XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Váltó megoldókulcs

D kategória

D1. Maigret felügyelő 2025 januárjában összesen négy ügyet oldott meg, ezeket különböző napokon tette. Az év első napján, szerdán oldotta meg az elsőt. A másodikként megoldott ügy megoldásának dátumában a napnak 6 pozitív osztója van. A harmadik és a negyedik ügy megoldása 12 nap eltéréssel történt. Az utolsó ügyet vasárnap oldotta meg. Mi a négy ügy megoldásának dátumaiban a napok összege?

Januárban 31 nap van.

Megoldás: Az 1. ügy napja adott. A 4. ügy napja négyféle lehet: 5, 12, 19, 26. Az első kettő nem lehetséges, mert nincs 12-vel korábbi nap januárban. A 19 esetén 7-e a 3. eset napja, de ekkor a 2. ügy csak másodika és hatodika között lehet, ám itt egy számnak sincs 6 pozitív osztója. A 4. ügyet tehát 26-án oldotta meg, a 3.-at 14-én. Az egyetlen 14-nél kisebb pozitív egész szám, aminek 6 osztója van a 12, így ennek kell a 2. ügy megoldási dátumának lennie. A megoldási napokat mind egyértelműen meghatároztuk, ezek összege: $1 + 12 + 14 + 26 = 53$.

D2. Rex felügyelő, a kutya, bárányokkal és kétfejű nyulakkal álmodott, összesen 60 lábat és 20 fejet számolt. Hány báránnyal álmodott Rex, ha a saját lábait is beleszámolta, de a fejét nem?

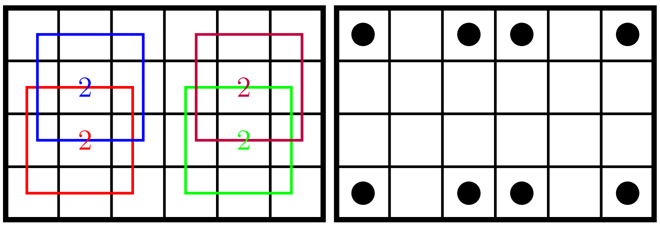
Minden állatnak 4 lába volt az álmában, továbbá Rex a saját fején kívül minden testrészt megszámolt, ami a szövegben szerepel.

Megoldás: Tegyük fel, hogy x báránnyal és y kétfejű nyúllal álmodott. Ekkor $4 \cdot (1 + x + y) = 60$ (lábak) és $x + 2 \cdot y = 20$ (fejek), amiből $x + y = 14 \Rightarrow y = 20 - (x + y) = 6 \Rightarrow x = 8$, tehát 8 báránnyal álmodott Rex.

D3. Egy 6×4-es táblázat néhány mezőjébe csokit tettünk, majd minden mezőre ráírtuk, hogy a vele szomszédos mezők közül hányban van csoki. Két mező szomszédos, ha van közös oldaluk vagy csúcsuk. Legfeljebb hány csoki lehet a táblázatban, ha minden mezőre legfeljebb 2-es számot írtunk?

A csokit tartalmazó mezőkre is írtunk számot. Semelyik mező sem szomszédos önmagával.

Megoldás:



Az első ábrán látható 2-esekkel szomszédos cellák (a négyzetekkel jelölve) lefedik az egész táblázatot. Ezeken a részeken legfeljebb $2 - 2$ csoki lehet, azaz a teljes táblázatban is összesen legfeljebb 8 csoki lehet, amire a második ábrán korongokkal jelölve látható egy konstrukció.

D4. Összeadtuk a pozitív egész számokat 1-től 10^{10}-ig. Melyik az a legnagyobb k egész szám, amelyre 2^k osztja az összeget?

Megoldás: Tudjuk, hogy az első n pozitív egész szám összege $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Ez alapján 10^{10}-ig összeadva a számokat $1 + 2 + \cdots + 10^{10} = \frac{10^{10}(10^{10}+1)}{2}$.

$$\frac{10^{10}(10^{10}+1)}{2} = (10^{10}+1) \cdot \frac{10^{10}}{2} = (10^{10}+1) \cdot \frac{2^{10} \cdot 5^{10}}{2} = (10^{10}+1) \cdot 2^9 \cdot 5^{10}.$$

A szorzatban $10^{10} + 1$ és 5^{10} páratlan számok, ezért a legnagyobb k egész szám, amelyre 2^k osztja az összeget a $k = 9$.

D5. Van egy dobozban 9 golyó, 1-től 9-ig számozva. Ezek közül véletlenszerűen kihúzunk két különböző golyót egyszerre. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kihúzott golyókon szereplő számok legnagyobb közös osztója 1? **Válaszként a tört egyszerűsített alakjában a számláló és a nevező összegét adjátok meg!**

Bármely két golyópár kihúzásának azonos a valószínűsége.

Megoldás: Kilencből 2 golyót kiválasztani $\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$-féleképpen lehet. Számoljuk meg most azokat a lehetőségeket, ahol a legnagyobb közös osztó *nagyobb mint* 1, ezeket hívjuk rossz eseteknek.

Ha mindkét szám páros, akkor a 2, 4, 6, 8 számok közül választottuk őket, ez $\binom{4}{2} = 6$-féleképp tehető meg.

Ha mindkét szám oszható hárommal, akkor a 3, 6, 9 számok közül választottunk kettőt, ez $\binom{3}{2} = 3$-féleképp tehető meg.

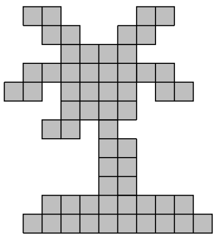
Ha a legnagyobb közös osztó 4, azt már számoltuk amikor a páros esetet vizsgáltuk.

A legnagyobb közös osztó nem lehet nagyobb mint 4, mert ebben az esetben a két szám közül a nagyobbik legalább 10 lenne.

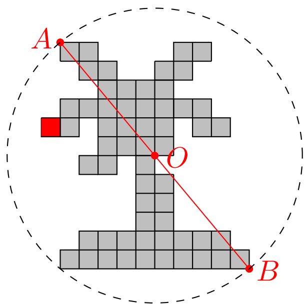
Tehát megszámoltuk az összes rossz esetet, amihez még annyit fontos meggondolni, hogy nem volt olyan rossz eset, amit kétszer is megszámoltunk, mert nem lehetséges, hogy a két szám egyszerre páros, és osztható hárommal.

Most vonjuk ki összes esetből a rossz eseteket, így megkapjuk a jó esetek számát: $36 - (6 + 3) = 27$. A jó húzás valószínűsége $\frac{27}{36} = \frac{3}{4}$. Az egyszerűsített tört alak számlálójának és nevezőjének összege $3 + 4 = 7$.

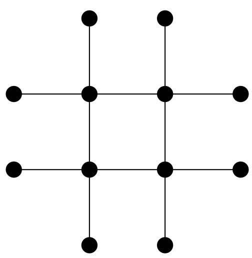
D6. Mennyi a legkisebb olyan körlap sugarának a négyzete, amely teljesen lefedi az ábrázolt pálmafát, és a sugarának négyzete egész szám?
Az ábrán a kis négyzetek oldalainak hossza 1.



Megoldás:
Az O középpontú $\sqrt{61} = \sqrt{5^2 + 6^2} = |OA| = |OB|$ sugarú kör a legkisebb, ami fedi az ábrát. Ez abból látszik, hogy a kör lefedi az AB átmérő által meghatározott téglalapot, ami fedi a pálmafa minden kis négyzetét a piros négyzeten kívül. A kör fedi a piros négyzetet is, ez könnyen ellenőrizhető a négyzet legtávolabbi csúcsával, aminek a távolsága az O-ból $\sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} < \sqrt{61}$. Az O az AB szakasz felezőpontja, tehát minden AB szakaszt tartalmazó kör átmérője legalább $|AB| = 2 \cdot \sqrt{61}$. Így ez a legkisebb kör ami tartalmazza a szakaszt, azaz a legkisebb pálmafát tartalmazó kör is egyben.



D7. Molli és Tamás meglátogattak 4-4 várost úgy, hogy köztük csak utak mentén közlekedtek. Az ábrán pontok jelölik városokat, ahol járhattak, és szakaszok a köztük haladó utakat. Tudjuk, hogy minden városban legfeljebb az egyikük járt, valamint minden városban legfeljebb egyszer jártak. Hányféleképpen tehették ezt meg?
Két esetet akkor tekintünk különbözőnek, ha Molli és Tamás közül legalább az egyikük más városokat látogatott meg, vagy ugyanazokat más sorrendben.



Megoldás: Bontsuk a városokat két részre, külső városoknak hívjuk azokat, amelyeknek egy szomszédja van, belső városoknak pedig a maradék négy várost.

Vegyük észre, hogy mindkét út során a másodiknak, illetve harmadiknak érintett városoknak belső városoknak kell lennie, hiszen mindenki minden városban legfeljebb egyszer járt. Először határozzuk meg, hányféle lehet összesen Molli és Tamás másodiknak és harmadiknak meglátogatott városa. Molli második városát kiválaszthatjuk 4-féleképpen. Ezek után Molli harmadik városát 2-féleképpen tudjuk kiválasztani, mert minden belső városnak két további belső szomszédja van. Ezek után Tamás második városa 2-féle lehet, a harmadik városa pedig már csak egyféle lehet, és ez a megmaradt belső város szomszédos is az eggyel előtte választottal. Ez eddig $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 16$ lehetőség.

Mivel minden városban legfeljebb egyikük járt, ezért mindkét útban az első és negyedik városok külső városok. Viszont minden belső városnak pontosan két külső szomszédja van, és ezek különbözőek. Ebből következik, hogy Molli és Tamás első és utolsó városát egymástól függetlenül kétféleképpen tudjuk kiválasztani, így ezekre összesen $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ lehetőség van.

Ez összeségében $16 \cdot 16 = 256$ lehetőség.

D8. Egy kártyapakli 16 lapból áll, piros, sárga, zöld és kék színben van 1-1 kutya, macska, ló és hal. Alex kirakott négy lapot az asztalra a pakliból. Ezután Béla az egyik lapon megváltoztatta vagy a színt, vagy az állatot. Ekkor azt vette észre, hogy az így kapott négy kártyán mind a négy szín és mind a négy állat pontosan egyszer fordul elő. Hányféle lehetett az Alex által kirakott négy lap, ha a kirakott lapok sorrendje nem számít?

Megoldás: Tegyük fel, hogy Béla az adott lapon a színt változtatta meg. Ez azt jelenti, hogy az Alex által kirakott négy lapon négy különböző állat szerepelt, hiszen ezeket Béla meghagyta és a változtatás után mind a négy állat látható valamelyik kártyán. Továbbá tudjuk, hogy ekkor az Alex által kirakott lapok között három különböző szín szerepelt, az egyik színből két kártya is, hiszen Béla pontosan egy színt változtatott meg, hogy eljusson a négy különböző színig.

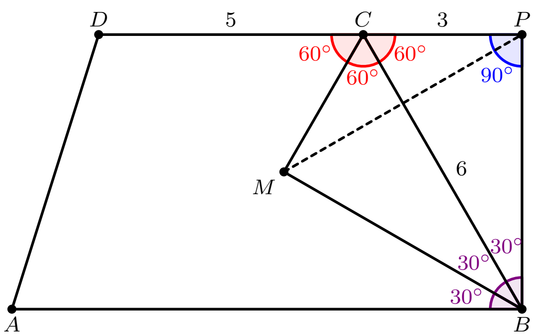
Azt a színt, amelyből kettőt is kirakott Alex, négyféleképpen választhatjuk ki, míg azt a színt, amit nem helyezett le, háromféleképpen a többi szín közül. Ekkor a maradék két színből már adott, hogy pontosan egy lapot tett ki Alex. A lapokon szereplő négy különböző állat közül kettőnek azonos a színe, ezt $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$-féleképpen választhatjuk ki. A megmaradt két állatot kétféleképpen oszthatjuk el a megmaradt két szín közt. Ez összesen $4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 = 144$ lehetőség, amennyiben Béla a színt változtatta meg.

Ha pedig Béla az általa választott lapon az állatot változtatta meg, akkor szimmetrikusan ugyanennyi lehetőség van az Alex által kitett lapokra azzal a különbséggel, hogy ekkor Alex négy különböző színű lapot tett ki eredetileg és ezeken háromféle állat szerepel. Az esetek leszámolása megegyezik a korábbi számolással.

Így $2 \cdot 144 = 288$-féle lehetett az Alex által kirakott négy lap.

D9. Adott egy $ABCD$ trapéz, melynek az AB és CD oldalai párhuzamosak. A B és C csúcsok belső szögfelezőinek métszéspontja legyen M. Az M pontnak a BC oldalra vett tükörképe legyen P. A BC oldal hossza 6 egység, a D és P pontok távolsága 8 egység, továbbá $CBP\sphericalangle = 30°$. Mennyi a DB szakasz egységekben kifejezett hosszának négyzete?

Megoldás:
Mivel a tükrözés szögtartó, így a feltétel szerint $ABM\sphericalangle = CBM\sphericalangle = CBP\sphericalangle = 30°$, amiből $ABP\sphericalangle = 3 \cdot 30° = 90°$ következik. A párhuzamosság miatt $ABC\sphericalangle + BCD\sphericalangle = 180°$, tehát $BCD\sphericalangle = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$ és $BCM\sphericalangle = 60°$. Ismét a tükrözés miatt $BCP\sphericalangle = 60°$, amiből $DCP\sphericalangle = 3 \cdot 60° = 180°$ következik, tehát P a DC szakasz C-n túli meghosszabbításán lesz. Ekkor a párhuzamosság miatt a BPD háromszögben P-nél derékszög van, amiből az is következik, hogy a BCP háromszög szögei $30°, 60°, 90°$, azaz félszabályos a háromszög. Így $CP = \frac{BC}{2} = 3$ és $BP^2 = 36 - 9 = 27$. Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt a BPD háromszögre: $DB^2 = DP^2 + BP^2 = 8^2 + 27 = 64 + 27 = 91$ egység, ami a kérdés volt.



D10. Scooby-Dooék a következő 30 évben minden januárban döntenek, hogy vagy lecserélik a járgányukat egy újra 9 Dürer dollárért, vagy megszervizeltetik az aktuális járgányukat annyi Dürer dollárért, ahány éves. Legalább hány Dürer dollárt kell Scooby-Dooéknak a járgányaikra költeniük a következő 30 évben összesen, ha már eldöntötték, hogy első alkalommal új járgányt fognak venni?

Megoldás: Scooby-Dooék akkor költenek összesen a legkevesebbet, ha évekre lebontva átlagban a legkevesebbet költenek. Először vizsgáljuk meg, hogy ha egy járgányt k évig tartanak meg, akkor átlagosan mennyit költenek rá évente. Ez éppen

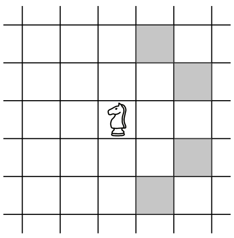
$$\frac{9+1+2+3+4+...+(k-1)}{k}=\frac{9+\frac{(k-1)\cdot k}{2}}{k}=\frac{9}{k}+\frac{k-1}{2}.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy ez akkor a legkisebb, ha $k=4$, amikor átlagban $3,75$. Így legalább $30\cdot 3,75=112,5$ a költség, és mivel egész számnak kell lennie, így legalább 113. Ez pedig el is érhető, ha összesen 7 járgányt vásárolnak, amiből ötöt 4 évig, kettőt pedig 5 évig tartanak meg, mivel

$$5\cdot(9+1+2+3)+2\cdot(9+1+2+3+4)=113.$$

D11. Hányféleképpen juthatunk el egy huszárral a 8×8-as sakktábla bal alsó sarkából a jobb felső sarkába, ha nem léphetünk balra?

Az ábrán a szürke mezők mutatják, hogy hová tud egy huszár egy lépésben eljutni úgy, hogy nem lép balra. A huszárral nem léphetünk le a sakktábláról.



Megoldás:

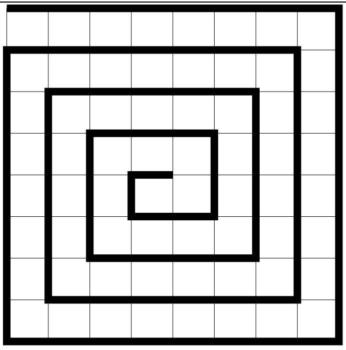
Készítsünk egy 8×8-as táblázatot, ahol minden mezőre azt a számot írjuk fel, ahányféleképpen el lehet jutni oda a bal alsó sarokból úgy, hogy nem lépünk balra.

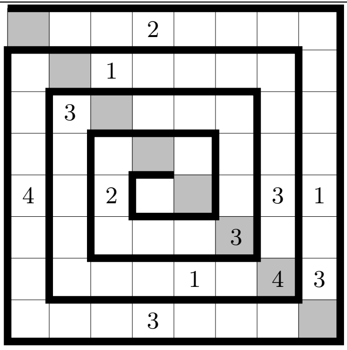
A táblázat kitöltését balról az első oszloppal kezdjük, ahol minden mezőbe 0 kerül, kivéve a legalsóba, ahova 1. Majd lépünk a következő oszlapra, ahol egy mezőre az összegét írjuk azoknak a mezőknek, amelyekről a kérdéses mezőre tudunk lépni. Így oszlopról oszlopra ki tudjuk tölteni a táblázatot:

0	0	0	0	0	4	3	18
0	0	0	1	0	3	11	24
0	0	0	0	3	3	15	20
0	0	1	0	3	3	17	32
0	0	0	2	2	8	11	36
0	1	0	2	1	9	10	41
0	0	1	1	3	4	9	22
1	0	1	0	3	2	12	14

Tehát a jobb felső sarokba 18-féleképpen lehet eljutni.

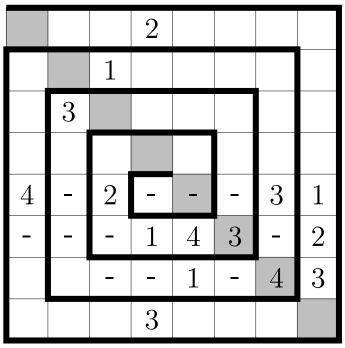
D12. Csabinak, a kis csigának a háza a bal oldali ábrán látható módon 8×8 négyzetből áll. Csabi most tanulja a számokat, egyelőre még csak 4-ig tud számolni. Csabi bátyja úgy akarja segíteni a tanulását, hogy néhány négyzetbe beír egy számot az $1,2,3,4$ közül. Szeretné, hogy a csigavonal mentén kívülről befelé haladva a nemüres négyzetekben az $1,2,3,4,1,2,3,4,1,2,\ldots,4$ számok szerepeljenek ebben a sorrendben. Továbbá, hogy Csabi fel ne boruljon, arra is szeretne figyelni, hogy minden sorban és oszlopban mind a négy számjegy pontosan egyszer szerepeljen. Eddig a jobb oldali ábrán látható jegyeket írta be, segíts neki befejezni a kitöltést! Mennyi lesz végül azon szürke mezőkben lévő számok szorzata, melyek nem maradnak üresen?



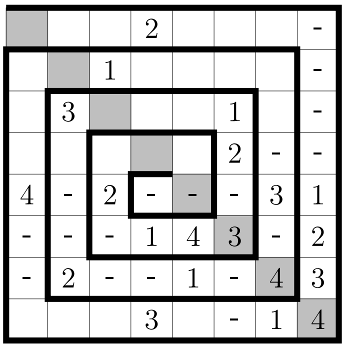


Megoldás:

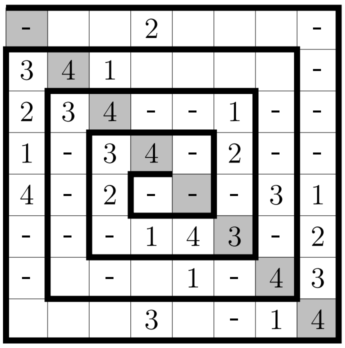
Első lépésként a hatodik sort egyértelműen ki lehet tölteni és néhány további mezőnél megállapítható, hogy oda nem kerül szám.



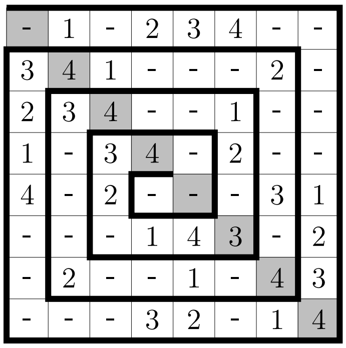
A harmadik és a hatodik sorban szereplő hármasok közé még be kell írni egy 4-1-2-t, amiből az 1-es, 2-es csak egyféleképpen jöhet oda. A 7. sorban a 2-es és az alsó sorban az 1-es, és így a 4-es is beírható.



A bal oldali oszlopba 2-es csak úgy kerülhet, ha a 4-es és az utána jövő 1-es közé kerülnek az 1-2-3-4 számok. Ezután a negyedik és harmadik sor is kitölthető lesz



Innen a táblázat maradék része is kitölthető. A kérdéses számok szorzata: $4^5 \cdot 3 = 3072$



D13. Hányféleképpen lehet lehelyezni 5 bástyát egy 5×5-ös sakktáblára úgy, hogy minden olyan mezőnek, amin nincs bástya, legyen a sorában vagy oszlopában bástya?

Két esetet különbözőnek tekintünk, ha van olyan mező, amelyiken az egyik esetben van bástya, a másikban nincs.

Megoldás: Tegyük fel, hogy van olyan sor és olyan oszlop is, melybe nem kerül bástya. Ekkor az a mező, ami a bástyamentes sorban, a bástyamentes oszlopban található, egyik bástya által sincs ütésben.

Tehát vagy minden sorban, vagy minden oszlopban kell lennie egy bástyának a sakktáblán. Viszont könnyen látszik, hogy mindkét esetben tényleg ütésben van az összes mező a saakktáblán, tehát csak azt kell összeszámolnunk, hogy ez hányféleképpen lehetséges.

Az, hogy minden sorban van bástya, összesen $5^5 = 3125$ lehetőség, hiszen minden sorban 5-féle helyen lehet a bábu. Az hogy minden oszlopban van bástya, szintén ugyanennyi lehetőség. Azokat az eseteket viszont kétszer számoltuk, amikor a bástyák külön sorokban és oszlopokban is vannak, azaz amikor minden sorban és minden oszlopban pontosan egy bástya van. Ez $5! = 120$ lehetőség, mivel az első sorba 5 helyre kerülhet a bástya, ezek után a másodikban 4 lehetőség van, és így tovább, az utolsó sorban 1 opció marad.

Tehát összesen $2 \cdot 3125 - 120 = 6130$ lehetőség van.

D14. Adott a síkon 600 pont, melyek egy szabályos 600-szög csúcsait alkotják. Megrajzoltuk az összes olyan szabályos sokszöget, amelynek csúcsai a pontok közül kerülnek ki és a szögeik fokban mérve egészek. Mennyi a megrajzolt sokszögek oldalszámainak összege?

Megoldás: Az eredeti szabályos 600-szög csúcsai közül kerülnek ki az általunk rajzolt szabályos sokszögek csúcsai. Szabályos sokszögeknek minden oldala egyenlő hosszú, így ha a mi szabályos sokszögünk két szomszédos csúcsa között $k-1$ darab csúcsa van az eredeti 600-szögnek amit nem választottunk ki, akkor bármely két szomszédos csúcs között ennyinek kell lennie. Azaz az eredeti 600 csúcs közül minden k-adikat kiválasztva van esélyünk szabályos sokszöget kapni. Az első és az utolsó kiválasztott csúcs távolsága pontosan akkor lesz azonos a többi szomszédos csúcspár távolságával, ha k osztója a 600-nak, hiszen ekkor fogunk pontosan körbeérni a 600-szög csúcsain, ha minden k-adikat választjuk ki. Ekkor pedig az általunk megrajzolt sokszög $n = \frac{600}{k}$ oldalú, és ha k osztja a 600-at, akkor n is osztója lesz 600-nak. Mivel n egy szabályos sokszög oldalszáma, ezért $n \geq 3$ egész.

Egy szabályos sokszög belső szögét a hozzá tartozó külső szög 180°-ra egészíti ki, azaz a belső szög nagysága fokban mérve pontosan akkor lesz egész, ha a külső szögre is ez teljesül. Az n oldalú szabályos sokszög minden külső szöge $\frac{360^\circ}{n}$ nagyságú. Ez fokban mérve pontosan akkor lesz egész, ha n osztója a 360-nak.

Egy $n = \frac{600}{k}$ oldalú szabályos sokszöget k-féleképpen rajzolhatunk az eredeti szabályos 600-szögbe, hiszen csak minden k-adik csúcsot választottunk ki ebből, azaz k-féleképpen elforgathatjuk az általunk rajzolt sokszöget. Így, ha valamilyen n-re berajzoljuk a szabályos n-szögeket, akkor összesen $n \cdot k = \frac{600}{k} \cdot k = 600$ megrajzolt oldal keletkezik. Innentől a kérdés az, hogy n értéke hányféle lehet, hiszen megkaptuk, hogy minden n értékkel összesen 600 darab oldalt fogunk megrajzolni.

Már tudjuk, hogy pontosan azok az n értékek teljesítik a feladat feltételeit, amelyek a 360-nak és a 600-nak közös osztói és $n \geq 3$. A 600 és a 360 legnagyobb közös osztója a 120, így a 120 kettőnél nagyobb pozitív osztói lehetnek n értékei. Mivel $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, ezért a 120-nak $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ pozitív osztója van, ezek közül az 1 és a 2 nem lehet n értéke. Azaz n értéke 14-féle lehet, így összesen $600 \cdot 14 = 8400$ az általunk megrajzolt sokszögek oldalszáma.

D15. Egy táblán szerepel két szám. Dani egy lépésben mindig letörli az egyik számot, és felírja helyette a két szám összegét. Ezt addig csinálja, amíg a táblán először megjelenik a 42. Hányféleképpen juthat el ehhez a számhoz, ha kezdetben két darab 1-es szerepel a táblán?
Két eljutás megegyezik, ha Dani a két eljutás minden lépésében megegyező értékű számot töröl le.

Megoldás: Gondolkodjunk visszafelé. Amikor először felkerül a 42 a táblára, legyen a másik szám x. Tehát az utolsó lépés előtt x és $42-x$ szerepelt a táblán. Mivel Dani lépései során csak pozitív számok szerepelhetnek a táblán, ezért $42 - x > 0$, tehát $42 > x$.

Továbbá vegyük észre, hogy a táblára írt két szám legnagyobb közös osztója nem változik az egyes lépések során. Emiatt $1 = (1,1) = \ldots = (x,42)$, ahol (a,b) az a és b legnagyobb közös osztóját jelöli. Megkaptuk tehát, hogy x és 42 relatív prímek (ahol azt mondjuk, hogy két szám relatív prím, ha a legnagyobb közös osztójuk 1). Így könnyű végignézni, hogy az x szám csak az alábbi 12 szám lehet: $1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41$. Könnyen látható, hogy bármely ilyen értékre pontosan 1 lehetséges eljutás van, hiszen visszafelé gondolkodva egy állásban mindig a nagyobb szám kellett, hogy legyen növelve az előző állásból, és mivel minden lépésben relatív prímek a számok, így mindig eljutunk visszafelé lépkedve az $(1,1)$-be. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a válasz 12.

D16. A rendőrségen 16 gyanúsított áll sorban, kihallgatásra várva. A háklis rendőr egy lépésben megcserélhet két szomszédos gyanúsítottat egymással. Legalább hány lépésre van szüksége ahhoz, hogy biztosan el tudja érni, hogy egyik gyanúsított se álljon két nála alacsonyabb vagy két nála magasabb ember között?
Minden gyanúsított különböző magasságú.

Megoldás: Figyeljük meg, hogy az a feltétel, hogy egy gyanúsított se álljon két nála alacsonyabb vagy két nála magasabb ember között pontosan azt jelenti, hogy a gyanúsítottak vagy csökkenő vagy növekvő sorban állnak, nevezzük ezeket szélsőséges eseteknek. Minden lehetséges sorra megszámolhatjuk, hogy hány emberpárra teljesül, hogy a jobb oldali ember magasabb, mint a bal oldali, nevezzük ezt a számot inverziószámnak. Figyeljük meg továbbá, hogy amikor végrehajtunk egy cserét akkor ez a szám 1-gyel nő vagy csökken annak megfelelően, hogy egy ilyen párt hozunk létre vagy szüntetünk meg. Vegyük észre még, hogy amennyiben az állás nem szélsőséges, úgy tudunk olyat lépni, hogy csökkentsük és olyat is, hogy növeljük az inverziószámot. A teljesen növekvő sor esetében az inverziószám $\binom{16}{2} = 120$, míg a teljesen csökkenő esetben 0. Tehát bármely esetből el tudunk jutni legfeljebb 60 lépésből egy olyan esetbe, amikor az inverziószám 0 vagy 120, ami azt jelenti, hogy az összes pár vagy az egyik irányba áll vagy a másikba, tehát ezek a szélsőséges esetek.

Megfordítva, a 0 inverziószámú helyzetből indulva, 60 lépésen át egyesével növelve az inverziószámot tudunk olyan állásba jutni, ahol pont 60 az inverziószám. Egy ilyen állásból indulva szükséges a 60 csere, így a megoldás 60.