XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Váltó megoldókulcs

C kategória

C1. Egy mesebeli cseresznyefának 25 ága van, minden ágból 93 gally ágazik el és minden gallyon 4 cseresznye található. Hány cseresznye van a fán?

Megoldás: A cseresznyék száma $25 \cdot 93 \cdot 4 = 93 \cdot 100 = 9300$.

C2. Melyik az a legnagyobb négyjegyű szám, melynek minden számjegye különböző, a számjegyei csökkenő sorrendben állnak, továbbá az első és utolsó számjegyének szorzata megegyezik a két középső számjegyének szorzatával?

Megoldás: Legyen a számunk $\overline{abcd}$. Világos, hogy a 0 számjegyet nem használhatjuk, mert akkor az egyik szorzat 0 lenne, a másik pedig nem. Mivel a lehető legnagyobb négyjegyű számot keressük, próbáljunk meg az a helyére 9-et rakni. Vegyük észre, hogy ekkor $b \cdot c$ osztható 9-cel, így vagy az egyiknek 9-cel oszhatónak kell lennie, vagy mindkettőnek 3-mal oszthatónak. Előbbi nem lehetséges, hiszen különbözőek a számjegyek. A két 3-mal osztható számjegy csak $b = 6$ és $c = 3$ lehet, így $9 \cdot d = 6 \cdot 3$, azaz $d = 2$, a kapott szám pedig 9632. Mivel ez az egyetlen 9-cel kezdődő négyjegyű szám, ami megfelel a feltételeknek, biztosan nincs nála nagyobb.

C3. Maigret felügyelő 2025 januárjában összesen négy ügyet oldott meg, ezeket különböző napokon tette. Az év első napján, szerdán oldotta meg az elsőt. A másodikként megoldott ügy megoldásának dátumában a napnak 6 pozitív osztója van. A harmadik és a negyedik ügy megoldása 12 nap eltéréssel történt. Az utolsó ügyet vasárnap oldotta meg. Mi a négy ügy megoldásának dátumaiban a napok összege?

Januárban 31 nap van.

Megoldás: Az 1. ügy napja adott. A 4. ügy napja négyféle lehet: 5, 12, 19, 26. Az első kettő nem lehetséges, mert nincs 12-vel korábbi nap januárban. A 19 esetén 7-e a 3. eset napja, de ekkor a 2. ügy csak másodika és hatodika között lehet, ám itt egy számnak sincs 6 pozitív osztója. A 4. ügyet tehát 26-án oldotta meg, a 3.-at 14-én. Az egyetlen 14-nél kisebb pozitív egész szám, aminek 6 osztója van a 12, így ennek kell a 2. ügy megoldási dátumának lennie. A megoldási napokat mind egyértelműen meghatároztuk, ezek összege: $1 + 12 + 14 + 26 = 53$.

C4. Rex felügyelő, a kutya, bárányokkal és kétfejű nyulakkal álmodott, összesen 60 lábat és 20 fejet számolt. Hány báránnyal álmodott Rex, ha a saját lábait is beleszámolta, de a fejét nem?

Minden állatnak 4 lába volt az álmában, továbbá Rex a saját fején kívül minden testrészt megszámolt, ami a szövegben szerepel.

Megoldás: Tegyük fel, hogy x báránnyal és y kétfejű nyúllal álmodott. Ekkor $4 \cdot (1 + x + y) = 60$ (lábak) és $x + 2 \cdot y = 20$ (fejek), amiből $x + y = 14 \Rightarrow y = 20 - (x + y) = 6 \Rightarrow x = 8$, tehát 8 báránnyal álmodott Rex.

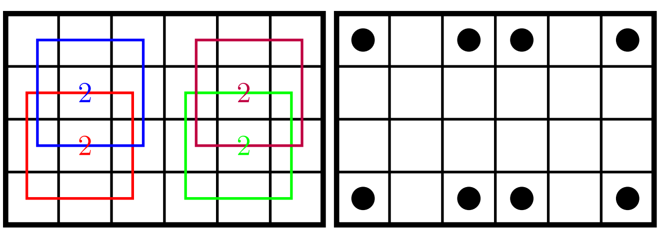
C5. Péter nyomozó a 0, 1, 2, 3 számkártyákból kirakott egy prímet, mindegyik kártyából legfeljebb egyet használva. Mi a legnagyobb prím, amit kirakhatott?

Megoldás: Négyjegyű szám nem lehet, mivel a számjegyeinek összege 6 lenne, azaz a 3-mas oszthatóság szabálya szerint osztható lenne 3-mal. A háromjegyű páratlan számok közül 3-mal nem osztható a $103, 203, 301$. Ezek közül a 203 és a 301 osztható héttel, így a 103 a legnagyobb előállítható prímszám.

C6. Egy 6×4-es táblázat néhány mezőjébe csokit tettünk, majd minden mezőre ráírtuk, hogy a vele szomszédos mezők közül hányban van csoki. Két mező szomszédos, ha van közös oldaluk vagy csúcsuk. Legfeljebb hány csoki lehet a táblázatban, ha minden mezőre legfeljebb 2-es számot írtunk?

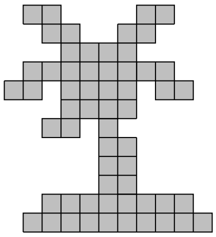
A csokit tartalmazó mezőkre is írtunk számot. Semelyik mező sem szomszédos önmagával.

Megoldás:

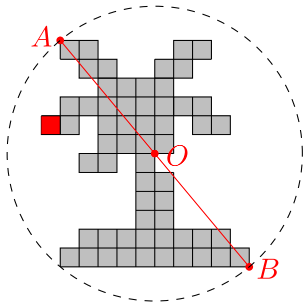


Az első ábrán látható 2-esekkel szomszédos cellák (a négyzetekkel jelölve) lefedik az egész táblázatot. Ezeken a részeken legfeljebb $2 - 2$ csoki lehet, azaz a teljes táblázatban is összesen legfeljebb 8 csoki lehet, amire a második ábrán korongokkal jelölve látható egy konstrukció.

C7. Mennyi a legkisebb olyan körlap sugarának a négyzete, amely teljesen lefedi az ábrázolt pálmafát, és a sugarának négyzete egész szám?
Az ábrán a kis négyzetek oldalainak hossza 1.



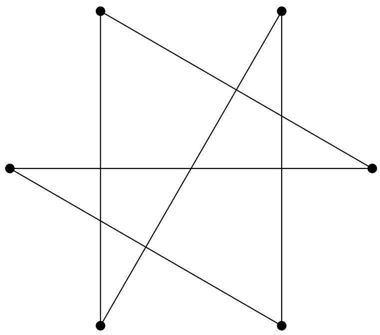
Megoldás:
Az O középpontú $\sqrt{61} = \sqrt{5^2+6^2} = |OA| = |OB|$ sugarú kör a legkisebb, ami fedi az ábrát. Ez abból látszik, hogy a kör lefedi az AB átmérő által meghatározott téglalapot, ami fedi a pálmafa minden kis négyzetét a piros négyzeten kivül. A kör fedi a piros négyzetet is, ez könnyen ellenőrizhető a négyzet legtávolabbi csúcsával, aminek a távolsága az O-ból $\sqrt{2^2+6^2} = \sqrt{40} < \sqrt{61}$. Az O az AB szakasz felezőpontja, tehát minden AB szakaszt tartalmazó kör átmérője legalább $|AB| = 2 \cdot \sqrt{61}$. Így ez a legkisebb kör ami tartalmazza a szakaszt, azaz a legkisebb pálmafát tartalmazó kör is egyben.



C8. Egy városban van hat kritikus pont, melyek egy szabályos hatszög csúcsaiban helyezkednek el. Egy szökött fegyencet üldöznek, ezért hogy lerázza az őt követő kutyákat, tett egy sétát a városban a hat kritikus pont között. Végül a kiindulási helyére tért vissza, de ezenkívül semelyik másik kritikus pontban nem járt egynél többször. Mindig egyenesen ment egy kritikus pontból a következőbe úgy, hogy összesen minél több pontban messe a saját útját. Legfeljebb hány metszéspontot hozhatott létre?

Ha egy metszésponton kettőnél többször haladt át, az továbbra is csak egy metszéspontnak számít. A kritikus pontok nem számítanak metszéspontnak.

Megoldás:
Először megmutatjuk, hogy 7 metszéspontot elérhet. Ez a következő konstrukcióval lehetséges:



Most belátjuk, hogy nem lehet 7-nél több metszéspont. Nevezzünk egy átlót főátlónak, ha a hatszög két szemközti csúcsát köti össze. Lássuk be, hogy egy szakaszra csak akkor illeszkedhet 3 metszéspont, ha főátló. Ha egy szakasz nem főátló, akkor valamelyik oldalán legfeljebb 1 kritikus pont van. Ekkor azonban nem lehet 3 metszéspont a szakaszon, mert a fegyenc csak egyszer járt abban a kritikus pontban, tehát csak kétszer, odafelé és visszafelé metszhette a szakaszt. Továbbá a főátlókon legfeljebb 3 metszéspont lehet, mert összesen 6 szakaszt járt be a fegyenc, és a vizsgált főátlóval szomszédos két szakasz nem metszheti.

Mivel mind a 3 főátlóra legfeljebb 3 metszéspont illeszkedhet, a többire pedig legfeljebb 2, így a metszéspontok száma legfeljebb $\frac{3\cdot 3+3\cdot 2}{2} = \frac{15}{2} < 8$, tehát nem lehet 7-nél több metszéspont.

C9. Scooby-Doo otthoni készletében 32 doboz mogyoróvajas, 19 doboz juharszirupos és 34 doboz mályvacukros Scooby Snack van. Ahhoz, hogy egy nap jóllakjon, az alábbi lehetőségek valamelyikét kell elfogyasztania:

- 3 doboz mogyoróvajas, 1 doboz juharszirupos és 1 doboz mályvacukros Scooby Snack,
- 1 doboz juharszirupos és 2 doboz mályvacukros Scooby Snack,

- 4 doboz mogyoróvajas és 2 doboz mályvacukros Scooby Snack.

Legfeljebb hány napon lakhat jól Scooby-Doo, ha csak az otthoni készletét fogyaszthatja?

Megoldás: Képzeljük el, hogy egy doboz mogyoróvajas snack 1 Ft-ba, egy doboz juharszirupos snack 4 Ft-ba, egy doboz mályvacukros snack pedig 3 Ft-ba kerül. Ez esetben bárhogyan is fogyaszja el a napi betevőjét, annak összértéke 10 Ft.

A teljes készletének összértéke $32 \cdot 1 + 19 \cdot 4 + 34 \cdot 3 = 210$, így legfeljebb 21 napig tart a készlete.

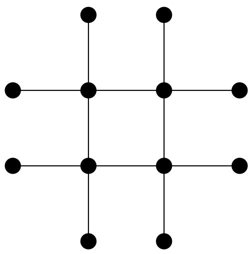
A 21 nap valóban megvalósítható az alábbi módszerrel:

- 8 napon: 3 doboz mogyoróvajas, 1 doboz juharszirupos és 1 doboz mályvacukros Scooby Snack,
- 11 napon: 1 doboz juharszirupos és 2 doboz mályvacukros Scooby Snack,
- 2 napon: 4 doboz mogyoróvajas és 2 doboz mályvacukros Scooby Snack.

Ekkor ellenőrizhetjük, hogy mogyoróvajas snackből $8 \cdot 3 + 0 + 2 \cdot 4 = 32$ doboz fogyott el, juharszirupos snackből $8 \cdot 1 + 11 \cdot 1 + 0 = 19$ doboz, mályvacukros snackből pedig $8 \cdot 1 + 11 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 34$ doboz.

Tehát a megoldás 21 nap.

C10. Molli és Tamás meglátogattak 4-4 várost úgy, hogy köztük csak utak mentén közlekedtek. Az ábrán pontok jelölik városokat, ahol járhattak, és szakaszok a köztük haladó utakat. Tudjuk, hogy minden városban legfeljebb az egyikük járt, valamint minden városban legfeljebb egyszer jártak. Hányféleképpen tehették ezt meg?
Két esetet akkor tekintünk különbözőnek, ha Molli és Tamás közül legalább az egyikük más városokat látogatott meg, vagy ugyanazokat más sorrendben.



Megoldás: Bontsuk a városokat két részre, külső városoknak hívjuk azokat, amelyeknek egy szomszédja van, belső városoknak pedig a maradék négy várost.

Vegyük észre, hogy mindkét út során a másodiknak, illetve harmadiknak érintett városoknak belső városoknak kell lennie, hiszen mindenki minden városban legfeljebb egyszer járt. Először határozzuk meg, hányféle lehet összesen Molli és Tamás másodiknak és harmadiknak meglátogatott városa. Molli második városát kiválaszthatjuk 4-féleképpen. Ezek után Molli harmadik városát 2-féleképpen tudjuk kiválasztani, mert minden belső városnak két további belső szomszédja van. Ezek után Tamás második városa 2-féle lehet, a harmadik városa pedig már csak egyféle lehet, és ez a megmaradt belső város szomszédos is az eggyel előtte választottal. Ez eddig $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 16$ lehetőség.

Mivel minden városban legfeljebb egyikük járt, ezért mindkét útban az első és negyedik városok külső városok. Viszont minden belső városnak pontosan két külső szomszédja van, és ezek különbözőek. Ebből következik, hogy Molli és Tamás első és utolsó városát egymástól függetlenül kétféleképpen tudjuk kiválasztani, így ezekre összesen $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ lehetőség van.

Ez összeségében $16 \cdot 16 = 256$ lehetőség.

C11. Egy kártyapakli 16 lapból áll, piros, sárga, zöld és kék színben van 1-1 kutya, macska, ló és hal. Alex kirakott négy lapot az asztalra a pakliból. Ezután Béla az egyik lapon megváltoztatta vagy a színt, vagy az állatot. Ekkor azt vette észre, hogy az így kapott négy kártyán mind a négy szín és mind a négy állat pontosan egyszer fordul elő. Hányféle lehetett az Alex által kirakott négy lap, ha a kirakott lapok sorrendje nem számít?

Megoldás: Tegyük fel, hogy Béla az adott lapon a színt változtatta meg. Ez azt jelenti, hogy az Alex által kirakott négy lapon négy különböző állat szerepelt, hiszen ezeket Béla meghagyta és a változtatás után mind a négy állat látható valamelyik kártyán. Továbbá tudjuk, hogy ekkor az Alex által kirakott lapok között három különböző szín szerepelt, az egyik színből két kártya is, hiszen Béla pontosan egy színt változtatott meg, hogy eljusson a négy különböző színig.

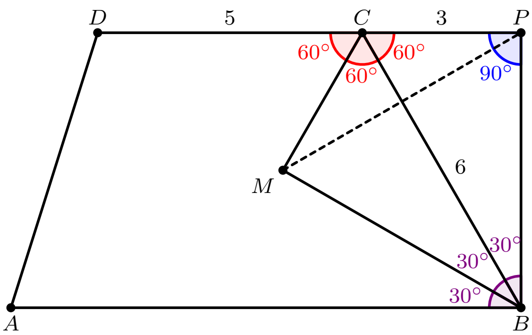
Azt a színt, amelyből kettőt is kirakott Alex, négyféleképpen választhatjuk ki, míg azt a színt, amit nem helyezett le, háromféleképpen a többi szín közül. Ekkor a maradék két színből már adott, hogy pontosan egy lapot tett ki Alex. A lapokon szereplő négy különböző állat közül kettőnek azonos a színe, ezt $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$-féleképpen választhatjuk ki. A megmaradt két állatot kétféleképpen oszthatjuk el a megmaradt két szín közt. Ez összesen $4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 = 144$ lehetőség, amennyiben Béla a színt változtatta meg.

Ha pedig Béla az általa választott lapon az állatot változtatta meg, akkor szimmetrikusan ugyanennyi lehetőség van az Alex által kitett lapokra azzal a különbséggel, hogy ekkor Alex négy különböző színű lapot tett ki eredetileg és ezeken háromféle állat szerepel. Az esetek leszámolása megegyezik a korábbi számolással.

Így $2 \cdot 144 = 288$-féle lehetett az Alex által kirakott négy lap.

C12. Adott egy $ABCD$ trapéz, melynek az AB és CD oldalai párhuzamosak. A B és C csúcsok belső szögfelezőinek métszéspontja legyen M. Az M pontnak a BC oldalra vett tükörképe legyen P. A BC oldal hossza 6 egység, a D és P pontok távolsága 8 egység, továbbá $CBP\sphericalangle = 30°$. Mennyi a DB szakasz egységekben kifejezett hosszának négyzete?

Megoldás:
Mivel a tükrözés szögtartó, így a feltétel szerint $ABM\sphericalangle = CBM\sphericalangle = CBP\sphericalangle = 30°$, amiből $ABP\sphericalangle = 3 \cdot 30° = 90°$ következik. A párhuzamosság miatt $ABC\sphericalangle + BCD\sphericalangle = 180°$, tehát $BCD\sphericalangle = 180° - 2\cdot 30° = 120°$ és $BCM\sphericalangle = 60°$. Ismét a tükrözés miatt $BCP\sphericalangle = 60°$, amiből $DCP\sphericalangle = 3 \cdot 60° = 180°$ következik, tehát P a DC szakasz C-n túli meghosszabbításán lesz. Ekkor a párhuzamosság miatt a BPD háromszögben P-nél derékszög van, amiből az is következik, hogy a BCP háromszög szögei $30°, 60°, 90°$, azaz félszabályos a háromszög. Így $CP = \frac{BC}{2} = 3$ és $BP^2 = 36 - 9 = 27$. Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt a BPD háromszögre: $DB^2 = DP^2 + BP^2 = 8^2 + 27 = 64 + 27 = 91$ egység, ami a kérdés volt.



C13. Csabinak, a kis csigának a háza a bal oldali ábrán látható módon 8×8 négyzetből áll. Csabi most tanulja a számokat, egyelőre még csak 4-ig tud számolni. Csabi bátyja úgy akarja segíteni a tanulását, hogy néhány négyzetbe beír egy számot az $1, 2, 3, 4$ közül. Szeretné, hogy a csigavonal mentén kívülről befelé haladva a nemüres négyzetekben az $1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, \ldots, 4$ számok szerepeljenek ebben a sorrendben. Továbbá, hogy Csabi fel ne boruljon, arra is szeretne figyelni, hogy minden sorban és oszlopban mind a négy számjegy pontosan egyszer szerepeljen. Eddig a jobb oldali ábrán látható jegyeket írta be, segíts neki befejezni a kitöltést! Mennyi lesz végül azon szürke mezőkben lévő számok szorzata, melyek nem maradnak üresen?

			2				
		1					
	3						
4		2				3	1
					3		
				1		4	3
			3				

Megoldás:

Első lépésként a hatodik sort egyértelműen ki lehet tölteni és néhány további mezőnél megállapítható, hogy oda nem kerül szám.

			2				
		1					
	3						
4	-	2	-	-	-	3	1
-	-	-	1	4	3	-	2
		-	-	1	-	4	3
			3				

A harmadik és a hatodik sorban szereplő hármasok közé még be kell írni egy 4-1-2-t, amiből az 1-es, 2-es csak egyféleképpen jöhet oda. A 7. sorban a 2-es és az alsó sorban az 1-es, és így a 4-es is beírható.

			2				-
		1					-
	3				1		-
					2	-	-
4	-	2	-	-	-	3	1
-	-	-	1	4	3	-	2
-	2	-	-	1	-	4	3
			3		-	1	4

A bal oldali oszlopba 2-es csak úgy kerülhet, ha a 4-es és az utána jövő 1-es közé kerülnek az 1-2-3-4 számok. Ezután a negyedik és harmadik sor is kitölthető lesz

-			2				-
3	4	1					-
2	3	4	-	-	1	-	-
1	-	3	4	-	2	-	-
4	-	2	-	-	-	3	1
-	-	-	1	4	3	-	2
-		-		1	-	4	3
			3		-	1	4

Innen a táblázat maradék része is kitölthető. A kérdéses számok szorzata: $4^5 \cdot 3 = 3072$

-	1	-	2	3	4	-	-
3	4	1	-	-	-	2	-
2	3	4	-	-	1	-	-
1	-	3	4	-	2	-	-
4	-	2	-	-	-	3	1
-	-	-	1	4	3	-	2
-	2	-	-	1	-	4	3
-	-	-	3	2	-	1	4

C14. Scooby-Dooék a következő 30 évben minden januárban döntenek, hogy vagy lecserélik a járgányukat egy újra 9 Dürer dollárért, vagy megszervizeltetik az aktuális járgányukat annyi Dürer dollárért, ahány éves. Legalább hány Dürer dollárt kell Scooby-Dooéknak a járgányaikra költeniük a következő 30 évben összesen, ha már eldöntötték, hogy első alkalommal új járgányt fognak venni?

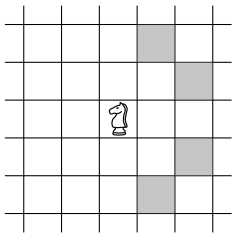
Megoldás: Scooby-Dooék akkor költenek összesen a legkevesebbet, ha évekre lebontva átlagban a legkevesebbet költenek. Először vizsgáljuk meg, hogy ha egy járgányt k évig tartanak meg, akkor átlagosan mennyit költenek rá évente. Ez éppen

$$\frac{9+1+2+3+4+...+(k-1)}{k} = \frac{9+\frac{(k-1)\cdot k}{2}}{k} = \frac{9}{k} + \frac{k-1}{2}.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy ez akkor a legkisebb, ha $k = 4$, amikor átlagban $3,75$. Így legalább $30 \cdot 3,75 = 112,5$ a költség, és mivel egész számnak kell lennie, így legalább 113. Ez pedig el is érhető, ha összesen 7 járgányt vásárolnak, amiből ötöt 4 évig, kettőt pedig 5 évig tartanak meg, mivel

$$5 \cdot (9+1+2+3) + 2 \cdot (9+1+2+3+4) = 113.$$

C15. Hányféleképpen juthatunk el egy huszárral a 8×8-as sakktábla bal alsó sarkából a jobb felső sarkába, ha nem léphetünk balra?
Az ábrán a szürke mezők mutatják, hogy hová tud egy huszár egy lépésben eljutni úgy, hogy nem lép balra. A huszárral nem léphetünk le a sakktábláról.



Megoldás:
Készítsünk egy 8×8-as táblázatot, ahol minden mezőre azt a számot írjuk fel, ahányféleképpen el lehet jutni oda a bal alsó sarokból úgy, hogy nem lépünk balra.
A táblázat kitöltését balról az első oszloppal kezdjük, ahol minden mezőbe 0 kerül, kivéve a legalsóba, ahova 1. Majd lépünk a következő oszlapra, ahol egy mezőre az összegét írjuk azoknak a mezőknek, amelyekről a kérdéses mezőre tudunk lépni. Így oszlopról oszlopra ki tudjuk tölteni a táblázatot:

0	0	0	0	0	4	3	18
0	0	0	1	0	3	11	24
0	0	0	0	3	3	15	20
0	0	1	0	3	3	17	32
0	0	0	2	2	8	11	36
0	1	0	2	1	9	10	41
0	0	1	1	3	4	9	22
1	0	1	0	3	2	12	14

Tehát a jobb felső sarokba 18-féleképpen lehet eljutni.

C16. Egy kitalált választás szabályai a következők: minden szavazó felállít egy sorrendet a jelöltek között. A választás győztese több körben dől el. Minden körben minden szavazat ahhoz a jelölthöz kerül, aki a sorrendben legelöl van a még versenyben lévő jelöltek közül. Akihez egy körben a legkevesebb szavazat tartozik, végleg kiesik. Ha több ilyen is van, sorsolás dönt köztük a kieső jelöltről. Néhány kör után már csak egy jelölt marad, a győztes. A legutóbbi kitalált választáson négy jelölt indult, A, B, C és D. Tudjuk, hogy 200 szavazó $ABCD$ sorrendbe tette a jelölteket, 150-en a $BCDA$, 201-en pedig a $CDAB$ sorrendet választották. Ezenkívül előfordult x választónál ($x \geq 1$) a $DBCA$ sorrend is, de az eddig felsoroltakon kívül más sorrend nem volt. Hányféle lehet x, ha a választást C nyerte és egy sorsolás sem volt?

Megoldás: Az első körben vagy B vagy D esik ki, válasszuk eszerint két esetre a megoldást, majd azon belül még osszunk további esetekre a második kieső szerint.

- Az $x = 150$ nem lehetséges, mert akkor sorsolás lenne B és D között.
- Ha $x > 150$, akkor az első körben B esik ki, marad: 200 db ACD, 351 db CDA és x db DCA. Ezek után a következő esetek vannak:
  - Az $x = 200$ nem lehetséges, mert akkor sorsolás lenne A és D között.
  - Ha $x < 200$, akkor a második körben D esik ki. Marad: 200 db AC és $351 + x$ db CA szavazat, így C nyer, ez egy jó eset.
  - Ha $x > 200$, akkor a második körben A esik ki. Marad: 551 db CD és x db DC szavazat. Így $x < 551$ esetén C fog nyerni, ez egy jó eset.
- Ha $x < 150$, akkor az első körben D esik ki. Marad 200 db ABC, $150 + x$ db BCA és 201 db CAB szavazat. Ezek után a következő esetek vannak:
  - Az $x = 50$ nem lehetséges, mert akkor sorsolás lenne A és B között.

- Ha $x < 50$, akkor B esik ki a második körben. Így marad 200 db AC és $351 + x$ db CA. Ebben az esetben C nyer, így ez egy jó eset.
- Végül ha $x > 50$, akkor A esik ki a második körben. Marad $350 + x$ db BC és 201 db CB szavazat, ebben az esetben B nyer, így ez egy rossz eset.

Tehát akkor nyer C sorsolás nélkül, ha $1 \leq x < 50$, ha $150 < x < 200$, vagy ha $200 < x < 551$. Ez összesen $49 + 49 + 350 = 448$-féle lehetőség x-re.