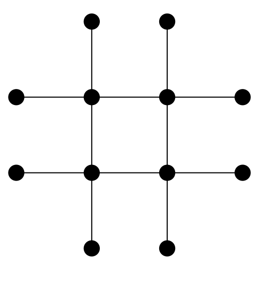
D-4. Összeadtuk a pozitív egész számokat 1-től 10^{10}-ig. Melyik az a legnagyobb k egész szám, amelyre 2^k osztja az összeget? (3 pont)

D-5. Van egy dobozban 9 golyó, 1-től 9-ig számozva. Ezek közül véletlenszerűen kihúzunk két különböző golyót egyszerre. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kihúzott golyókon szereplő számok legnagyobb közös osztója 1? **Válaszként a tört egyszerűsített alakjában a számláló és a nevező összegét adjátok meg!**
Bármely két golyópár kihúzásának azonos a valószínűsége. (4 pont)

D-6. Mennyi a legkisebb olyan körlap sugarának a négyzete, amely teljesen lefedi az ábrázolt pálmafát, és a sugarának négyzete egész szám?
Az ábrán a kis négyzetek oldalainak hossza 1. (4 pont)



D-7. Molli és Tamás meglátogattak 4-4 várost úgy, hogy köztük csak utak mentén közlekedtek. Az ábrán pontok jelölik városokat, ahol járhattak, és szakaszok a köztük haladó utakat. Tudjuk, hogy minden városban legfeljebb az egyikük járt, valamint minden városban legfeljebb egyszer jártak. Hányféleképpen tehették ezt meg?
Két esetet akkor tekintünk különbözőnek, ha Molli és Tamás közül legalább az egyikük más városokat látogatott meg, vagy ugyanazokat más sorrendben. (4 pont)



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Váltó feladatsor

D kategória

D-8. Egy kártyapakli 16 lapból áll, piros, sárga, zöld és kék színben van 1-1 kutya, macska, ló és hal. Alex kirakott négy lapot az asztalra a pakliból. Ezután Béla az egyik lapon megváltoztatta vagy a színt, vagy az állatot. Ekkor azt vette észre, hogy az így kapott négy kártyán mind a négy szín és mind a négy állat pontosan egyszer fordul elő. Hányféle lehetett az Alex által kirakott négy lap, ha a kirakott lapok sorrendje nem számít?

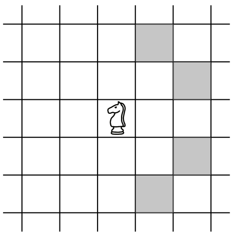
(4 pont)

D-9. Adott egy $ABCD$ trapéz, melynek az AB és CD oldalai párhuzamosak. A B és C csúcsok belső szögfelezőinek métszéspontja legyen M. Az M pontnak a BC oldalra vett tükörképe legyen P. A BC oldal hossza 6 egység, a D és P pontok távolsága 8 egység, továbbá $CBP\sphericalangle = 30°$. Mennyi a DB szakasz egységekben kifejezett hosszának négyzete? (5 pont)

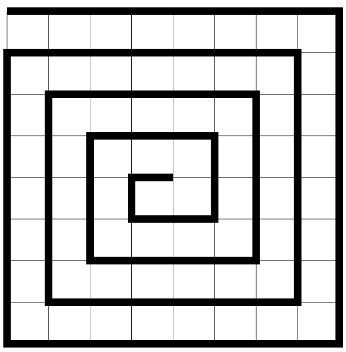
D-10. Scooby-Dooék a következő 30 évben minden januárban döntenek, hogy vagy lecserélik a járgányukat egy újra 9 Dürer dollárért, vagy megszervizeltetik az aktuális járgányukat annyi Dürer dollárért, ahány éves. Legalább hány Dürer dollárt kell Scooby-Dooéknak a járgányaikra költeniük a következő 30 évben összesen, ha már eldöntötték, hogy első alkalommal új járgányt fognak venni?

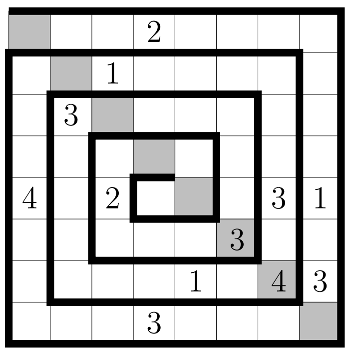
(5 pont)

D-11. Hányféleképpen juthatunk el egy huszárral a 8×8-as sakktábla bal alsó sarkából a jobb felső sarkába, ha nem léphetünk balra?
Az ábrán a szürke mezők mutatják, hogy hová tud egy huszár egy lépésben eljutni úgy, hogy nem lép balra. A huszárral nem léphetünk le a sakktábláról. (5 pont)



D-12. Csabinak, a kis csigának a háza a bal oldali ábrán látható módon 8×8 négyzetből áll. Csabi most tanulja a számokat, egyelőre még csak 4-ig tud számolni. Csabi bátyja úgy akarja segíteni a tanulását, hogy néhány négyzetbe beír egy számot az $1, 2, 3, 4$ közül. Szeretné, hogy a csigavonal mentén kívülről befelé haladva a nemüres négyzetekben az $1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, \ldots, 4$ számok szerepeljenek ebben a sorrendben. Továbbá, hogy Csabi fel ne boruljon, arra is szeretne figyelni, hogy minden sorban és oszlopban mind a négy számjegy pontosan egyszer szerepeljen. Eddig a jobb oldali ábrán látható jegyeket írta be, segíts neki befejezni a kitöltést! Mennyi lesz végül azon szürke mezőkben lévő számok szorzata, melyek nem maradnak üresen?





(5 pont)

XVIII.
Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Váltó feladatsor

D kategória

D-13. Hányféleképpen lehet lehelyezni 5 bástyát egy 5×5-ös sakktáblára úgy, hogy minden olyan mezőnek, amin nincs bástya, legyen a sorában vagy oszlopában bástya?
Két esetet különbözőnek tekintünk, ha van olyan mező, amelyiken az egyik esetben van bástya, a másikban nincs. (6 pont)

D-14. Adott a síkon 600 pont, melyek egy szabályos 600-szög csúcsait alkotják. Megrajzoltuk az összes olyan szabályos sokszöget, amelynek csúcsai a pontok közül kerülnek ki és a szögeik fokban mérve egészek. Mennyi a megrajzolt sokszögek oldalszámainak összege? (6 pont)

D-15. Egy táblán szerepel két szám. Dani egy lépésben mindig letörli az egyik számot, és felírja helyette a két szám összegét. Ezt addig csinálja, amíg a táblán először megjelenik a 42. Hányféleképpen juthat el ehhez a számhoz, ha kezdetben két darab 1-es szerepel a táblán?
Két eljutás megegyezik, ha Dani a két eljutás minden lépésében megegyező értékű számot töröl le. (6 pont)

D-16. A rendőrségen 16 gyanúsított áll sorban, kihallgatásra várva. A háklis rendőr egy lépésben megcserélhet két szomszédos gyanúsítottat egymással. Legalább hány lépésre van szüksége ahhoz, hogy biztosan el tudja érni, hogy egyik gyanúsított se álljon két nála alacsonyabb vagy két nála magasabb ember között?
Minden gyanúsított különböző magasságú. (6 pont)

XVIII. Dürer Verseny

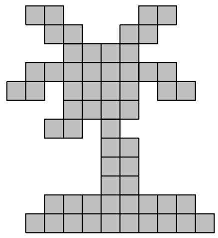
Döntő (2025. 02. 07-09.)

Váltó feladatsor

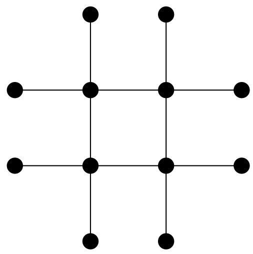
E kategória

E-1. Hányféleképpen lehet felírni a 13860-at két relatív prím, pozitív egész szám szorzataként? *Két felbontást nem tekintünk különbözőnek, ha a két szám ugyanaz, csak más sorrendben.* (3 pont)

E-2. Mennyi a legkisebb olyan körlap sugarának a négyzete, amely teljesen lefedi az ábrázolt pálmafát, és a sugarának négyzete egész szám? *Az ábrán a kis négyzetek oldalainak hossza 1.* (3 pont)



E-3. Molli és Tamás meglátogattak 4-4 várost úgy, hogy köztük csak utak mentén közlekedtek. Az ábrán pontok jelölik városokat, ahol járhattak, és szakaszok a köztük haladó utakat. Tudjuk, hogy minden városban legfeljebb az egyikük járt, valamint minden városban legfeljebb egyszer jártak. Hányféleképpen tehették ezt meg? *Két esetet akkor tekintünk különbözőnek, ha Molli és Tamás közül legalább az egyikük más városokat látogatott meg, vagy ugyanazokat más sorrendben.* (3 pont)



E-4. Hány olyan négyjegyű szám van, melynek minden számjegye különböző, a számjegyei csökkenő sorrendben állnak, továbbá az első és utolsó számjegyének szorzata megegyezik a két középső számjegyének szorzatával? (3 pont)

E-5. Az ABC háromszög AB, BC és CA oldalai rendre 5, 3 és 4 hosszúak. Legyen D az AB oldal A-hoz közelebbi harmadolópontja. Húzzunk párhuzamost AC-vel D-n keresztül, ennek a BC-vel vett metszéspontja legyen E. Legyen d a BDE és az ABC háromszög súlypontjainak távolsága. Mennyi d^2 értéke? **Válaszként a tört egyszerűsített alakjában a számláló és a nevező összegét adjátok meg!** (4 pont)

E-6. Scooby-Dooék a következő 30 évben minden januárban döntenek, hogy vagy lecserélik a járgányukat egy újra 9 Dürer dollárért, vagy megszervizeltetik az aktuális járgányukat annyi Dürer dollárért, ahány éves. Legalább hány Dürer dollárt kell Scooby-Dooéknak a járgányaikra költeniük a következő 30 évben összesen, ha már eldöntötték, hogy első alkalommal új járgányt fognak venni? (4 pont)

E-7. Hányféleképpen lehet lehelyezni 5 bástyát egy 5×5-ös sakktáblára úgy, hogy minden olyan mezőnek, amin nincs bástya, legyen a sorában vagy oszlopában bástya? *Két esetet különbözőnek tekintünk, ha van olyan mező, amelyiken az egyik esetben van bástya, a másikban nincs.* (4 pont)

XVIII.
Dürer Verseny

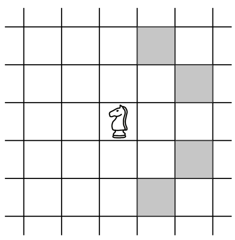
Döntő (2025. 02. 07-09.)

Váltó feladatsor

E kategória

E-8. Adott a síkon 600 pont, melyek egy szabályos 600-szög csúcsait alkotják. Megrajzoltuk az összes olyan szabályos sokszöget, amelynek csúcsai a pontok közül kerülnek ki és a szögeik fokban mérve egészek. Mennyi a megrajzolt sokszögek oldalszámainak összege? (4 pont)

E-9. Hányféleképpen juthatunk el egy huszárral a 8×8-as sakktábla bal alsó sarkából a jobb felső sarkába, ha nem léphetünk balra?
Az ábrán a szürke mezők mutatják, hogy hová tud egy huszár egy lépésben eljutni úgy, hogy nem lép balra. A huszárral nem léphetünk le a sakktábláról. (5 pont)



E-10. A rendőrségen 16 gyanúsított áll sorban, kihallgatásra várva. A háklis rendőr egy lépésben megcserélhet két szomszédos gyanúsítottat egymással. Legalább hány lépésre van szüksége ahhoz, hogy biztosan el tudja érni, hogy egyik gyanúsított se álljon két nála alacsonyabb vagy két nála magasabb ember között?
Minden gyanúsított különböző magasságú. (5 pont)

E-11. Adott egy $ABCD$ trapéz, melynek az AB és CD oldalai párhuzamosak. Az AB, BC, CD, DA oldalak rendre 128, 106, 5, és 65 egység hosszúak. Az A és D csúcsok belső szögfelezőinek metszéspontja legyen X, a B és C csúcsok belső szögfelezőinek metszéspontja legyen Y. Hány egység hosszú az XY szakasz? (5 pont)

E-12. Egy táblán szerepel két szám. Dani egy lépésben mindig letörli az egyik számot, és felírja helyette a két szám összegét. Ezt addig csinálja, amíg a táblán először megjelenik a 42. Hányféleképpen juthat el ehhez a számhoz, ha kezdetben két darab 1-es szerepel a táblán?
Két eljutás megegyezik, ha Dani a két eljutás minden lépésében megegyező értékű számot töröl le. (5 pont)

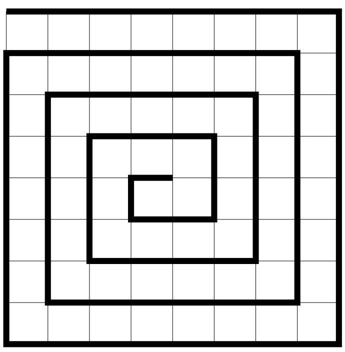
E-13. Benedek egy kétsoros táblázat felső sorába néhány egymást követő 1-nél nagyobb természetes számot írt növekvő sorrendben egymás mellé, majd mindegyik alá a második sorba leírta a legkisebb prímosztóját. Ezután kitörölte az eredeti számokat. Ekkor a táblázatban szereplő számok mindegyikére teljesült, hogy tőle az egyik irányban (balra vagy jobbra) legalább annyi szám volt, mint maga a szám. Legalább hány számot írt be eredetileg Benedek a táblázat felső sorába? (6 pont)

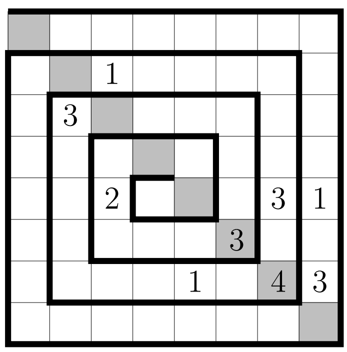
E-14. Anett és Andris egy olyan országban laknak, ahol az autók rendszáma 3 számjegyből áll (000-tól 999-ig) és minden autónak különböző rendszáma van. Az autópályán mennek, és a következő játékot játsszák: Andris gondol egy számra 000 és 999 között, és amikor egy autó megelőzi őket, akkor ennek a kocsinak a rendszámának minden helyiértékéről elárulja, hogy a következő három állítás közül melyik teljesül rá:

- A rendszám adott helyiértéken lévő számjegye megegyezik a gondolt szám adott helyiértékén lévő számjegyével.
- A rendszám adott helyiértéken lévő számjegye szerepel a gondolt számban, de csak valamelyik másik helyiértéken.
- A rendszám adott helyiértéken lévő számjegye egyáltalán nem szerepel az Andris által gondolt számban.

Andris ezenkívül azt is megmondta Anettnek, hogy nincs két egyforma számjegy az általa gondolt számban. Legalább hány különböző autónak kell megelőznie őket ahhoz, hogy Anett biztosan ki tudja találni a gondolt számot? (6 pont)

E-15. Csabinak, a kis csigának a háza a bal oldali ábrán látható módon 8×8 négyzetből áll. Csabi most tanulja a számokat, egyelőre még csak 4-ig tud számolni. Csabi bátyja úgy akarja segíteni a tanulását, hogy néhány négyzetbe beír egy számot az $1, 2, 3, 4$ közül. Szeretné, hogy a csigavonal mentén kívülről befelé haladva a nemüres négyzetekben az $1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, \ldots, 4$ számok szerepeljenek ebben a sorrendben. Továbbá, hogy Csabi fel ne boruljon, arra is szeretne figyelni, hogy minden sorban és oszlopban mind a négy szám pontosan egyszer szerepeljen. Eddig a jobb oldali ábrán látható jegyeket írta be, segíts neki befejezni a kitöltést! Mennyi lesz végül azon szürke mezőkben lévő számok szorzata, melyek nem maradnak üresen?





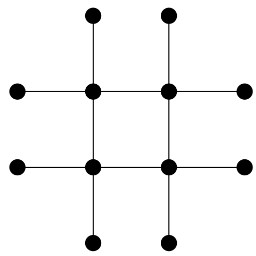
(6 pont)

E-16. Legyen a és b két olyan valós szám, melyekre $a^2 + b^2 = 1$ és $a^{10} + b^{10} = \frac{11}{36}$. Mennyi $a^{12} + b^{12}$? **Válaszként a tört egyszerűsített alakjában a számláló és a nevező összegét adjátok meg!**

(6 pont)

E$^+$-1. Hányféleképpen lehet felírni a 13860-at két relatív prím, pozitív egész szám szorzataként? *Két felbontást nem tekintünk különbözőnek, ha a két szám ugyanaz, csak más sorrendben.* (3 pont)

E$^+$-2. Molli és Tamás meglátogattak 4-4 várost úgy, hogy köztük csak utak mentén közlekedtek. Az ábrán pontok jelölik városokat, ahol járhattak, és szakaszok a köztük haladó utakat. Tudjuk, hogy minden városban legfeljebb az egyikük járt, valamint minden városban legfeljebb egyszer jártak. Hányféleképpen tehették ezt meg?
Két esetet akkor tekintünk különbözőnek, ha Molli és Tamás közül legalább az egyikük más városokat látogatott meg, vagy ugyanazokat más sorrendben.
(3 pont)



E$^+$-3. Hány olyan négyjegyű szám van, melynek minden számjegye különböző, a számjegyei csökkenő sorrendben állnak, továbbá az első és utolsó számjegyének szorzata megegyezik a két középső számjegyének szorzatával? (3 pont)

E$^+$-4. Scooby-Dooék a következő 30 évben minden januárban döntenek, hogy vagy lecserélik a járgányukat egy újra 9 Dürer dollárért, vagy megszervizeltetik az aktuális járgányukat annyi Dürer dollárért, ahány éves. Legalább hány Dürer dollárt kell Scooby-Dooéknak a járgányaikra költeniük a következő 30 évben összesen, ha már eldöntötték, hogy első alkalommal új járgányt fognak venni? (3 pont)

E$^+$-5. Hányféleképpen lehet lehelyezni 5 bástyát egy 5×5-ös sakktáblára úgy, hogy minden olyan mezőnek, amin nincs bástya, legyen a sorában vagy oszlopában bástya?
Két esetet különbözőnek tekintünk, ha van olyan mező, amelyiken az egyik esetben van bástya, a másikban nincs. (4 pont)

E$^+$-6. Adott egy $ABCD$ trapéz, melynek az AB és CD oldalai párhuzamosak. Az AB, BC, CD, DA oldalak rendre 128, 106, 5, és 65 egység hosszúak. Az A és D csúcsok belső szögfelezőinek metszéspontja legyen X, a B és C csúcsok belső szögfelezőinek metszéspontja legyen Y. Hány egység hosszú az XY szakasz? (4 pont)

E$^+$-7. A rendőrségen 16 gyanúsított áll sorban, kihallgatásra várva. A háklis rendőr egy lépésben megcserélhet két szomszédos gyanúsítottat egymással. Legalább hány lépésre van szüksége ahhoz, hogy biztosan el tudja érni, hogy egyik gyanúsított se álljon két nála alacsonyabb vagy két nála magasabb ember között?
Minden gyanúsított különböző magasságú. (4 pont)

E$^+$-8. Egy táblán szerepel két szám. Dani egy lépésben mindig letörli az egyik számot, és felírja helyette a két szám összegét. Ezt addig csinálja, amíg a táblán először megjelenik a 42. Hányféleképpen juthat el ehhez a számhoz, ha kezdetben két darab 1-es szerepel a táblán?
Két eljutás megegyezik, ha Dani a két eljutás minden lépésében megegyező értékű számot töröl le. (4 pont)

E$^+$-9. Anett és Andris egy olyan országban laknak, ahol az autók rendszáma 3 számjegyből áll (000-tól 999-ig) és minden autónak különböző rendszáma van. Az autópályán mennek, és a következő játékot játsszák: Andris gondol egy számra 000 és 999 között, és amikor egy autó megelőzi őket, akkor ennek a kocsinak a rendszámának minden helyiértékéről elárulja, hogy a következő három állítás közül melyik teljesül rá:

- A rendszám adott helyiértéken lévő számjegye megegyezik a gondolt szám adott helyiértékén lévő számjegyével.
- A rendszám adott helyiértéken lévő számjegye szerepel a gondolt számban, de csak valamelyik másik helyiértéken.
- A rendszám adott helyiértéken lévő számjegye egyáltalán nem szerepel az Andris által gondolt számban.

Andris ezenkívül azt is megmondta Anettnek, hogy nincs két egyforma számjegy az általa gondolt számban. Legalább hány különböző autónak kell megelőznie őket ahhoz, hogy Anett biztosan ki tudja találni a gondolt számot? (5 pont)

E$^+$-10. Benedek egy kétsoros táblázat felső sorába néhány egymást követő 1-nél nagyobb természetes számot írt növekvő sorrendben egymás mellé, majd mindegyik alá a második sorba leírta a legkisebb prímosztóját. Ezután kitörölte az eredeti számokat. Ekkor a táblázatban szereplő számok mindegyikére teljesült, hogy tőle az egyik irányban (balra vagy jobbra) legalább annyi szám volt, mint maga a szám. Legalább hány számot írt be eredetileg Benedek a táblázat felső sorába? (5 pont)

E$^+$-11. Vegyük a síkbeli koordináta-rendszer azon pontjait, melyeknek mindkét koordinátája 46-nál kisebb pozitív egész szám. Nevezzünk egy rácsnégyzetet szépnek, ha a csúcsai ezek közül a pontok közül kerülnek ki, az oldalai pedig párhuzamosak valamelyik koordinátatengellyel. Hány olyan rácspont van, melyre azon szép rácsnégyzetek száma, melyeknek nem csúcsa ez a rácspont, osztható 13-mal? (5 pont)

E$^+$-12. Adott a négy különböző A, B, C és D pont a térben. Tudjuk, hogy közülük semelyik három sincs egy egyenesen, továbbá végtelen sok olyan gömb létezik, amely érinti az AB, BC, CD és DA szakaszokat egy belső pontjukban. Jelölje ezen szakaszoknak a hosszait rendre a, b, c és d. Ezekről tudjuk, hogy különböző egyjegyű pozitív egész számok. Hányféle lehet ezek alapján az (a, b, c, d) rendezett négyes? (5 pont)

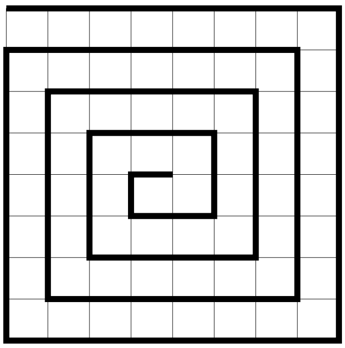
XVIII. Dürer Verseny

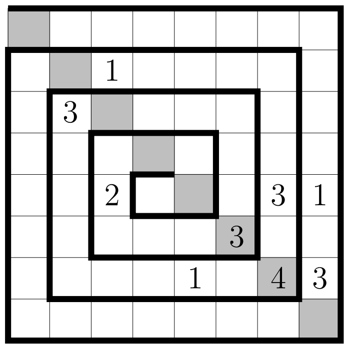
Döntő (2025. 02. 07-09.)

Váltó feladatsor

E+ kategória

E$^+$-13. Csabinak, a kis csigának a háza a bal oldali ábrán látható módon 8×8 négyzetből áll. Csabi most tanulja a számokat, egyelőre még csak 4-ig tud számolni. Csabi bátyja úgy akarja segíteni a tanulását, hogy néhány négyzetbe beír egy számot az $1, 2, 3, 4$ közül. Szeretné, hogy a csigavonal mentén kívülről befelé haladva a nemüres négyzetekben az $1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, \ldots, 4$ számok szerepeljenek ebben a sorrendben. Továbbá, hogy Csabi fel ne boruljon, arra is szeretne figyelni, hogy minden sorban és oszlopban mind a négy szám pontosan egyszer szerepeljen. Eddig a jobb oldali ábrán látható jegyeket írta be, segíts neki befejezni a kitöltést! Mennyi lesz végül azon szürke mezőkben lévő számok szorzata, melyek nem maradnak üresen?





(6 pont)

E$^+$-14. Legyen x olyan valós szám, melyre $\sin^{10}(x) + \cos^{10}(x) = \frac{11}{36}$. Mennyi $\sin^{12}(x) + \cos^{12}(x)$? **Válaszként a tört egyszerűsített alakjában a számláló és a nevező összegét adjátok meg!**

(6 pont)

E$^+$-15. Csongi a kockás füzetébe szakaszokat rajzolgat úgy, hogy minden szakasznak az egyik végpontja az origó, a másik pedig az első síknegyednek (ahol mindkét koordináta nemnegatív) egy rácspontja. Az első szakasz a $(0, 1)$ pontba, a második pedig az $(1, 1)$ pontba megy. Innentől kezdve az új szakaszt mindig úgy rajzolja be, hogy az x tengellyel bezárt szöge szigorúan az előző két szakasz x tengellyel bezárt szöge közé essen, valamint ezek közül minimális legyen a hossza. Mennyi a 666. berajzolt szakasz hossznégyzetének a 66-os maradéka?

Minden lépésben pontosan egy szakasz van, ami megfelel a feltételeknek. (6 pont)

E$^+$-16. A Baker Street-i végállomásra menetrend szerint 10 percenként érkezik villamos és egyenletes valószínűséggel késik legalább 0, de legfeljebb t percet, ahol t egy 10-nél kisebb pozitív valós szám. A késések egymástól függetlenek. A villamosmegállóban mindig ki van írva, hogy a legközelebbi villamos, ami még nem érkezett meg, mennyit fog késni (a kiíráson tökéletes pontossággal szerepel a következő villamos késése és ez a járat megérkezéséig nem változik). Áron 12:00 és 13:00 között a villamosok késésétől függetlenül, egyenletes valószínűséggel ér ki a megállóba. Így az érkezésekor a megállóban látható késés várható értéke 4 perc. Mennyi t értéke? **Tudjuk, hogy t egyértelműen írható $a + \sqrt{b}$ alakba, ahol a és b egészek. Válaszként $a + b$ értékét adjátok meg!** (6 pont)

XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Váltó megoldókulcs

C D kategória

#	MO	A feladat szövege	P
C-1	9300	Egy mesebeli cseresznyefának 25 ága	3p
C-2	9632	Melyik az a legnagyobb négyjegyű szám, melynek	3p
C-3	53	Maigret felügyelő 2025 januárjában	3p
C-4	8	Rex felügyelő, a kutya, bárányokkal és kétfejű	3p
C-5	103	Péter nyomozó a 0, 1, 2, 3 számkártyákból	4p
C-6	8	Egy 6×4-es táblázat néhány mezőjébe	4p
C-7	61	Mennyi a legkisebb olyan körlap sugarának	4p
C-8	7	Egy városban van hat kritikus pont, melyek	4p
C-9	21	Scooby-Doo otthoni készletében 32 doboz	5p
C-10	256	Molli és Tamás meglátogattak 4-4 várost	5p
C-11	288	Egy kártyapakli 16 lapból áll, piros,	5p
C-12	91	Adott egy $ABCD$ trapéz, melynek az AB	5p
C-13	3072	Csabinak, a kis csigának a háza a bal oldali	6p
C-14	113	Scooby-Dooék a következő 30 évben minden	6p
C-15	18	Hányféleképpen juthatunk el egy huszárral	6p
C-16	448	Egy kitalált választás szabályai a következők:	6p

#	MO	A feladat szövege	P
D-1	53	Maigret felügyelő 2025 januárjában	3p
D-2	8	Rex felügyelő, a kutya, bárányokkal és kétfejű	3p
D-3	8	Egy 6×4-es táblázat néhány mezőjébe	3p
D-4	9	Összeadtuk a pozitív egész számokat 1-től	3p
D-5	7	Van egy dobozban 9 golyó, 1-től 9-ig számozva.	4p
D-6	61	Mennyi a legkisebb olyan körlap sugarának	4p
D-7	256	Molli és Tamás meglátogattak 4-4 várost	4p
D-8	288	Egy kártyapakli 16 lapból áll, piros,	4p
D-9	91	Adott egy $ABCD$ trapéz, melynek az AB	5p
D-10	113	Scooby-Dooék a következő 30 évben minden	5p
D-11	18	Hányféleképpen juthatunk el egy huszárral	5p
D-12	3072	Csabinak, a kis csigának a háza a bal oldali	5p
D-13	6130	Hányféleképpen lehet lehelyezni 5 bástyát	6p
D-14	8400	Adott a síkon 600 pont, melyek egy szabályos	6p
D-15	12	Egy táblán szerepel két szám. Dani egy	6p
D-16	60	A rendőrségen 16 gyanúsított áll sorban,	6p

XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Váltó megoldókulcs

E
E+
kategória

#	MO	A feladat szövege	P
E-1	16	Hányféleképpen lehet felírni a 13860-at két	3p
E-2	61	Mennyi a legkisebb olyan körlap sugarának	3p
E-3	256	Molli és Tamás meglátogattak 4-4 várost	3p
E-4	5	Hány olyan négyjegyű szám van, melynek	3p
E-5	133	Az ABC háromszög AB, BC és CA oldalai	4p
E-6	113	Scooby-Dooék a következő 30 évben minden	4p
E-7	6130	Hányféleképpen lehet lehelyezni 5 bástyát	4p
E-8	8400	Adott a síkon 600 pont, melyek egy szabályos	4p
E-9	18	Hányféleképpen juthatunk el egy huszárral	5p
E-10	60	A rendőrségen 16 gyanúsított áll sorban,	5p
E-11	19	Adott egy $ABCD$ trapéz, melynek az AB	5p
E-12	12	Egy táblán szerepel két szám. Dani egy	5p
E-13	17	Benedek egy kétsoros táblázat felső sorába	6p
E-14	641	Anett és Andris egy olyan országban laknak,	6p
E-15	3072	Csabinak, a kis csigának a háza a bal oldali	6p
E-16	67	Legyen a és b két olyan valós szám, melyekre	6p

#	MO	A feladat szövege	P
E^+-1	16	Hányféleképpen lehet felírni a 13860-at két	3p
E^+-2	256	Molli és Tamás meglátogattak 4-4 várost	3p
E^+-3	5	Hány olyan négyjegyű szám van, melynek	3p
E^+-4	113	Scooby-Dooék a következő 30 évben minden	3p
E^+-5	6130	Hányféleképpen lehet lehelyezni 5 bástyát	4p
E^+-6	19	Adott egy $ABCD$ trapéz, melynek az AB	4p
E^+-7	60	A rendőrségen 16 gyanúsított áll sorban,	4p
E^+-8	12	Egy táblán szerepel két szám. Dani egy	4p
E^+-9	641	Anett és Andris egy olyan országban laknak,	5p
E^+-10	17	Benedek egy kétsoros táblázat felső sorába	5p
E^+-11	80	Vegyük a síkbeli koordináta-rendszer azon	5p
E^+-12	272	Adott a négy különböző A,	5p
E^+-13	3072	Csabinak, a kis csigának a háza a bal oldali	6p
E^+-14	67	Legyen x olyan valós szám, melyre	6p
E^+-15	23	Csongi a kockás füzetébe szakaszokat	6p
E^+-16	1350	A Baker Street-i végállomásra	6p

A XVIII. Dürer Verseny (2024-2025) döntőjének eredményei - C kategória

						Kifejtős forduló							Váltóforduló																	Pont
Hely	Csapatnév	Tagok	Évf.	Iskola	Felkészítő tanárok	1.	2.	3.	4.	5.	Játék	Σ	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	Σ	
1.	**Trefort4**	Bucskó Merse Tóth Ilona Csenge Szabados Anita	10. 9. 9.	ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium; Budapest	Gáspár Csaba, Mohay Péter	9	8	10	9	2	12	**50**	3	2	3	3	4	4	4	4	5	4	5	0	6				**47**	**97**
2.	**Trefort2**	Répcevölgyi Csanád Barcza Liza Bajtai Blanka	10. 10. 9.	ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium; Budapest	Ujházy Márton, Gáspár Csaba	11	10	8	12	6	12	**59**	3	3	3	3	2	4	0	4	5	5	0	0					**32**	**91**
3.	**Príma Prímek**	Hadházi Borbála Rákosi Dóra Koppányi Márton	9. 9. 9.	ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium; Budapest	Gáspár Csaba, Tobisch Márta	12	10	12	4	2	12	**52**	3	3	3	3	4	4	0	4	5	4	3	0	0				**36**	**88**
4.	**BAB**	Serfőző Balázs Eninger Adél Mika Boglárka	9. 10. 10.	Eötvös József Gimnázium és Kollégium; Tata	Krisztin Németh Andrea, Tóth Rita Anikó	11	10	11	9	3	12	**56**	3	3	3	3	4	3	0	4	5	0	0	0	0				**28**	**84**
4.	**csontlebontó korallok**	Jin Chongyang Bender Csilla Kondor Márton	9. 9. 9.	Szent István Gimnázium; Budapest	Dankowsky Anna Zóra	9	10	9	12	2	12	**54**	3	3	2	3	4	4	3	4	4	0	0	0					**30**	**84**
4.	**REFI1**	Gottlasz Nóra Benkó Balázs Petrás Áron	10. 9. 9.	Szentendrei Református Gimnázium; Szentendre	Földiné Koczor Tünde	12	9	4	12	6	12	**55**	3	2	3	3	3	4	2	4	5	0	0	0					**29**	**84**
7.	**M.a.t.e.k.o.s.o.k**	Galavics Zsóka Murai Balázs Zámbó Ákos	9. 9. 9.	ELTE Bolyai János Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Szombathely	Fekete Márta	11	8	9	5	8	12	**53**	3	3	3	3	4	4	0	4	5	0	0	0	0				**29**	**82**
7.	**Trefort5**	Vida Samu Nagy Eszter Füzes Bulcsú	10. 10. 9.	ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium; Budapest	Gáspár Csaba, Mohay Péter, Szabó Zsanett, Tobisch Márta	12	10	7	3	3	12	**47**	3	3	3	3	3	4	2	4	5	5	0	0					**35**	**82**
9.	**Trefort9**	Izápy Flóra Kummer Lóránt Banos Kamilla	10. 9. 9.	ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium; Budapest	Gáspár Csaba, Szabó Zsanett, Tobisch Márta	7	10	11	5	-	12	**45**	3	3	3	3	2	4	4	4	5	0	4						**35**	**80**
10.	**Matek2**	Atanaszov Kornél Máthé Gergely Watterich Vanda Violetta	9. 9. 9.	Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium; Budapest	Számadóné Békéssy Szilvia, Kilinné Vörös Bernadett	11	10	9	2	2	12	**46**	3	3	3	3	4	4	0	4	5	0	0						**29**	**75**
11.	**A kocka el van vetve**	Sajben Anna Gréta Apáti Máté Patkós Liliom	10. 9. 9.	Bornemisza Péter Gimnázium, Általános Iskola, Alapfokú Művészeti Iskola, Óvoda és Sportiskola; Budapest	Zsilinszky Eszter, Vassné Gáll Judit	5	10	11	7	2	12	**47**	3	2	3	3	3	3	3	4	0	3	0						**27**	**74**
12.	**Gamma**	Bíró Borisz Major-Cicás Vénusz Emma Gyulai Kristóf	10. 10. 9.	Szent Imre Katolikus Gimnázium, Két Tanítási Nyelvű Általános Iskola, Kollégium, Óvoda és Alapfokú Művészeti Iskola; Nyíregyháza	Lajtosné Krajnyák Éva	10	9	11	2	1	3	**36**	3	2	1	3	3	4	0	4	3	0	0						**23**	**59**
13.	**KAB**	Boda Marcell Moczok Ágota Barna Ákos	9. 10. 9.	Tóth Árpád Gimnázium; Debrecen	Nagyné Schmidt Éva, Nagyné Szabó Erzsébet	5	8	9	4	1	3	**30**	3	3	3	3	4	4	0	4	0	0	0	0	0				**24**	**54**
14.	**Reciprok**	Csuhaj Anna Liliána Radványi Gergő Ákos Takács Orsolya	9. 9. 10.	Egri Dobó István Gimnázium; Eger	Dr. Pappné Balázs Judit, Bárányné Rum Györgyi	11	8	2	1	1	0	**23**	3	3	3	3	3	3	0	4	4	0	0	0	0				**26**	**49**

A XVIII. Dürer Verseny (2024-2025) döntőjének eredményei - D kategória

						Kifejtős forduló							Váltóforduló																	Pont
Hely	Csapatnév	Tagok	Évf.	Iskola	Felkészítő tanárok	1.	2.	3.	4.	5.	Játék	Σ	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	Σ	
1.	**Csillámpigeons**	Bereczki Balázs Szentes Ágnes Dezső Szilárd	12. 9. 12.	Székely Mikó Kollégium; Sepsiszentgyörgy	Deák Éva, Oláh-Ilkei Árpád, Ugron Szabolcs	10	11	12	8	4	12	**57**	3	3	3	3	4	4	4	0	5	4	0	5	6	0			**44**	**101**
2.	**Trefort13**	Dudás Ágoston Török Vince Márta Kíra	12. 12. 11.	ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium; Budapest	Friedman Anna Eszter	10	12	9	4	6	12	**53**	3	3	3	3	3	4	4	0	5	3	0	5	5	0			**41**	**94**
3.	**Függők**	Susán Henrik Zoltán Ragó Marcell Szaniszló Fanni	12. 12. 11.	Neumann János Gimnázium, Technikum és Kollégium; Eger	Petrásné Szűcs Eleonóra, Horváth Zita	12	12	8	0	-	12	**44**	3	3	3	3	3	4	4	4	5	4	0						**36**	**80**
4.	**SIAC**	Vida Katalin Anna Rozmán-Juhász Botond Szabó Álmos Benedek	10. 10. 9.	Dunakeszi Radnóti Miklós Gimnázium; Dunakeszi	Csordás Lászlóné, Druzsin Zsuzsanna, Sitery Beáta	9	10	8	4	6	6	**43**	3	3	3	3	4	4	0	0	0	4	5	5	0	0	0		**34**	**77**
5.	**Hosszú haj rövid ész**	Lefter Miklós Lefter Sebestyén Jeges Barbara	12. 10. 12.	Hőgyes Endre Gimnázium; Hajdúszoboszló	Dr. Bajza Istvánné	7	10	12	3	5	12	**49**	3	3	0	0	4	4	0	3	4	3	3						**27**	**76**
6.	**Logikai Lázadók**	Vaszilievits-Sömjén Vilma Róza Nadrai Patrik Szani Lőrinc Szilárd	9. 9. 9.	Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest	Kocsis Szilveszter, Ádám Réka	12	3	12	12	2	12	**53**	3	3	2	3	4	3	4	0	0	0							**22**	**75**
7.	**Szét-csapat-lyuk**	Nagy Kata Laki Csanád Szabó Máté	12. 11. 11.	Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnáziuma és Kollégiuma; Pécs	Pánczél Róbert	10	3	5	4	3	12	**37**	3	3	3	2	4	4	4	0	5	4	4						**36**	**73**
8.	**IKSZ**	Süth Miklós Tejfalussy-Gecse Éva Fruzsina Váczi Lóránt Tamás	10. 10. 10.	Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium; Budapest Alternatív Közgazdasági Gimnázium; Budapest Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium; Budapest	Kötél Tamás	8	4	12	3	6	12	**45**	3	3	3	2	4	4	3	0	4	0	0	0					**26**	**71**
9.	**Paralelepipedon**	Jánó Ákos Bangyán Bendegúz Szilvási Dorottya	11. 11. 11.	Székely Mikó Kollégium; Sepsiszentgyörgy	Oláh-Ilkei Árpád	10	3	7	4	7	12	**43**	3	3	3	3	3	4	0	0	0	4	0	0					**23**	**66**
10.	**Neu_1**	Tót Léna Koncz Regina Kurcz Levente Péter	11. 12. 12.	Neumann János Gimnázium, Technikum és Kollégium; Eger	Horváth Zita, Dománné Kun Gabriella	10	3	8	4	3	12	**40**	3	3	3	2	3	4	0	0	0	4							**22**	**62**
11.	**A Gyűrű Szövetsége**	Baán Illés Attila Korompay Péter Jiang Yufei	10. 10. 10.	Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium; Budapest	Kilinné Vörös Bernadett	9	12	8	0	3	12	**44**	3	3	3	0	4	0	3	0	0	0	0	0					**16**	**60**
12.	**IBM2024**	Lukács Imre Márk Dovák Bodza Fodor Zétény	12. 12. 11.	Fényi Gyula Jezsuita Gimnázium, Kollégium és Óvoda; Miskolc	Svidróné Grallert Marianna, Bredács Éva	10	1	9	4	2	12	**38**	3	3	3	3	3	2	0	3	0	0	0	0	0	0			**20**	**58**
13.	**Gyökmackók_1**	Szabó Ádám Virág Eszter Galik Kamilla	11. 11. 11.	Piarista Gimnázium, Kollégium, Általános Iskola és Óvoda; Kecskemét	Soós Zoltán Ferenc	12	4	5	4	-	12	**37**	2	3	2	3	2	0	4	0	0	0							**16**	**53**
14.	**B**	Kádas Roland Félix Dobai Emma Schwarczenberger Hanna	9. 9. 10.	Eötvös József Gimnázium és Kollégium; Tata	Németh Sarolta	5	3	8	4	2	12	**34**	3	3	2	0	4	0	4	0	0	0							**16**	**50**
15.	**Pistagoreusok**	Darnai Lili Biró Sándor Gergő Csala Zsombor	11. 11. 11.	Hőgyes Endre Gimnázium; Hajdúszoboszló	Kiss István	10	0	5	4	0	12	**31**	3	3	3	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0				**13**	**44**
16.	**Kati néni bogárkái**	Imolya Mirella Petra Havasi Dominik Olivér Pfaff Noel	9. 9. 9.	Miskolci Herman Ottó Gimnázium; Miskolc	Gulyásné Nemes Katalin, Pilzné Nagylaki Tünde	8	0	7	4	-	0	**19**	3	2	3	0	2	3	2	0									**15**	**34**

A XVIII. Dürer Verseny (2024-2025) döntőjének eredményei - E kategória

						Kifejtős forduló							Váltóforduló																	Pont
Hely	Csapatnév	Tagok	Évf.	Iskola	Felkészítő tanárok	1.	2.	3.	4.	5.	Játék	Σ	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	Σ	
1.	**Izogonális interpoláció**	Sziklai Eszter Juhász-Molnár Mirkó Szabó Sámuel	8. 10. 10.	ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Általános Iskola és Gyakorló Gimnázium; Budapest Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest	Bárth Balázs, Dobos Sándor, Lenger Dániel, Gyenes Zoltán	12	-	12	0	0	12	**36**	3	3	3	3	4	3	3	4	5	5	0	4	6				**46**	**82**
2.	**(I+H)F**	Bui Nikolett Balla Ignác Baran Júlia	10. 9. 9.	Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium; Debrecen	Dobos Sándor, Lenger Dániel, Gyenes Zoltán, Farkas Margit	12	12	10	7	-	0	**41**	2	3	3	3	4	3	3	3	5	5	5	0	0				**39**	**80**
3.	**Éliás Tóbiás egy tál dödöle**	Vödrös Dániel Virág Tóbiás Horák Zsófia	10. 10. 10.	Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest	Dobos Sándor, Lenger Dániel, Gyenes Zoltán	12	12	6	12	7	0	**49**	3	3	2	3	3	3	4	2	5	0							**28**	**77**
4.	**mindegy**	Novothny Petra Csatári Bence Ozsváth Botond	10. 10. 10.	Kempelen Farkas Gimnázium; Budapest Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest	Szoldatics József, Romhányi Katalin, Pósa Lajos, Simon Péter, Damásdi Gábor	8	4	12	0	-	0	**24**	3	2	2	3	4	3	4	3	5	0	0	0	0				**29**	**53**
5.	**Reiterék ifjai**	Papp Barnabás Kökény Kristóf Nagy Korina	12. 11. 12.	Kecskeméti Bányai Júlia Gimnázium; Kecskemét Kecskeméti Katona József Gimnázium; Kecskemét Kecskeméti Bányai Júlia Gimnázium; Kecskemét	Reiterné Makra Zsuzsanna, Reiter István, Dr. Nádháziné Borbola Éva	8	2	11	0	0	0	**21**	2	1	2	3	4	2	4	4	3	5	0						**30**	**51**
6.	**Ghoti and tchoghs**	Nagypál Katalin Krisztina Péter Hanna Sha Jingyuan	9. 11. 10.	Gymnázium-Gimnázium; Filakovo Bartók Béla Elméleti Líceum; Temesvár Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest	Bereczki Zoltán, Molnár László, Păcurar Mária, Szepessy Luca	4	12	4	0	0	0	**20**	3	2	1	3	4	0	2	4	5	0							**24**	**44**
7.	**42**	Rácz Kata Nagy Martin Pocsay Levente László	11. 12. 12.	Földes Ferenc Gimnázium; Miskolc	Csendi Balázs, Fejér Szabolcs, Grallert Krisztina, Dr. Győry Ákos, Dr. Szabadfalviné Kormányos Anikó, Tóth Tibor, Vass Iván	12	1	3	0	-	0	**16**	3	0	3	3	4	3	4	0	0								**20**	**36**
7.	**Puppi Barna**	Dégi Dominik Ligeti Blanka Varga Dániel	11. 12. 12.	Kaposvári Táncsics Mihály Gimnázium; Kaposvár	Ruffné Szakály Zsuzsanna, Tóthné Berzsán Gabriella, Szigeti Tamás, Trembeczki Csaba	7	0	2	3	-	0	**12**	3	3	3	3	4	4	4	0	0	0							**24**	**36**
9.	**Furik**	Leskó Gábor Oros Nóra Magó Máté	12. 11. 12.	Premontrei Szent Norbert Gimnázium, Egyházzenei Szakgimnázium, Alapfokú Művészeti Iskola és Kollégium; Gödöllő	Hegedűsné Láng Andrea, Polák Péter	7	4	3	0	1	6	**21**	3	3	0	3	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0			**11**	**32**

A XVIII. Dürer Verseny (2024-2025) döntőjének eredményei - E+ kategória

						Kifejtős forduló							Váltóforduló																	Pont
Hely	**Csapatnév**	**Tagok**	**Évf.**	**Iskola**	**Felkészítő tanárok**	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**Játék**	**Σ**	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	**13.**	**14.**	**15.**	**16.**	**Σ**	
1.	**zekas entistván**	Keresztély Zsófia Kovács Benedek Noel Holló Martin	12. 12. 11.	Szent István Gimnázium; Budapest Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest	Molnár-Sáska Ildikó, Juhász Péter, Lenger Dániel, Kocsis Szilveszter, Gyenes Zoltán, Dobos Sándor, Joao Campos Vargas	12	12	11	0	0	12	**47**	3	3	2	3	4	0	4	4	5	3	5						**36**	**83**
2.	**A Geometria Gigantikus Géniuszai: a Fékezhetetlen Fazekasos Fokozómesterek és a Baricentrikus-koordinátákkal Bármit Bedaráló Boldi helyett a Morálisan Megkérdőjelezhető Módszerekkel Mindent Megoldó Marci**	Lakner Hanna Szakács Ábel Czirják Márton Pál	11. 11. 11.	Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest	Hujter Bálint, Gyenes Zoltán, Dr. Kiss Géza, Dobos Sándor, Holló Gábor, Nagy Kartal, Sándor András, Surányi László, Terpai Tamás, Molnár-Szabó Vilmos, Pósa Lajos, Bán-Szabó Áron, Fleiner Zsigmond, Kovács Benedek, Simon László Bence, Borbényi Márton, Frenkel Péter, Matolcsi Dávid, Hraskó András, Harangi Viktor	12	12	5	-	0	6	**35**	2	1	3	3	4	0	4	0	4	4	0	0	0	0	0		**25**	**60**
3.	**---- --- -------**	Haskó Emma Kocsis Péter Prohászka Bulcsú	12. 11. 11.	Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Budapest	Dr. Kiss Géza, Gyenes Zoltán, Hujter Bálint, Nagy Kartal, Lenger Dániel, Kocsis Szilveszter	12	11	1	8	0	0	**32**	1	2	0	3	4	4	4	4	5	0	0	0	0	0	0		**27**	**59**
4.	**Fazekas**	Bodor Noémi Görömbey Tamás Vámosi Bendegúz Péter	10. 11. 11.	Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium; Debrecen	Remeténé Orvos Viola, Tóth Mariann, Balázs Tivadar	-	11	4	0	0	0	**15**	3	3	3	3	4	4	4	4	5	4	5	0					**42**	**57**
5.	**Fánk**	Pinczés Bálint Antal Barnabás Su Wenlan	11. 11. 11.	Szent István Gimnázium; Budapest	Jeneiné Bicsák Krisztina, Domán Dániel, Juhász István, Nagy Kartal	1	-	-	0	0	0	**1**	3	3	3	3	3	4	3	4	5	0	0						**31**	**32**