XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Váltó megoldókulcs

E kategória

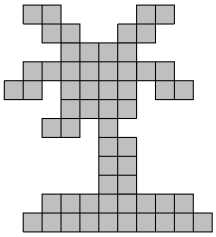
E1. Hányféleképpen lehet felírni a 13860-at két relatív prím, pozitív egész szám szorzataként?
Két felbontást nem tekintünk különbözőnek, ha a két szám ugyanaz, csak más sorrendben.

Megoldás: Két szám pontosan akkor relatív prím, ha a prímtényezős felbontásukban nem szerepel azonos prímszám.

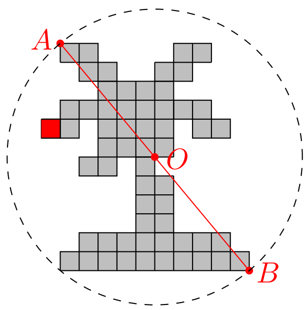
$13860 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, tehát a számnak 5-féle különböző prímosztója van. Ezt az 5 prímosztót kell két csoportba osztanunk attól függően, hogy melyik prímszám melyik szorzótényezőnek az osztója.

Ez összesen $2^5 = 32$-féleképpen tehető meg, viszont mivel a két szám felcserélhető, ezért ezt még el kell osztanunk 2-vel, tehát összesen $\frac{32}{2} = 16$-féleképpen írható fel a 13860 a kívánt módon.

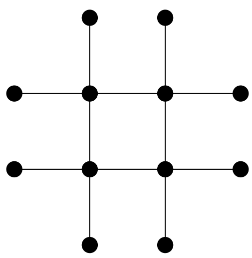
E2. Mennyi a legkisebb olyan körlap sugarának a négyzete, amely teljesen lefedi az ábrázolt pálmafát, és a sugarának négyzete egész szám?
Az ábrán a kis négyzetek oldalainak hossza 1.



Megoldás:
Az O középpontú $\sqrt{61} = \sqrt{5^2 + 6^2} = |OA| = |OB|$ sugarú kör a legkisebb, ami fedi az ábrát. Ez abból látszik, hogy a kör lefedi az AB átmérő által meghatározott téglalapot, ami fedi a pálmafa minden kis négyzetét a piros négyzeten kívül. A kör fedi a piros négyzetet is, ez könnyen ellenőrizhető a négyzet legtávolabbi csúcsával, aminek a távolsága az O-ból $\sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} < \sqrt{61}$. Az O az AB szakasz felezőpontja, tehát minden AB szakaszt tartalmazó kör átmérője legalább $|AB| = 2 \cdot \sqrt{61}$. Így ez a legkisebb kör ami tartalmazza a szakaszt, azaz a legkisebb pálmafát tartalmazó kör is egyben.



E3. Molli és Tamás meglátogattak 4-4 várost úgy, hogy köztük csak utak mentén közlekedtek. Az ábrán pontok jelölik városokat, ahol járhattak, és szakaszok a köztük haladó utakat. Tudjuk, hogy minden városban legfeljebb az egyikük járt, valamint minden városban legfeljebb egyszer jártak. Hányféleképpen tehették ezt meg?
Két esetet akkor tekintünk különbözőnek, ha Molli és Tamás közül legalább az egyikük más városokat látogatott meg, vagy ugyanazokat más sorrendben.



Megoldás: Bontsuk a városokat két részre, külső városoknak hívjuk azokat, amelyeknek egy szomszédja van, belső városoknak pedig a maradék négy várost.

Vegyük észre, hogy mindkét út során a másodiknak, illetve harmadiknak érintett városoknak belső városoknak kell lennie, hiszen mindenki minden városban legfeljebb egyszer járt. Először határozzuk meg, hányféle lehet összesen Molli és Tamás másodiknak és harmadiknak meglátogatott városa. Molli második városát kiválaszthatjuk 4-féleképpen. Ezek után Molli harmadik városát 2-féleképpen tudjuk kiválasztani, mert minden belső városnak két további belső szomszédja van. Ezek után Tamás második városa 2-féle lehet, a harmadik városa pedig már csak egyféle lehet, és ez a megmaradt belső város szomszédos is az eggyel előtte választottal. Ez eddig $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 16$ lehetőség.

Mivel minden városban legfeljebb egyikük járt, ezért mindkét útban az első és negyedik városok külső városok. Viszont minden belső városnak pontosan két külső szomszédja van, és ezek különbözőek. Ebből következik, hogy Molli és Tamás első és utolsó városát egymástól függetlenül kétféleképpen tudjuk kiválasztani, így ezekre összesen $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ lehetőség van.

Ez összességében $16 \cdot 16 = 256$ lehetőség.

E4. Hány olyan négyjegyű szám van, melynek minden számjegye különböző, a számjegyei csökkenő sorrendben állnak, továbbá az első és utolsó számjegyének szorzata megegyezik a két középső számjegyének szorzatával?

Megoldás: Vegyük észre, hogy 5 és 7 nem szerepelhet a számban, hiszen minden más számjeggyel relatív prímek, azaz két másik számjegy szorzata nem lehet osztható velük. A 0 sem szerepelhet, hiszen két nemnulla szám szorzata nem lehet 0. Legyen a számunk $\overline{abcd}$, nézzük meg milyen számjegyek kerülhetnek a helyére.

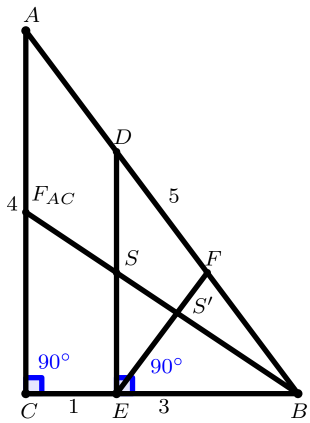
- Ha $a = 9$, akkor $b \cdot c$ osztható 9-cel, ez csak úgy lehetséges, ha $b = 6$ és $c = 3$, ekkor $9d = 18$, tehát $d = 2$, a szám pedig 9632.
- Ha $a = 8$, akkor a $b \cdot c$ szorzat osztható 8-cal, ami csak úgy lehet, ha $b = 4, c = 2$ vagy $b = 6, c = 4$. Az így kapott számok 8421 és 8643.
- Ha $a = 6$, akkor $b = 3$ vagy $c = 3$, hiszen a csökkenő sorrend miatt 9 nem állhat ezeken a helyeken. Ha $b = 3$, akkor $c = 2$, hiszen ez az egyetlen 3-nál kisebb páros szám, így a kapott szám 6321. Ha $c = 3$, akkor $b = 4$, hiszen nincs más páros szám 3 és 6 között. Ekkor a szám 6432.
- Ha $a = 4$, akkor mivel a 0 számjegyet már kizártuk, az egyetlen lehetőség a 4321 lenne, ami viszont nem jó.
- Ha $a \leq 3$, akkor nincs 3 nála kisebb számjegy amit beírhatnánk a maradék 3 helyre.

Megvizsgáltuk az összes lehetséges esetet, ezzel belátva, hogy 5 ilyen szám van.

E5. Az ABC háromszög AB, BC és CA oldalai rendre 5, 3 és 4 hosszúak. Legyen D az AB oldal A-hoz közelebbi harmadolópontja. Húzzunk párhuzamost AC-vel D-n keresztül, ennek a BC-vel vett metszéspontja legyen E. Legyen d a BDE és az ABC háromszög súlypontjainak távolsága. Mennyi d^2 értéke? **Válaszként a tört egyszerűsített alakjában a számláló és a nevező összegét adjátok meg!**

Megoldás:

A Pitagorasz-tétel megfordtása miatt ABC derékszögű, így $ACB\sphericalangle = 90°$. Mivel DE párhuzamos AC- vel, ezért $DEB\triangle$ hasonló $ACB\triangle$-höz, és az $\frac{BD}{AB}$ arány miatt $DE = \frac{2}{3}AC = \frac{8}{3}$.
Ugyancsak a hasonlósag miatt az $ABC\triangle$-nek a B-ből induló BF_{AC} súlyvonala azonos a $DEB\triangle$-nek a B-ből indulójával. Valamint a harmadolások miatt az $ABC\triangle$-nek az S súlypontja pont a DE és BF_{AC} metszéspontja (ami a súlyvonalak egybeesése miatt DE felezőpontja is). Tehát d a $BDE\triangle$-ben a súlypont és a DE felezőpontjának távolsága, ami $\frac{1}{3}BS$. A $BSE\triangle$ derékszögű, mert DE párhuzamos AC-vel, így BS^2-et Pitagorasztétellel kiszámolhatjuk: $BS^2 = ES^2 + EB^2 = \left(\frac{DE}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\cdot BC}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} + 4 = \frac{52}{9}$. Ebből tehát $d^2 = \left(\frac{1}{3}BS\right)^2 = \frac{52}{81}$, vagyis a válasz 133.



E6. Scooby-Dooék a következő 30 évben minden januárban döntenek, hogy vagy lecserélik a járgányukat egy újra 9 Dürer dollárért, vagy megszervizeltetik az aktuális járgányukat annyi Dürer dollárért, ahány éves. Legalább hány Dürer dollárt kell Scooby-Dooéknak a járgányaikra költeniük a következő 30 évben összesen, ha már eldöntötték, hogy első alkalommal új járgányt fognak venni?

Megoldás: Scooby-Dooék akkor költenek összesen a legkevesebbet, ha évekre lebontva átlagban a legkevesebbet költenek. Először vizsgáljuk meg, hogy ha egy járgányt k évig tartanak meg, akkor átlagosan mennyit költenek rá évente. Ez éppen

$$\frac{9+1+2+3+4+\ldots+(k-1)}{k} = \frac{9+\frac{(k-1)\cdot k}{2}}{k} = \frac{9}{k} + \frac{k-1}{2}.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy ez akkor a legkisebb, ha $k = 4$, amikor átlagban $3,75$. Így legalább $30 \cdot 3,75 = 112,5$ a költség, és mivel egész számnak kell lennie, így legalább 113. Ez pedig el is érhető, ha összesen 7 járgányt vásárolnak, amiből ötöt 4 évig, kettőt pedig 5 évig tartanak meg, mivel

$$5\cdot(9+1+2+3) + 2\cdot(9+1+2+3+4) = 113.$$

E7. Hányféleképpen lehet lehelyezni 5 bástyát egy 5×5-ös sakktáblára úgy, hogy minden olyan mezőnek, amin nincs bástya, legyen a sorában vagy oszlopában bástya?
Két esetet különbözőnek tekintünk, ha van olyan mező, amelyiken az egyik esetben van bástya, a másikban nincs.

Megoldás: Tegyük fel, hogy van olyan sor és olyan oszlop is, melybe nem kerül bástya. Ekkor az a mező, ami a bástyamentes sorban, a bástyamentes oszlopban található, egyik bástya által sincs ütésben.

Tehát vagy minden sorban, vagy minden oszlopban kell lennie egy bástyának a sakktáblán. Viszont könnyen látszik, hogy mindkét esetben tényleg ütésben van az összes mező a saakktáblán, tehát csak azt kell összeszámolnunk, hogy ez hányféleképpen lehetséges.

Az, hogy minden sorban van bástya, összesen $5^5 = 3125$ lehetőség, hiszen minden sorban 5-féle helyen lehet a bábu. Az hogy minden oszlopban van bástya, szintén ugyanennyi lehetőség. Azokat az eseteket viszont kétszer számoltuk, amikor a bástyák külön sorokban és oszlopokban is vannak, azaz amikor minden sorban és minden oszlopban pontosan egy bástya van. Ez $5! = 120$ lehetőség, mivel az első sorba 5 helyre kerülhet a bástya, ezek után a másodikban 4 lehetőség van, és így tovább, az utolsó sorban 1 opció marad.

Tehát összesen $2\cdot 3125 - 120 = 6130$ lehetőség van.

E8. Adott a síkon 600 pont, melyek egy szabályos 600-szög csúcsait alkotják. Megrajzoltuk az összes olyan szabályos sokszöget, amelynek csúcsai a pontok közül kerülnek ki és a szögeik fokban mérve egészek. Mennyi a megrajzolt sokszögek oldalszámainak összege?

Megoldás: Az eredeti szabályos 600-szög csúcsai közül kerülnek ki az általunk rajzolt szabályos sokszögek csúcsai. Szabályos sokszögeknek minden oldala egyenlő hosszú, így ha a mi szabályos sokszögünk két szomszédos csúcsa között $k-1$ darab csúcsa van az eredeti 600-szögnek amit nem választottunk ki, akkor bármely két szomszédos csúcs között ennyinek kell lennie. Azaz az eredeti 600 csúcs közül minden k-adikat kiválasztva van esélyünk szabályos sokszöget kapni. Az első és az utolsó kiválasztott csúcs távolsága pontosan akkor lesz azonos a többi szomszédos csúcspár távolságával, ha k osztója a 600-nak, hiszen ekkor fogunk pontosan körbeérni a 600-szög csúcsain, ha minden k-adikat választjuk ki. Ekkor pedig az általunk megrajzolt sokszög $n = \frac{600}{k}$ oldalú, és ha k osztja a 600-at, akkor n is osztója lesz 600-nak. Mivel n egy szabályos sokszög oldalszáma, ezért $n \geq 3$ egész.

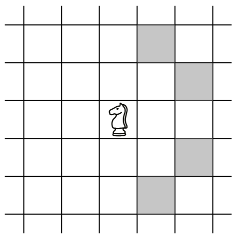
Egy szabályos sokszög belső szögét a hozzá tartozó külső szög 180°-ra egészíti ki, azaz a belső szög nagysága fokban mérve pontosan akkor lesz egész, ha a külső szögre is ez teljesül. Az n oldalú szabályos sokszög minden külső szöge $\frac{360°}{n}$ nagyságú. Ez fokban mérve pontosan akkor lesz egész, ha n osztója a 360-nak.

Egy $n = \frac{600}{k}$ oldalú szabályos sokszöget k-féleképpen rajzolhatunk az eredeti szabályos 600-szögbe, hiszen csak minden k-adik csúcsot választottunk ki ebből, azaz k-féleképpen elforgathatjuk az általunk rajzolt sokszöget. Így, ha valamilyen n-re berajzoljuk a szabályos n-szögeket, akkor összesen $n \cdot k = \frac{600}{k} \cdot k = 600$ megrajzolt oldal keletkezik. Innentől a kérdés az, hogy n értéke hányféle lehet, hiszen megkaptuk, hogy minden n értékkel összesen 600 darab oldalt fogunk megrajzolni.

Már tudjuk, hogy pontosan azok az n értékek teljesítik a feladat feltételeit, amelyek a 360-nak és a 600-nak közös osztói és $n \geq 3$. A 600 és a 360 legnagyobb közös osztója a 120, így a 120 kettőnél nagyobb pozitív osztói lehetnek n értékei. Mivel $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, ezért a 120-nak $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ pozitív osztója van, ezek közül az 1 és a 2 nem lehet n értéke. Azaz n értéke 14-féle lehet, így összesen $600 \cdot 14 = 8400$ az általunk megrajzolt sokszögek oldalszáma.

E9. Hányféleképpen juthatunk el egy huszárral a 8×8-as sakktábla bal alsó sarkából a jobb felső sarkába, ha nem léphetünk balra?

Az ábrán a szürke mezők mutatják, hogy hová tud egy huszár egy lépésben eljutni úgy, hogy nem lép balra. A huszárral nem léphetünk le a sakktábláról.



Megoldás:

Készítsünk egy 8×8-as táblázatot, ahol minden mezőre azt a számot írjuk fel, ahányféleképpen el lehet jutni oda a bal alsó sarokból úgy, hogy nem lépünk balra.

A táblázat kitöltését balról az első oszloppal kezdjük, ahol minden mezőbe 0 kerül, kivéve a legalsóba, ahova 1. Majd lépünk a következő oszlapra, ahol egy mezőre az összegét írjuk azoknak a mezőknek, amelyekről a kérdéses mezőre tudunk lépni. Így oszlopról oszlopra ki tudjuk tölteni a táblázatot:

0	0	0	0	0	4	3	18
0	0	0	1	0	3	11	24
0	0	0	0	3	3	15	20
0	0	1	0	3	3	17	32
0	0	0	2	2	8	11	36
0	1	0	2	1	9	10	41
0	0	1	1	3	4	9	22
1	0	1	0	3	2	12	14

Tehát a jobb felső sarokba 18-féleképpen lehet eljutni.

E10. A rendőrségen 16 gyanúsított áll sorban, kihallgatásra várva. A háklis rendőr egy lépésben megcserélhet két szomszédos gyanúsítottat egymással. Legalább hány lépésre van szüksége ahhoz, hogy biztosan el tudja érni, hogy egyik gyanúsított se álljon két nála alacsonyabb vagy két nála magasabb ember között?

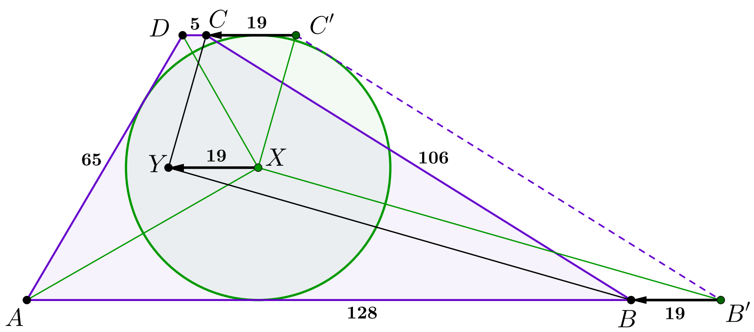
Minden gyanúsított különböző magasságú.

Megoldás: Figyeljük meg, hogy az a feltétel, hogy egy gyanúsított se álljon két nála alacsonyabb vagy két nála magasabb ember között pontosan azt jelenti, hogy a gyanúsítottak vagy csökkenő vagy növekvő sorban állnak, nevezzük ezeket szélsőséges eseteknek. Minden lehetséges sorra megszámolhatjuk, hogy hány emberpárra teljesül, hogy a jobb oldali ember magasabb, mint a bal oldali, nevezzük ezt a számot inverziószámnak. Figyeljük meg továbbá, hogy amikor végrehajtunk egy cserét akkor ez a szám 1-gyel nő vagy csökken annak megfelelően, hogy egy ilyen párt hozunk létre vagy szüntetünk meg. Vegyük észre még, hogy amennyiben az állás nem szélsőséges, úgy tudunk olyat lépni, hogy csökkentsük és olyat is, hogy növeljük az inverziószámot. A teljesen növekvő sor esetében az inverziószám $\binom{16}{2} = 120$, míg a teljesen csökkenő esetben 0. Tehát bármely esetből el tudunk jutni legfeljebb 60 lépésből egy olyan esetbe, amikor az inverziószám 0 vagy 120, ami azt jelenti, hogy az összes pár vagy az egyik irányba áll vagy a másikba, tehát ezek a szélsőséges esetek.

Megfordítva, a 0 inverziószámú helyzetből indulva, 60 lépésen át egyesével növelve az inverziószámot tudunk olyan állásba jutni, ahol pont 60 az inverziószám. Egy ilyen állásból indulva szükséges a 60 csere, így a megoldás 60.

E11. Adott egy $ABCD$ trapéz, melynek az AB és CD oldalai párhuzamosak. Az AB, BC, CD, DA oldalak rendre 128, 106, 5, és 65 egység hosszúak. Az A és D csúcsok belső szögfelezőinek metszéspontja legyen X, a B és C csúcsok belső szögfelezőinek metszéspontja legyen Y. Hány egység hosszú az XY szakasz?

Megoldás: Tekintsük azt a k kört, ami érinti az AD oldalt és az AB, DC félegyeneseket. Legyenek a B', C' pontok olyanok az AB, DC félegyeneseken, melyekre $B'C' \parallel BC$ (így tehát $BB'C'C$ egy paralelogramma) és az $AB'C'D$ trapéznak van beírt köre. Mivel adott pontból a körhöz húzott érintők azonos hosszúak, ezért $AB' + C'D = AD + B'C' = AD + BC = 65 + 106 = 171$. Mivel $AB + CD = 128 + 5 = 133$, így $BB' = CC' = \dfrac{171 - 133}{2} = 19$. Vegyük észre, hogy az $AB'C'D$ trapéz szögfelezői a k kör középpontjában találkoznak, ami így éppen X. A $BB'C'C$ paralelogrammát egy eltolásként kezelve az Y pont éppen az X eltoltja lesz. Az eltolás hosszát már kiszámoltuk, hogy 19, így az XY távolság is ugyanennyi, tehát 19.



E12. Egy táblán szerepel két szám. Dani egy lépésben mindig letörli az egyik számot, és felírja helyette a két szám összegét. Ezt addig csinálja, amíg a táblán először megjelenik a 42. Hányféleképpen juthat el ehhez a számhoz, ha kezdetben két darab 1-es szerepel a táblán?
Két eljutás megegyezik, ha Dani a két eljutás minden lépésében megegyező értékű számot töröl le.

Megoldás: Gondolkodjunk visszafelé. Amikor először felkerül a 42 a táblára, legyen a másik szám x. Tehát az utolsó lépés előtt x és $42 - x$ szerepelt a táblán. Mivel Dani lépései során csak pozitív számok szerepelhetnek a táblán, ezért $42 - x > 0$, tehát $42 > x$.

Továbbá vegyük észre, hogy a táblára írt két szám legnagyobb közös osztója nem változik az egyes lépések során. Emiatt $1 = (1,1) = \ldots = (x,42)$, ahol (a,b) az a és b legnagyobb közös osztóját jelöli. Megkaptuk tehát, hogy x és 42 relatív prímek (ahol azt mondjuk, hogy két szám relatív prím, ha a legnagyobb közös osztójuk 1). Így könnyű végignézni, hogy az x szám csak az alábbi 12 szám lehet: $1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41$. Könnyen látható, hogy bármely ilyen értékre pontosan 1 lehetséges eljutás van, hiszen visszafelé gondolkodva egy állásban mindig a nagyobb szám kellett, hogy legyen növelve az előző állásból, és mivel minden lépésben relatív prímek a számok, így mindig eljutunk visszafelé lépkedve az $(1,1)$-be. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a válasz 12.

E13. Benedek egy kétsoros táblázat felső sorába néhány egymást követő 1-nél nagyobb természetes számot írt növekvő sorrendben egymás mellé, majd mindegyik alá a második sorba leírta a legkisebb prímosztóját. Ezután kitörölte az eredeti számokat. Ekkor a táblázatban szereplő számok mindegyikére teljesült, hogy tőle az egyik irányban (balra vagy jobbra) legalább annyi szám volt, mint maga a szám. Legalább hány számot írt be eredetileg Benedek a táblázat felső sorába?

Megoldás:

Először is vegyük észre, hogy az alsó sorban minden második helyen 2 áll, továbbá ha szerepel egy $q > 2$ prím, akkor a legközelebbi előfordulása legalább $2q$ távolságra van tőle, hiszen a q feletti számtól a felső sorban q távolságra lévők biztosan oszthatók 2-vel, a többi szám pedig nem osztható q-val.

Nézzük meg, milyen prímeket írhatott Benedek a táblázat második sorába. Jelölje p a legnagyobb prímet, amit beírt. Tudjuk, hogy p-től jobbra vagy balra szerepel legalább p db szám, feltehető, hogy tőle jobbra. Tekintsük a p-től jobbra lévő p darab számot. Ezek mind csak p-nél kisebb prímek lehetnek. A $p \leq 5$ esetben nem megoldható a feladat, mert akkor tőle jobbra kettő és négy távolságra is csak 3 állhatna, ami nem lehet.

Ha $p = 7$, akkor a következő 7 szám között a fenti észrevétel miatt legfeljebb 1 db 5-ös, 2 db 3-as és 4 db 2-es lehet, de 2 db 3-as csak akkor lehetne, ha a hét darab szám közül a két szélső 3-as, de ekkor a 7 mellett 3 állna, ami nem lehet, hiszen két egymást követő szám közül az egyik biztosan osztható 2-vel. Ez viszont csak összesen 6 szám, így muszáj egy 7-nél nagyobb prímet is használnunk.

Ha $p = 11$, akkor a fenti esethez hasonlóan meghatározhatjuk, hogy a következő 11 számban a prímek legfeljebb hányszor fordulhatnak elő:

- 7-esből legfeljebb 1 db,
- 5-ösből legfeljebb 1 db,
- 3-asból legfeljebb 2 db,
- 2-esből legfeljebb 6 db.

Ez csak 10 szám, muszáj 11-nél nagyobb prímet is használnunk.

Ha $p = 13$, akkor a következő 13 számban a prímek előforduálsai legfeljebb:

- 11-esből legfeljebb 1 db,
- 7-esből legfeljebb 1 db,
- 5-ösből legfeljebb 2 db,
- 3-asból legfeljebb 2 db (mivel ha 3 db lenne, akkor lenne egy 3-as, ami szomszédos a 13-assal, ami nem lehet),
- 2-esből legfeljebb 7 db.

Ekkor összesen épp 13-szor fordulnak elő ezek a prímek. A 2-eseket előre tudjuk, hogy hová kell beírni, így a következőt kapjuk:

13 2 _ 2 _ 2 _ 2 _ 2 _ 2 _ 2

Vegyük észre, hogy a 2 db 5-öst csak úgy tudjuk lehelyezni, hogy a még szabad helyek közül a két legtávolabbira tesszük őket, ezután pedig a két 3-as lerakására is csak egy lehetőségünk van, így az alábbi állást kapjuk:

13 2 5 2 3 2 _ 2 _ 2 3 2 5 2

Ha most a 11 a két szabad hely közül a bal oldalira kerülne, akkor még legalább 4 új számot kellene valamelyik szélére írnunk, ezzel összesen legalább 18 számra lenne szükség. Ha viszont a jobb oldalira tesszük, akkor elég 3 új számot tenni a 13 bal oldalára, melyek csak a $2, 3, 2$ lehetnek. Ezzel meg is kapunk egy konstrukciót 17 prím elhelyezésére, ami a következő:

2 3 2 13 2 5 2 3 2 7 2 11 2 3 2 5 2

Ez 17 prímet használ, ami optimális, hiszen láthattuk, hogy $p = 13$ esetén ennél jobb nem lehet, ha pedig $p > 13$, akkor p legalább 17, tehát legalább 18 prímre lenne szükség.

A fentebb kapott sorozathoz, mint alsó sorhoz létezik is egymást követő pozitív egészek sorozata felső sornak: keressük azt az x számot, mely az őt követő $x+1,\ x+2, \ldots,\ x+16$ számokkal olyan sorozatot alkot, melyre a legkisebb prímosztóik a fenti 17 számból álló sorozatot alkotják. Ehhez elég az, ha az adott prímek osztják a megfelelő felső sorbeli számokat, hiszen ezeknek a környező számokra vonatkozó feltételek miatt kisebb prímosztójuk nem lehet.

Továbbá ha egy q prím osztja $x+i$-t, akkor szintén osztani fogja $x+i+q$-t, $x+i+2q$-t, stb. Emiatt elég egy olyan x-et találni, amelyre az alábbi oszthatóságok teljesülnek:

- $2 \mid x$,
- $3 \mid x+1$,
- $13 \mid x+3$,
- $5 \mid x+5$,
- $7 \mid x+9$,
- $11 \mid x+11$.

A kínai maradéktétel szerint ha egy x számnak egymással páronként relatív prím modulusokkal teszünk feltételeket a maradékára, akkor ennek mindig létezik megoldása, emiatt a mi esetünkben is létezik megfelelő x. Egy konkrét ilyen szám például az $x = 27830$.

E14. Anett és Andris egy olyan országban laknak, ahol az autók rendszáma 3 számjegyből áll (000-tól 999-ig) és minden autónak különböző rendszáma van. Az autópályán mennek, és a következő játékot játsszák: Andris gondol egy számra 000 és 999 között, és amikor egy autó megelőzi őket, akkor ennek a kocsinak a rendszámának minden helyiértékéről elárulja, hogy a következő három állítás közül melyik teljesül rá:

- A rendszám adott helyiértéken lévő számjegye megegyezik a gondolt szám adott helyiértékén lévő számjegyével.
- A rendszám adott helyiértéken lévő számjegye szerepel a gondolt számban, de csak valamelyik másik helyiértéken.
- A rendszám adott helyiértéken lévő számjegye egyáltalán nem szerepel az Andris által gondolt számban.

Andris ezenkívül azt is megmondta Anettnek, hogy nincs két egyforma számjegy az általa gondolt számban. Legalább hány különböző autónak kell megelőznie őket ahhoz, hogy Anett biztosan ki tudja találni a gondolt számot?

Megoldás:

Legalább 641 autó kell ahhoz, hogy Anett biztosan ki tudja találni.

Amennyiben Andrisék rendszáma 089, és pontosan azon autók mentek el mellettük, melyek rendszámában a 8-as és 9-es számjegyek nem szerepelnek sem a tízes, sem az egyes helyiértéken, akkor még Anett nem tudhatja a rendszámot, hiszen a 098 rendszám esetén minden eddigi kocsira ugyanazt a választ kapta volna. Ilyen rendszámból összesen $10 \cdot 8 \cdot 8 = 640$ darab van, ezért 641 rendszám biztosan szükséges.

Ennyiből viszont ki is lehet találni. Nevezzünk egy számjegyet ismertnek, ha már legalább két különböző helyiértéken szerepelt az elhaladt autók rendszámán, vagy pontosan egy helyiértéken szerepelt, és Andris azt mondta, hogy nem szerepel a gondolt számban, vagy azt, hogy ugyanazon a helyiértéken szerepel.

Amennyiben egy számjegy ismert, akkor Anett vagy ki tudja zárni, hogy az szerepel a gondolt számban, vagy meg tudja mondani, hogy melyik helyiértéken van: amennyiben legalább két helyiértéken szerepelt, és ezek valamelyikén olyan választ kapott, hogy azon a helyen szerepel a számjegy vagy olyat, hogy a számjegy nem szerepel a számban, akkor ez nyilvánvaló. Ha pedig mindkét esetben azt tudta meg, hogy rossz helyiértéken van a számjegy, akkor kizárásos alapon a harmadikon kell, hogy szerepeljen.

Emiatt ha van 9 ismert számjegy, akkor Anett ki tudja találni a gondolt számot: A 9 ismert számjegyről mind ki tudja találni, hogy szerepel-e a számban, és ha igen, akkor hol. Így a gondolt számnak vagy mindhárom helyiértékén adott az érték, vagy egy helyen hiányzik, de ekkor ez csak a megmaradt, tizedik számjegy lehet.

Viszont ha legfeljebb 7 ismert számjegy van, akkor még csak legfeljebb 640 kocsi előzte meg őket: ilyenkor van három számjegy, amelyek nem ismertek, azaz eddig legfeljebb 1 helyiértéken szerepeltek. Így ha megszámoljuk, hogy az adott helyiérteken eddig hány szám fordult elő, akkor ezen három szám összege legfeljebb 24, hiszen mindhárom ismeretlen számjegy két helyiértékről hiányzik. Emiatt a számtani-mértani egyenlőtlenséggel belátható, hogy legfeljebb $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ rendszámot láthattak eddig.

Így már csak azt az esetet kell megvizsgálni, ha 8 ismert számjegy van.

Ilyenkor ha van legalább 2 ismert számjegy, amelyről Anett tudja, hogy benne van a számban, akkor csak akkor nem tudja egyértelműen kitalálni a gondolt számot, ha a két ismeretlen számjegyet még egyáltalán nem látta, viszont ekkor összesen legfeljebb $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ autót láthattak. Emiatt a későbbiekben feltesszük, hogy legfeljebb 1 ismert számjegy van, amely szerepel a gondolt számban.

Ekkor három további esetet nézünk:

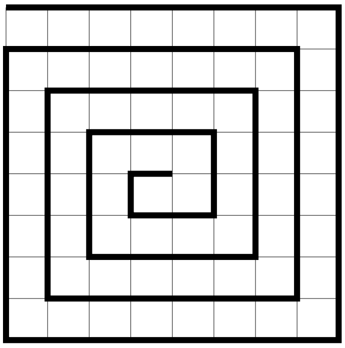
1. eset: A két ismeretlen számjegy közül legalább az egyik még nem szerepelt. A korábbi gondolatmenet alapján ekkor összesen legfeljebb 25 lehet a három helyiértéken előforduló számok összege, tehát legfeljebb $9 \cdot 8 \cdot 8 = 576$ rendszámot láthattak. A további két esetben feltesszük, hogy mindkét ismeretlen szám megjelent legalább egy rendszámban.

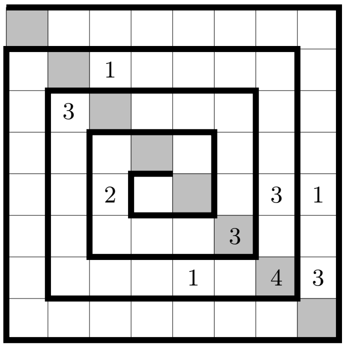
2. eset: A két ismeretlen számjegy ugyanazon helyiértéken szerepelt. Ilyenkor a maradék két helyiértéken legfeljebb 8-8 számjegy fordulhatott eddig elő, így összesen $10 \cdot 8 \cdot 8 = 640$ különböző rendszámot láthattak.

3. eset: A két ismeretlen számjegy két különböző helyiértéken szerepel. Ekkor Anett ki tudja találni a gondolt számot: mivel 8 ismert számjegy van, az egyikről már tudja Anett, hogy szerepel a számban a pontos helyével együtt. Legalább az egyik ismeretlen számjegyet nem ezen a helyiértéken látták, így ennek a számjegynek is egyértelmű lesz a helye, így végül az utolsó kérdéses helyiértéken csak a másik ismeretlen számjegy lehet.

Minden lehetséges esetben beláttuk, hogy vagy legfeljebb 640 autót láthattak eddig, vagy Anett már ki tudja találni a gondolt számot, így 641 autó mindig elég a kitaláláshoz.

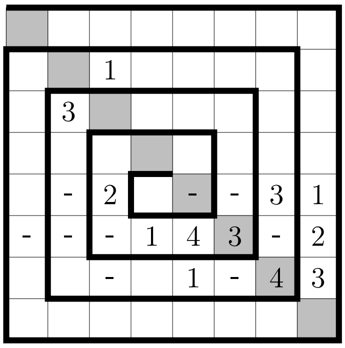
E15. Csabinak, a kis csigának a háza a bal oldali ábrán látható módon 8×8 négyzetből áll. Csabi most tanulja a számokat, egyelőre még csak 4-ig tud számolni. Csabi bátyja úgy akarja segíteni a tanulását, hogy néhány négyzetbe beír egy számot az $1, 2, 3, 4$ közül. Szeretné, hogy a csigavonal mentén kívülről befelé haladva a nemüres négyzetekben az $1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, \ldots, 4$ számok szerepeljenek ebben a sorrendben. Továbbá, hogy Csabi fel ne boruljon, arra is szeretne figyelni, hogy minden sorban és oszlopban mind a négy szám pontosan egyszer szerepeljen. Eddig a jobb oldali ábrán látható jegyeket írta be, segíts neki befejezni a kitöltést! Mennyi lesz végül azon szürke mezőkben lévő számok szorzata, melyek nem maradnak üresen?



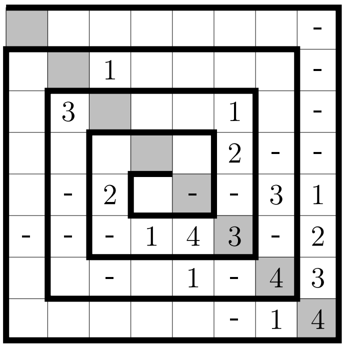


Megoldás:

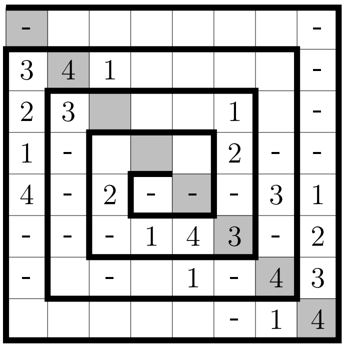
Első lépésként a hatodik sort egyértelműen ki lehet tölteni és néhány további mezőnél megállapítható, hogy oda nem kerül szám.



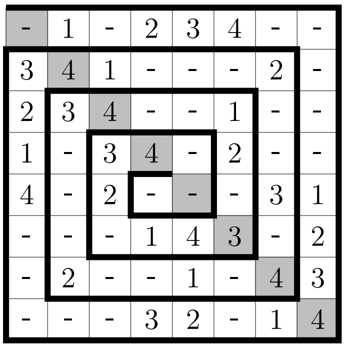
A harmadik és a hatodik sorban szereplő hármasok közé még be kell írni egy 4-1-2-t, amiből az 1-es, 2-es csak egyféleképpen jöhet oda. Az alsó sorban lévő 1-estől balra kell lennie még két számjegynek, így az is beírható.



A bal oldali oszlopba 2-es csak úgy kerülhet, ha a második és az alsó sorban lévő 1-es közé még bekerülnek a 2-3-4-1-2-3-4 számok. Ebből a 4-es nem kerülhet az alsó három sorba.



Innen a sorok a következő sorrendben egyértelműen kitölthetőek: 4., 3., 7., 1., 2., 6. A kérdéses számok szorzata: $4^5 \cdot 3 = 3072$.



E16. Legyen a és b két olyan valós szám, melyekre $a^2 + b^2 = 1$ és $a^{10} + b^{10} = \frac{11}{36}$. Mennyi $a^{12} + b^{12}$? **Válaszként a tört egyszerűsített alakjában a számláló és a nevező összegét adjátok meg!**

Megoldás: Legyen $c = a^2$ és $d = b^2$. Ekkor a feladatban szereplő azonosságot átírva $d = 1 - c$. Ekkor a binomiális-tétel segítségével:

$$\frac{11}{36} = a^{10} + b^{10} = c^5 + d^5 = c^5 + (1-c)^5 = c^5 - c^5 + 5c^4 - 10c^3 + 10c^2 - 5c + 1 =$$

$$= 5c^4 - 10c^3 + 10c^2 - 5c + 1 = 5 \cdot \left(c^4 - 2c^3 + 2c^2 - c + \frac{1}{5}\right).$$

Osszuk le 5-tel mindkét oldalt:

$$\frac{11}{180} = c^4 - 2c^3 + 2c^2 - c + \frac{1}{5} = \left(c^2 - c + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{20}.$$

Mindkét oldalhoz $\frac{1}{20}$-ot adva:

$$\frac{20}{180} = \frac{1}{9} = \left(c^2 - c + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Tehát $c^2 - c + \frac{1}{2} = \pm\frac{1}{3}$. Ebből viszont a $c^2 - c + \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$ kizárható, mivel a bal oldal minden c-re pozitív. Tehát a $c^2 - c + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ kifejezést továbbalakítva:

$$0 = c^2 - c + \frac{1}{6} = \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{12}.$$

Következésképpen: $c_1 = \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{2}$ és $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{2}$.

Mi az $a^{12} + b^{12} = c^6 + d^6 = c^6 + (1-c)^6$ értékét szeretnénk kiszámolni. Könnyen látható, hogy $c_1 = 1 - c_2$, tehát a kifejezés értéke mindkét számra ugyanannyi lesz. Behelyettesítve:

$$c^6 + (1-c)^6 = \left(\frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{2}\right)^6 + \left(-\frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{2}\right)^6.$$

Vegyük észre, hogy a zárójelek binomiális tétellel való felbontásakor azok a tagok, melyekben páratlan kitevőn szerepelne az $\frac{1}{\sqrt{12}}$ kiesnek, mivel a másik zárójel felbontásakor ugyanezen a tagok jelennek meg fordított előjellel. Azon tagok, melyekben az $\frac{1}{\sqrt{12}}$ páros kitevőn szerepel, ugyanolyan előjellel fognak megjelenni a másik zárójel felbontásakor, tehát a zárójeleket felbontva:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{2}\right)^6 + \left(-\frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{2}\right)^6 = 2 \cdot \left(\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)^6 + 15 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 15 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{1728} + \frac{15}{576} + \frac{15}{192} + \frac{1}{64}\right) = 2 \cdot \frac{1 + 45 + 135 + 27}{1728} = 2 \cdot \frac{208}{1728} = 2 \cdot \frac{13}{108} = \frac{13}{54}.$$

Ebben a számláló és a nevező összege $13 + 54 = 67$.