

XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

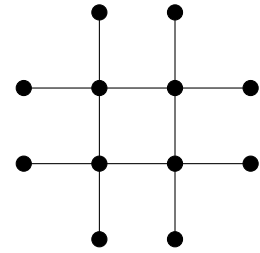
Váltó feladatsor



E⁺-1. Hányféleképpen lehet felírni a 13860-at két relatív prím, pozitív egész szám szorzataként? Két felbontást nem tekintünk különbözőnek, ha a két szám ugyanaz, csak más sorrendben. (3 pont)

E⁺-2. Molli és Tamás meglátogattak 4-4 várost úgy, hogy köztük csak utak mentén közlekedtek. Az ábrán pontok jelölik városokat, ahol járhattak, és szakaszok a köztük haladó utakat. Tudjuk, hogy minden városban legfeljebb az egyikük járt, valamint minden városban legfeljebb egyszer jártak. Hányféleképpen teheték ezt meg?

Két esetet akkor tekintünk különbözőnek, ha Molli és Tamás közül legalább az egyikük más városokat látogatott meg, vagy ugyanazokat más sorrendben.



(3 pont)

E⁺-3. Hány olyan négyjegyű szám van, melynek minden számjegye különböző, a számjegyei csökkenő sorrendben állnak, továbbá az első és utolsó számjegyének szorzata megegyezik a két középső számjegyének szorzatával? (3 pont)

E⁺-4. Scooby-Dooék a következő 30 évben minden januárban döntenek, hogy vagy lecserélik a járgányukat egy újra 9 Dürer dollárért, vagy megszervizeltetik az aktuális járgányukat annyi Dürer dollárért, ahány éves. Legalább hány Dürer dollárt kell Scooby-Dooéknak a járgányaikra költeniük a következő 30 évben összesen, ha már eldöntötték, hogy első alkalommal új járgányt fognak venni? (3 pont)

E⁺-5. Hányféleképpen lehet lehelyezni 5 bástyát egy 5×5 -ös sakktáblára úgy, hogy minden olyan mezőnek, amin nincs bástya, legyen a sorában vagy oszlopában bástya?

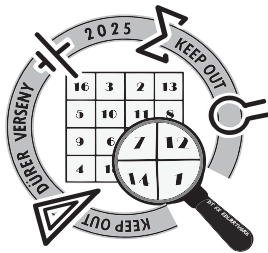
Két esetet különbözőnek tekintünk, ha van olyan mező, amelyiken az egyik esetben van bástya, a másikban nincs. (4 pont)

E⁺-6. Adott egy $ABCD$ trapéz, melynek az AB és CD oldalai párhuzamosak. Az AB , BC , CD , DA oldalak rendre 128, 106, 5, és 65 egység hosszúak. Az A és D csúcsok belső szögfelezőinek metszéspontja legyen X , a B és C csúcsok belső szögfelezőinek metszéspontja legyen Y . Hány egység hosszú az XY szakasz? (4 pont)

E⁺-7. A rendőrségen 16 gyanúsított áll sorban, kihallgatásra várva. A háklis rendőr egy lépésben megcserélhet két szomszédos gyanúsítottat egymással. Legalább hány lépésre van szüksége ahhoz, hogy biztosan el tudja érni, hogy egyik gyanúsított se álljon két nála alacsonyabb vagy két nála magasabb ember között?

Minden gyanúsított különböző magasságú.

(4 pont)



XVIII. Dürer Verseny

Döntő (2025. 02. 07-09.)

Váltó feladatsor



kategória

E⁺-8. Egy táblán szerepel két szám. Dani egy lépésben mindig letörli az egyik számot, és felírja helyette a két szám összegét. Ezt addig csinálja, amíg a táblán először megjelenik a 42. Hányféleképpen juthat el ehhez a számhoz, ha kezdetben két darab 1-es szerepel a táblán?

Két eljutás megegyezik, ha Dani a két eljutás minden lépésében megegyező értékű számot töröl le.
(4 pont)

E⁺-9. Anett és Andris egy olyan országban laknak, ahol az autók rendszáma 3 számjegyből áll (000-tól 999-ig) és minden autónak különböző rendszáma van. Az autópályán mennek, és a következő játékot játsszák: Andris gondol egy számra 000 és 999 között, és amikor egy autó megelőzi őket, akkor ennek a kocsinak a rendszámának minden helyiértékéről elárulja, hogy a következő három állítás közül melyik teljesül rá:

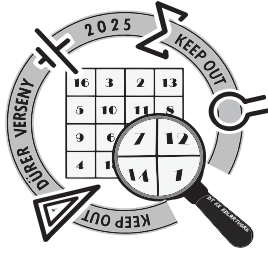
- A rendszám adott helyiértéken lévő számjegye megegyezik a gondolt szám adott helyiértékén lévő számjegyével.
- A rendszám adott helyiértéken lévő számjegye szerepel a gondolt számban, de csak valamelyik másik helyiértéken.
- A rendszám adott helyiértéken lévő számjegye egyáltalán nem szerepel az Andris által gondolt számban.

Andris ezenkívül azt is megmondta Anettnek, hogy nincs két egyforma számjegy az általa gondolt számban. Legalább hány különböző autónak kell megelőznie őket ahhoz, hogy Anett biztosan ki tudja találni a gondolt számot?
(5 pont)

E⁺-10. Benedek egy kétsoros táblázat felső sorába néhány egymást követő 1-nél nagyobb természetes számot írt növekvő sorrendben egymás mellé, majd mindegyik alá a második sorba leírta a legkisebb prímosztóját. Ezután kitörölte az eredeti számokat. Ekkor a táblázatban szereplő számok mindegyikére teljesült, hogy tőle az egyik irányban (balra vagy jobbra) legalább annyi szám volt, mint maga a szám. Legalább hány számot írt be eredetileg Benedek a táblázat felső sorába?
(5 pont)

E⁺-11. Vegyük a síkbeli koordináta-rendszer azon pontjait, melyeknek mindkét koordinátája 46-nál kisebb pozitív egész szám. Nevezzünk egy rácsnégyzetet szépnek, ha a csúcsai ezek közül a pontok közül kerülnek ki, az oldalai pedig párhuzamosak valamelyik koordinátatengellyel. Hány olyan rácspont van, melyre azon szép rácsnégyzetek száma, melyeknek nem csúcsa ez a rácspont, osztható 13-mal?
(5 pont)

E⁺-12. Adott a négy különböző A , B , C és D pont a térben. Tudjuk, hogy közülük semelyik három sincs egy egyenesen, továbbá végtelen sok olyan gömb létezik, amely érinti az AB , BC , CD és DA szakaszokat egy belső pontjukban. Jelölje ezen szakaszoknak a hosszait rendre a , b , c és d . Ezekről tudjuk, hogy különböző egyjegyű pozitív egész számok. Hányféle lehet ezek alapján az (a, b, c, d) rendezett négyes?
(5 pont)



XVIII. Dürer Verseny

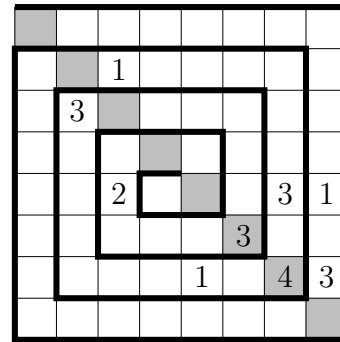
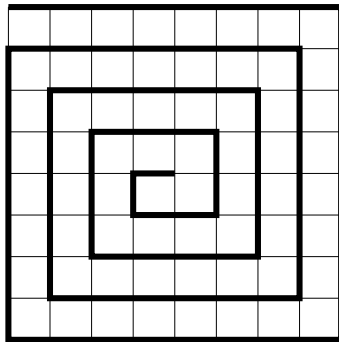
Döntő (2025. 02. 07-09.)

Váltó feladatsor



kategória

E⁺-13. Csabinak, a kis csigának a háza a bal oldali ábrán látható módon 8×8 négyzetből áll. Csabi most tanulja a számokat, egyelőre még csak 4-ig tud számolni. Csabi bátyja úgy akarja segíteni a tanulását, hogy néhány négyzetbe beír egy számot az 1, 2, 3, 4 közül. Szeretné, hogy a csigavonal mentén kívülről befelé haladva a nemüres négyzetekben az 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, \dots , 4 számok szerepeljenek ebben a sorrendben. Továbbá, hogy Csabi fel ne boruljon, arra is szeretne figyelni, hogy minden sorban és oszlopban mind a négy szám pontosan egyszer szerepeljen. Eddig a jobb oldali ábrán látható jegyeket írta be, segíts neki befejezni a kitöltést! Mennyi lesz végül azon sűrke mezőkben lévő számok szorzata, melyek nem maradnak üresen?



(6 pont)

E⁺-14. Legyen x olyan valós szám, melyre $\sin^{10}(x) + \cos^{10}(x) = \frac{11}{36}$. Mennyi $\sin^{12}(x) + \cos^{12}(x)$?
Válaszként a tört egyszerűsített alakjában a számláló és a nevező összegét adjátok meg!

(6 pont)

E⁺-15. Csongi a kockás füzetébe szakaszokat rajzolgat úgy, hogy minden szakasznak az egyik végpontja az origó, a másik pedig az első síknegyednek (ahol mindkét koordináta nemnegatív) egy rácsponjtja. Az első szakasz a $(0, 1)$ pontba, a második pedig az $(1, 1)$ pontba megy. Innentől kezdve az új szakaszt mindig úgy rajzolja be, hogy az x tengellyel bezárt szöge szigorúan az előző két szakasz x tengellyel bezárt szöge közé essen, valamint ezek közül minimális legyen a hossza. Mennyi a 666. berajzolt szakasz hossz négyzetének a 66-os maradéka?

Minden lépésben pontosan egy szakasz van, ami megfelel a feltételeknek.

(6 pont)

E⁺-16. A Baker Street-i végállomásra menetrend szerint 10 percenként érkezik villamos és egyenletes valószínűséggel késik legalább 0, de legfeljebb t percet, ahol t egy 10-nél kisebb pozitív valós szám. A késések egymástól függetlenek. A villamosmegállóban mindig ki van írva, hogy a legközelebbi villamos, ami még nem érkezett meg, mennyit fog késni (a kiírás tökéletes pontossággal szerepel a következő villamos késése és ez a járat megérkezéséig nem változik). Áron 12:00 és 13:00 között a villamosok késésétől függetlenül, egyenletes valószínűséggel ér ki a megállóba. Így az érkezésekor a megállóban látható késés várható értéke 4 perc. Mennyi t értéke? **Tudjuk, hogy t egyértelműen írható $a + \sqrt{b}$ alakba, ahol a és b egészek. Válaszként $a + b$ értékét adjátok meg!** (6 pont)