XVIII.
Dürer Verseny
Döntő (2025. 02. 07-09.)

Váltó megoldókulcs

E+ kategória

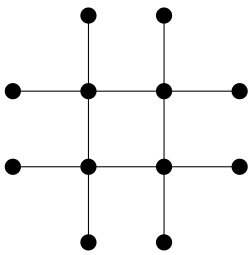
E+1. Hányféleképpen lehet felírni a 13860-at két relatív prím, pozitív egész szám szorzataként?
Két felbontást nem tekintünk különbözőnek, ha a két szám ugyanaz, csak más sorrendben.

Megoldás: Két szám pontosan akkor relatív prím, ha a prímtényezős felbontásukban nem szerepel azonos prímszám.

$13860 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, tehát a számnak 5-féle különböző prímosztója van. Ezt az 5 prímosztót kell két csoportba osztanunk attól függően, hogy melyik prímszám melyik szorzótényezőnek az osztója.

Ez összesen $2^5 = 32$-féleképpen tehető meg, viszont mivel a két szám felcserélhető, ezért ezt még el kell osztanunk 2-vel, tehát összesen $\frac{32}{2} = 16$-féleképpen írható fel a 13860 a kívánt módon.

E+2. Molli és Tamás meglátogattak 4-4 várost úgy, hogy köztük csak utak mentén közlekedtek. Az ábrán pontok jelölik városokat, ahol járhattak, és szakaszok a köztük haladó utakat. Tudjuk, hogy minden városban legfeljebb az egyikük járt, valamint minden városban legfeljebb egyszer jártak. Hányféleképpen tehették ezt meg?
Két esetet akkor tekintünk különbözőnek, ha Molli és Tamás közül legalább az egyikük más városokat látogatott meg, vagy ugyanazokat más sorrendben.



Megoldás: Bontsuk a városokat két részre, külső városoknak hívjuk azokat, amelyeknek egy szomszédja van, belső városoknak pedig a maradék négy várost.

Vegyük észre, hogy mindkét út során a másodiknak, illetve harmadiknak érintett városoknak belső városoknak kell lennie, hiszen mindenki minden városban legfeljebb egyszer járt. Először határozzuk meg, hányféle lehet összesen Molli és Tamás másodiknak és harmadiknak meglátogatott városa. Molli második városát kiválaszthatjuk 4-féleképpen. Ezek után Molli harmadik városát 2-féleképpen tudjuk kiválasztani, mert minden belső városnak két további belső szomszédja van. Ezek után Tamás második városa 2-féle lehet, a harmadik városa pedig már csak egyféle lehet, és ez a megmaradt belső város szomszédos is az eggyel előtte választottal. Ez eddig $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 16$ lehetőség.

Mivel minden városban legfeljebb egyikük járt, ezért mindkét útban az első és negyedik városok külső városok. Viszont minden belső városnak pontosan két külső szomszédja van, és ezek különbözőek. Ebből következik, hogy Molli és Tamás első és utolsó városát egymástól függetlenül kétféleképpen tudjuk kiválasztani, így ezekre összesen $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ lehetőség van.

Ez összeségében $16 \cdot 16 = 256$ lehetőség.

E+3. Hány olyan négyjegyű szám van, melynek minden számjegye különböző, a számjegyei csökkenő sorrendben állnak, továbbá az első és utolsó számjegyének szorzata megegyezik a két középső számjegyének szorzatával?

Megoldás: Vegyük észre, hogy 5 és 7 nem szerepelhet a számban, hiszen minden más számjeggyel relatív prímek, azaz két másik számjegy szorzata nem lehet osztható velük. A 0 sem szerepelhet, hiszen két nemnulla szám szorzata nem lehet 0. Legyen a számunk $\overline{abcd}$, nézzük meg milyen számjegyek kerülhetnek a helyére.

- Ha $a = 9$, akkor $b \cdot c$ osztható 9-cel, ez csak úgy lehetséges, ha $b = 6$ és $c = 3$, ekkor $9d = 18$, tehát $d = 2$, a szám pedig 9632.
- Ha $a = 8$, akkor a $b \cdot c$ szorzat osztható 8-cal, ami csak úgy lehet, ha $b = 4, c = 2$ vagy $b = 6, c = 4$. Az így kapott számok 8421 és 8643.

- Ha $a = 6$, akkor $b = 3$ vagy $c = 3$, hiszen a csökkenő sorrend miatt 9 nem állhat ezeken a helyeken. Ha $b = 3$, akkor $c = 2$, hiszen ez az egyetlen 3-nál kisebb páros szám, így a kapott szám 6321. Ha $c = 3$, akkor $b = 4$, hiszen nincs más páros szám 3 és 6 között. Ekkor a szám 6432.
- Ha $a = 4$, akkor mivel a 0 számjegyet már kizártuk, az egyetlen lehetőség a 4321 lenne, ami viszont nem jó.
- Ha $a \leq 3$, akkor nincs 3 nála kisebb számjegy amit beírhatnánk a maradék 3 helyre.

Megvizsgáltuk az összes lehetséges esetet, ezzel belátva, hogy 5 ilyen szám van.

E+4. Scooby-Dooék a következő 30 évben minden januárban döntenek, hogy vagy lecserélik a járgányukat egy újra 9 Dürer dollárért, vagy megszervizeltetik az aktuális járgányukat annyi Dürer dollárért, ahány éves. Legalább hány Dürer dollárt kell Scooby-Dooéknak a járgányaikra költeniük a következő 30 évben összesen, ha már eldöntötték, hogy első alkalommal új járgányt fognak venni?

Megoldás: Scooby-Dooék akkor költenek összesen a legkevesebbet, ha évekre lebontva átlagban a legkevesebbet költenek. Először vizsgáljuk meg, hogy ha egy járgányt k évig tartanak meg, akkor átlagosan mennyit költenek rá évente. Ez éppen

$$\frac{9+1+2+3+4+...+(k-1)}{k} = \frac{9+\frac{(k-1)\cdot k}{2}}{k} = \frac{9}{k} + \frac{k-1}{2}.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy ez akkor a legkisebb, ha $k = 4$, amikor átlagban $3,75$. Így legalább $30 \cdot 3,75 = 112,5$ a költség, és mivel egész számnak kell lennie, így legalább 113. Ez pedig el is érhető, ha összesen 7 járgányt vásárolnak, amiből ötöt 4 évig, kettőt pedig 5 évig tartanak meg, mivel

$$5 \cdot (9+1+2+3) + 2 \cdot (9+1+2+3+4) = 113.$$

E+5. Hányféleképpen lehet lehelyezni 5 bástyát egy 5×5-ös sakktáblára úgy, hogy minden olyan mezőnek, amin nincs bástya, legyen a sorában vagy oszlopában bástya?
Két esetet különbözőnek tekintünk, ha van olyan mező, amelyiken az egyik esetben van bástya, a másikban nincs.

Megoldás: Tegyük fel, hogy van olyan sor és olyan oszlop is, melybe nem kerül bástya. Ekkor az a mező, ami a bástyamentes sorban, a bástyamentes oszlopban található, egyik bástya által sincs ütésben.

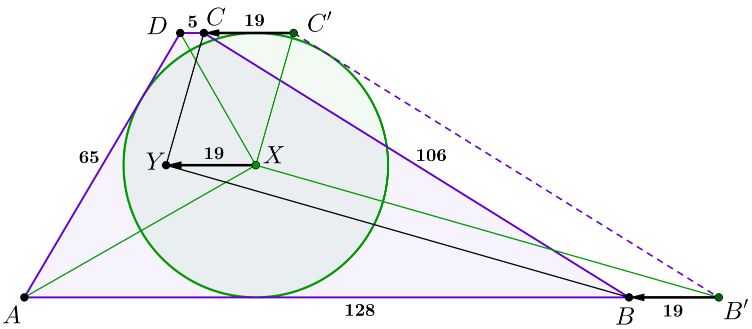
Tehát vagy minden sorban, vagy minden oszlopban kell lennie egy bástyának a sakktáblán. Viszont könnyen látszik, hogy mindkét esetben tényleg ütésben van az összes mező a saakktáblán, tehát csak azt kell összeszámolnunk, hogy ez hányféleképpen lehetséges.

Az, hogy minden sorban van bástya, összesen $5^5 = 3125$ lehetőség, hiszen minden sorban 5-féle helyen lehet a bábu. Az hogy minden oszlopban van bástya, szintén ugyanennyi lehetőség. Azokat az eseteket viszont kétszer számoltuk, amikor a bástyák külön sorokban és oszlopokban is vannak, azaz amikor minden sorban és minden oszlopban pontosan egy bástya van. Ez $5! = 120$ lehetőség, mivel az első sorba 5 helyre kerülhet a bástya, ezek után a másodikban 4 lehetőség van, és így tovább, az utolsó sorban 1 opció marad.

Tehát összesen $2 \cdot 3125 - 120 = 6130$ lehetőség van.

E+6. Adott egy $ABCD$ trapéz, melynek az AB és CD oldalai párhuzamosak. Az AB, BC, CD, DA oldalak rendre 128, 106, 5, és 65 egység hosszúak. Az A és D csúcsok belső szögfelezőinek metszéspontja legyen X, a B és C csúcsok belső szögfelezőinek metszéspontja legyen Y. Hány egység hosszú az XY szakasz?

Megoldás: Tekintsük azt a k kört, ami érinti az AD oldalt és az AB, DC félegyeneseket. Legyenek a B', C' pontok olyanok az AB, DC félegyeneseken, melyekre $B'C' \parallel BC$ (így tehát $BB'C'C$ egy paralelogramma) és az $AB'C'D$ trapéznak van beírt köre. Mivel adott pontból a körhöz húzott érintők azonos hosszúak, ezért $AB' + C'D = AD + B'C' = AD + BC = 65 + 106 = 171$. Mivel $AB + CD = 128 + 5 = 133$, így $BB' = CC' = \frac{171 - 133}{2} = 19$. Vegyük észre, hogy az $AB'C'D$ trapéz szögfelezői a k kör középpontjában találkoznak, ami így éppen X. A $BB'C'C$ paralelogrammát egy eltolásként kezelve az Y pont éppen az X eltoltja lesz. Az eltolás hosszát már kiszámoltuk, hogy 19, így az XY távolság is ugyanennyi, tehát 19.



E+7. A rendőrségen 16 gyanúsított áll sorban, kihallgatásra várva. A háklis rendőr egy lépésben megcserélhet két szomszédos gyanúsítottat egymással. Legalább hány lépésre van szüksége ahhoz, hogy biztosan el tudja érni, hogy egyik gyanúsított se álljon két nála alacsonyabb vagy két nála magasabb ember között?
Minden gyanúsított különböző magasságú.

Megoldás: Figyeljük meg, hogy az a feltétel, hogy egy gyanúsított se álljon két nála alacsonyabb vagy két nála magasabb ember között pontosan azt jelenti, hogy a gyanúsítottak vagy csökkenő vagy növekvő sorban állnak, nevezzük ezeket szélsőséges eseteknek. Minden lehetséges sorra megszámolhatjuk, hogy hány emberpárra teljesül, hogy a jobb oldali ember magasabb, mint a bal oldali, nevezzük ezt a számot inverziószámnak. Figyeljük meg továbbá, hogy amikor végrehajtunk egy cserét akkor ez a szám 1-gyel nő vagy csökken annak megfelelően, hogy egy ilyen párt hozunk létre vagy szüntetünk meg. Vegyük észre még, hogy amennyiben az állás nem szélsőséges, úgy tudunk olyat lépni, hogy csökkentsük és olyat is, hogy növeljük az inverziószámot. A teljesen növekvő sor esetében az inverziószám $\binom{16}{2} = 120$, míg a teljesen csökkenő esetben 0. Tehát bármely esetből el tudunk jutni legfeljebb 60 lépésből egy olyan esetbe, amikor az inverziószám 0 vagy 120, ami azt jelenti, hogy az összes pár vagy az egyik irányba áll vagy a másikba, tehát ezek a szélsőséges esetek.

Megfordítva, a 0 inverziószámú helyzetből indulva, 60 lépésen át egyesével növelve az inverziószámot tudunk olyan állásba jutni, ahol pont 60 az inverziószám. Egy ilyen állásból indulva szükséges a 60 csere, így a megoldás 60.

E+8. Egy táblán szerepel két szám. Dani egy lépésben mindig letörli az egyik számot, és felírja helyette a két szám összegét. Ezt addig csinálja, amíg a táblán először megjelenik a 42. Hányféleképpen juthat el ehhez a számhoz, ha kezdetben két darab 1-es szerepel a táblán?
Két eljutás megegyezik, ha Dani a két eljutás minden lépésében megegyező értékű számot töröl le.

Megoldás: Gondolkodjunk visszafelé. Amikor először felkerül a 42 a táblára, legyen a másik szám x. Tehát az utolsó lépés előtt x és $42 - x$ szerepelt a táblán. Mivel Dani lépései során csak pozitív számok szerepelhetnek a táblán, ezért $42 - x > 0$, tehát $42 > x$.

Továbbá vegyük észre, hogy a táblára írt két szám legnagyobb közös osztója nem változik az egyes lépések során. Emiatt $1 = (1, 1) = \ldots = (x, 42)$, ahol (a, b) az a és b legnagyobb közös osztóját jelöli. Megkaptuk tehát, hogy x és 42 relatív prímek (ahol azt mondjuk, hogy két szám relatív prím, ha a legnagyobb közös osztójuk 1). Így könnyű végignézni, hogy az x szám csak az alábbi 12 szám lehet: $1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31,\ 37, 41$. Könnyen látható, hogy bármely ilyen értékre pontosan 1 lehetséges eljutás van, hiszen visszafelé gondolkodva egy állásban mindig a nagyobb szám kellett, hogy legyen növelve az előző állásból, és mivel minden lépésben relatív prímek a számok, így mindig eljutunk visszafelé lépkedve az $(1, 1)$-be. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a válasz 12.

E+9. Anett és Andris egy olyan országban laknak, ahol az autók rendszáma 3 számjegyből áll (000-tól 999-ig) és minden autónak különböző rendszáma van. Az autópályán mennek, és a következő játékot játsszák: Andris gondol egy számra 000 és 999 között, és amikor egy autó megelőzi őket, akkor ennek a kocsinak a rendszámának minden helyiértékéről elárulja, hogy a következő három állítás közül melyik teljesül rá:

- A rendszám adott helyiértéken lévő számjegye megegyezik a gondolt szám adott helyiértékén lévő számjegyével.
- A rendszám adott helyiértéken lévő számjegye szerepel a gondolt számban, de csak valamelyik másik helyiértéken.
- A rendszám adott helyiértéken lévő számjegye egyáltalán nem szerepel az Andris által gondolt számban.

Andris ezenkívül azt is megmondta Anettnek, hogy nincs két egyforma számjegy az általa gondolt számban. Legalább hány különböző autónak kell megelőznie őket ahhoz, hogy Anett biztosan ki tudja találni a gondolt számot?

Megoldás:

Legalább 641 autó kell ahhoz, hogy Anett biztosan ki tudja találni.

Amennyiben Andrisék rendszáma 089, és pontosan azon autók mentek el mellettük, melyek rendszámában a 8-as és 9-es számjegyek nem szerepelnek sem a tízes, sem az egyes helyiértéken, akkor még Anett nem tudhatja a rendszámot, hiszen a 098 rendszám esetén minden eddigi kocsira ugyanazt a választ kapta volna. Ilyen rendszámból összesen $10 \cdot 8 \cdot 8 = 640$ darab van, ezért 641 rendszám biztosan szükséges.

Ennyiből viszont ki is lehet találni. Nevezzünk egy számjegyet ismertnek, ha már legalább két különböző helyiértéken szerepelt az elhaladt autók rendszámán, vagy pontosan egy helyiértéken szerepelt, és Andris azt mondta, hogy nem szerepel a gondolt számban, vagy azt, hogy ugyanazon a helyiértéken szerepel.

Amennyiben egy számjegy ismert, akkor Anett vagy ki tudja zárni, hogy az szerepel a gondolt számban, vagy meg tudja mondani, hogy melyik helyiértéken van: amennyiben legalább két helyiértéken szerepelt, és ezek valamelyikén olyan választ kapott, hogy azon a helyen szerepel a számjegy vagy olyat, hogy a számjegy nem szerepel a számban, akkor ez nyilvánvaló. Ha pedig mindkét esetben azt tudta meg, hogy rossz helyiértéken van a számjegy, akkor kizárásos alapon a harmadikon kell, hogy szerepeljen.

Emiatt ha van 9 ismert számjegy, akkor Anett ki tudja találni a gondolt számot: A 9 ismert számjegyről mind ki tudja találni, hogy szerepel-e a számban, és ha igen, akkor hol. Így a gondolt számnak vagy mindhárom helyiértékén adott az érték, vagy egy helyen hiányzik, de ekkor ez csak a megmaradt, tizedik számjegy lehet.

Viszont ha legfeljebb 7 ismert számjegy van, akkor még csak legfeljebb 640 kocsi előzte meg őket: ilyenkor van három számjegy, amelyek nem ismertek, azaz eddig legfeljebb 1 helyiértéken szerepeltek. Így ha megszámoljuk, hogy az adott helyiérteken eddig hány szám fordult elő, akkor ezen három szám összege legfeljebb 24, hiszen mindhárom ismeretlen számjegy két helyiértékről hiányzik. Emiatt a számtani-mértani egyenlőtlenséggel belátható, hogy legfeljebb $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ rendszámot láthattak eddig.

Így már csak azt az esetet kell megvizsgálni, ha 8 ismert számjegy van.

Ilyenkor ha van legalább 2 ismert számjegy, amelyről Anett tudja, hogy benne van a számban, akkor csak akkor nem tudja egyértelműen kitalálni a gondolt számot, ha a két ismeretlen számjegyet még egyáltalán nem látta, viszont ekkor összesen legfeljebb $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ autót láthattak. Emiatt a későbbiekben feltesszük, hogy legfeljebb 1 ismert számjegy van, amely szerepel a gondolt számban.

Ekkor három további esetet nézünk:

1. eset: A két ismeretlen számjegy közül legalább az egyik még nem szerepelt. A korábbi gondolatmenet alapján ekkor összesen legfeljebb 25 lehet a három helyiértéken előforduló számok összege, tehát legfeljebb $9 \cdot 8 \cdot 8 = 576$ rendszámot láthattak. A további két esetben feltesszük, hogy mindkét ismeretlen szám megjelent legalább egy rendszámban.

2. eset: A két ismeretlen számjegy ugyanazon helyiértéken szerepelt. Ilyenkor a maradék két helyiértéken legfeljebb 8-8 számjegy fordulhatott eddig elő, így összesen $10 \cdot 8 \cdot 8 = 640$ különböző rendszámot láthattak.

3. eset: A két ismeretlen számjegy két különböző helyiértéken szerepel. Ekkor Anett ki tudja találni a gondolt számot: mivel 8 ismert számjegy van, az egyikről már tudja Anett, hogy szerepel a számban a pontos helyével együtt. Legalább az egyik ismeretlen számjegyet nem ezen a helyiértéken látták, így ennek a számjegynek is egyértelmű lesz a helye, így végül az utolsó kérdéses helyiértéken csak a másik ismeretlen számjegy lehet.

Minden lehetséges esetben beláttuk, hogy vagy legfeljebb 640 autót láthattak eddig, vagy Anett már ki tudja találni a gondolt számot, így 641 autó mindig elég a kitaláláshoz.

E+10. Benedek egy kétsoros táblázat felső sorába néhány egymást követő 1-nél nagyobb természetes számot írt növekvő sorrendben egymás mellé, majd mindegyik alá a második sorba leírta a legkisebb prímosztóját. Ezután kitörölte az eredeti számokat. Ekkor a táblázatban szereplő számok mindegyikére teljesült, hogy tőle az egyik irányban (balra vagy jobbra) legalább annyi szám volt, mint maga a szám. Legalább hány számot írt be eredetileg Benedek a táblázat felső sorába?

Megoldás:

Először is vegyük észre, hogy az alsó sorban minden második helyen 2 áll, továbbá ha szerepel egy $q > 2$ prím, akkor a legközelebbi előfordulása legalább $2q$ távolságra van tőle, hiszen a q feletti számtól a felső sorban q távolságra lévők biztosan oszthatók 2-vel, a többi szám pedig nem osztható q-val.

Nézzük meg, milyen prímeket írhatott Benedek a táblázat második sorába. Jelölje p a legnagyobb prímet, amit beírt. Tudjuk, hogy p-től jobbra vagy balra szerepel legalább p db szám, feltehető, hogy tőle jobbra. Tekintsük a p-től jobbra lévő p darab számot. Ezek mind csak p-nél kisebb prímek lehetnek. A $p \leq 5$ esetben nem megoldható a feladat, mert akkor tőle jobbra kettő és négy távolságra is csak 3 állhatna, ami nem lehet.

Ha $p = 7$, akkor a következő 7 szám között a fenti észrevétel miatt legfeljebb 1 db 5-ös, 2 db 3-as és 4 db 2-es lehet, de 2 db 3-as csak akkor lehetne, ha a hét darab szám közül a két szélső 3-as, de ekkor a 7 mellett 3 állna, ami nem lehet, hiszen két egymást követő szám közül az egyik biztosan osztható 2-vel. Ez viszont csak összesen 6 szám, így muszáj egy 7-nél nagyobb prímet is használnunk.

Ha $p = 11$, akkor a fenti esethez hasonlóan meghatározhatjuk, hogy a következő 11 számban a prímek legfeljebb hányszor fordulhatnak elő:

- 7-esből legfeljebb 1 db,
- 5-ösből legfeljebb 1 db,
- 3-asból legfeljebb 2 db,
- 2-esből legfeljebb 6 db.

Ez csak 10 szám, muszáj 11-nél nagyobb prímet is használnunk.

Ha $p = 13$, akkor a következő 13 számban a prímek előforduálsai legfeljebb:

- 11-esből legfeljebb 1 db,
- 7-esből legfeljebb 1 db,
- 5-ösből legfeljebb 2 db,
- 3-asból legfeljebb 2 db (mivel ha 3 db lenne, akkor lenne egy 3-as, ami szomszédos a 13-assal, ami nem lehet),
- 2-esből legfeljebb 7 db.

Ekkor összesen épp 13-szor fordulnak elő ezek a prímek. A 2-eseket előre tudjuk, hogy hová kell beírni, így a következőt kapjuk:
13 2 _ 2 _ 2 _ 2 _ 2 _ 2 _ 2
Vegyük észre, hogy a 2 db 5-öst csak úgy tudjuk lehelyezni, hogy a még szabad helyek közül a két legtávolabbira tesszük őket, ezután pedig a két 3-as lerakására is csak egy lehetőségünk van, így az alábbi állást kapjuk:
13 2 5 2 3 2 _ 2 _ 2 3 2 5 2
Ha most a 11 a két szabad hely közül a bal oldalira kerülne, akkor még legalább 4 új számot kellene valamelyik szélére írnunk, ezzel összesen legalább 18 számra lenne szükség. Ha viszont a jobb oldalira tesszük, akkor elég 3 új számot tenni a 13 bal oldalára, melyek csak a $2, 3, 2$ lehetnek. Ezzel meg is kapunk egy konstrukciót 17 prím elhelyezésére, ami a következő:
2 3 2 13 2 5 2 3 2 7 2 11 2 3 2 5 2
Ez 17 prímet használ, ami optimális, hiszen láthattuk, hogy $p = 13$ esetén ennél jobb nem lehet, ha pedig $p > 13$, akkor p legalább 17, tehát legalább 18 prímre lenne szükség.

A fentebb kapott sorozathoz, mint alsó sorhoz létezik is egymást követő pozitív egészek sorozata felső sornak: keressük azt az x számot, mely az őt követő $x + 1,\ x + 2, \ldots,\ x + 16$ számokkal olyan sorozatot alkot, melyre a legkisebb prímosztóik a fenti 17 számból álló sorozatot alkotják. Ehhez elég az, ha az adott prímek osztják a megfelelő felső sorbeli számokat, hiszen ezeknek a környező számokra vonatkozó feltételek miatt kisebb prímosztójuk nem lehet.

Továbbá ha egy q prím osztja $x + i$-t, akkor szintén osztani fogja $x + i + q$-t, $x + i + 2q$-t, stb. Emiatt elég egy olyan x-et találni, amelyre az alábbi oszthatóságok teljesülnek:

- $2 \mid x$,
- $3 \mid x + 1$,
- $13 \mid x + 3$,
- $5 \mid x + 5$,
- $7 \mid x + 9$,
- $11 \mid x + 11$.

A kínai maradéktétel szerint ha egy x számnak egymással páronként relatív prím modulusokkal teszünk feltételeket a maradékára, akkor ennek mindig létezik megoldása, emiatt a mi esetünkben is létezik megfelelő x. Egy konkrét ilyen szám például az $x = 27830$.

E+11. Vegyük a síkbeli koordináta-rendszer azon pontjait, melyeknek mindkét koordinátája 46-nál kisebb pozitív egész szám. Nevezzünk egy rácsnégyzetet szépnek, ha a csúcsai ezek közül a pontok közül kerülnek ki, az oldalai pedig párhuzamosak valamelyik koordinátatengellyel. Hány olyan rácspont van, melyre azon szép rácsnégyzetek száma, melyeknek nem csúcsa ez a rácspont, osztható 13-mal?

Megoldás: Vegyük észre, hogy egy szép rácsnégyzetet egyértelműen meghatároz két szemközti csúcsa. Továbbá ha a feladatban szereplő 45×45-ös pontrácsot eltoljuk úgy, hogy a $(23, 23)$ pont képe a $(0, 0)$ legyen, akkor az eredeti pontok közül az összes pontosan annyi szép rácsnégyzetnek lesz csúcsa, mint az eltolt verzióban a képe. A pontok eltolt képei azok az egész koordinátájú rácspontok lesznek, melyek mindkét koordinátájának legfeljebb 22 az abszolút értéke. Jelöljük ezen pontok halmazát $\mathcal{H}$-val.

Jelöljük $JF(P)$-vel, hogy mi az a legnagyobb c pozitív egész szám egy $P = (x, y)$ pont esetén, amire $(x + c, y + c)$ is eleme még $\mathcal{H}$-nak. Hasonlóan $JL(P)$-vel, hogy mi a legnagyobb c pozitív egész, amire még $(x+c, y-c) \in \mathcal{H}$, $BF(P)$-vel a legnagyobb olyan c pozitív egészet, amire $(x-c, y+c) \in \mathcal{H}$ és $BL(P)$-vel a legnagyobb olyan c pozitív egészet, amire $(x-c, y-c) \in \mathcal{H}$. Könnyen látható az előző bekezdésben leírtakból, hogy egy P pont pontosan $JF(P) + JL(P) + BF(P) + BL(P)$ négyzetnek a csúcsa.

Végiggondolható, hogy egy $P = (x, y)$ pont esetén $JF(P) = \min(22-x, 22-y)$, $JL(P) = \min(22-x, y+22)$, $BF(P) = \min(x+22, 22-y)$ és $BL(P) = \min(x+22, y+22)$. Vegyük észre, hogy ha növekvő sorrendbe rakjuk $22-x$-et, $x+22$-t, $22-y$-t és $y+22$-t, akkor a legkisebb és a legnagyobb elem összege 44 lesz, illetve a két középsőé is. Jelölje $\min_k(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számok közül a k. legkisebb elemet. Összeadva a P-re vonatkozó négy függvényt:

$$\min(22-x, 22-y) + \min(22-x, y+22) + \min(x+22, 22-y) + \min(x+22, y+22) =$$

$$= 2 \cdot \min(22-x, x+22, 22-y, y+22) + \min{}_2(22-x, x+22, 22-y, y+22) + \min{}_3(22-x, x+22, 22-y, y+22) =$$

$$= 2 \cdot \min(22-x, x+22, 22-y, y+22) + 44.$$

Tehát egy P pont 44-gyel több négyzeten van rajta, mint amilyen messze P van $\mathcal{H}$ hozzá legközelebb eső szélső pontjához. Ez úgy is kifejezhető, hogy $88 - 2 \cdot ||P||$, ahol $||P|| = \max(|x|, |y|)$. Tehát azok a pontok, amik azonos mennyiségű szép rácsnégyzetnek csúcsai, olyan négyzeteken találhatóak, amikben az átlók metszéspontja a $(0, 0)$ pont.

Az összes szép rácsnégyzet száma $\frac{44 \cdot (44+1) \cdot (2 \cdot 44+1)}{6}$, hiszen $\forall n : 0 < n \leq 44$-re az $n \times n$-es szép rácsnégyzetek száma $(45-n)^2$. Ennek a 13-as maradéka 3. Tehát, ahhoz, hogy azon szép rácsnégyzetek száma, melyeknek nem csúcsa P, osztható legyen 13-mal, az kell, hogy a P csúcsúaké 13-mal osztva 3 maradékot adjon, azaz $||P||$ 13-as maradéka 10 legyen. Ez kizárólag $||P|| = 10$ esetén teljesül (hiszen minden Q pontra $||Q|| < 23$). Minden $0 < k \leq 22, k \in \mathbb{Z}$ esetén azon $P \in \mathcal{H}$ pontok, melyekre $||P|| \leq k$, pontosan egy $(2k+1) \times (2k+1)$-es négyzetben vannak, így amire $||P|| = k$, pontosan $(2k+1)^2 - (2k-1)^2 = 8k$. Tehát a számunkra megfelelő P pontok száma $8 \cdot 10 = 80$.

E+12. Adott a négy különböző A, B, C és D pont a térben. Tudjuk, hogy közülük semelyik három sincs egy egyenesen, továbbá végtelen sok olyan gömb létezik, amely érinti az AB, BC, CD és DA szakaszokat egy belső pontjukban. Jelölje ezen szakaszoknak a hosszait rendre a, b, c és d. Ezekről tudjuk, hogy különböző egyjegyű pozitív egész számok. Hányféle lehet ezek alapján az (a, b, c, d) rendezett négyes?

Megoldás: Tegyük fel, hogy egy térbeli négyszöghöz (azaz 4 térbeli A, B, C és D pont esetén az $ABCDA$ zárt töröttvonalhoz) létezik egy olyan gömb, mely mind a négy oldalát érinti. Legyenek az így keletkező érintési pontok az AB, BC, CD és DA oldalon rendre P_1, P_2, P_3 és P_4.

Vizsgáljuk meg azt a síkot, melyet az AP_4 és AP_1 egyenesek feszítenek ki. Ennek a síknak a gömbbel vett metszete egy kör lesz, hiszen P_4 és P_1 a gömb felszínének két különböző pontja. Ismert, hogy egy külső pontból egy körhöz húzott érintők hossza egyenlő, tehát $|AP_4| = |AP_1|$. Hasonlóan $|BP_1| = |BP_2|$, $|CP_2| = |CP_3|$ és $|DP_3| = |DP_4|$. Tehát $a + c = |AP_1| + |BP_1| + |CP_3| + |DP_3| = |AP_4| + |BP_2| + |CP_2| + |DP_4| = b + d$.

Az előbbi állítás átfogalmazva: ahhoz, hogy egy térbeli négyszöghöz létezzen legalább egy olyan gömb, mely mind a négy oldalát érinti, $a+c=b+d$-nek fenn kell állnia. Viszont ha a négy pont egy síkra esik, akkor ez a feltétel ekvivalens azzal, hogy a négyszög érintőnégyszög és egy síkbeli érintőnégyszöghöz végtelen sok olyan térbeli gömb létezik, melynek a négyszög síkjával vett metszete éppen a négyszög beírt köre. Tehát ahhoz, hogy valamilyen oldalhosszokhoz létezni tudjon egy olyan térbeli négyszög, melynek azok az oldalhosszai és van minden oldalát érintő gömb, szükséges az, hogy létezzen egy olyan síkbeli érintőnégyszög, melynek azok az oldalhosszai. Tehát csak azt kell átszámolnunk, hogy hány olyan (a,b,c,d) különböző egyjegyű pozitív egész számokból álló rendezett számnégyes létezik, melyre $a+c=b+d$. (Ezekre biztosan teljesül a négyszög-egyenlőtlenség is, hiszen $d=a-b+c<a+b+c$.)

Látható, hogy a és c, illetve b és d szimmetrikusan viselkednek, tehát feltehető, hogy $a>c$ és $b>d$, csak a végén összeszámolt megoldásokat meg kell szorozni 4-gyel. Jelöljük innentől $(a+c)$-t S-sel.

Készítsünk egy táblázatot arról, hogy a szemközti oldalpárok hosszai mik lehetnek S különböző értékeire, és hogy ez összesen hány lehetőség:

S	>17	17	16	15	14	13	12
(a,c)	$\emptyset$	$(9,8)$	$(9,7)$	$(9,6),(8,7)$	$(9,5),(8,6)$	$(9,4),(8,5),(7,6)$	$(9,3),(8,4),(7,5)$
$\#(a,c)$	0	1	1	2	2	3	3

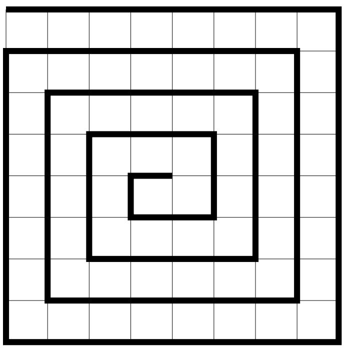
S	11	10	9
(a,c)	$(9,2),(8,3),(7,4),(6,5)$	$(9,1),(8,2),(7,3),(6,4)$	$(8,1),(7,2),(6,3),(5,4)$
$\#(a,c)$	4	4	4

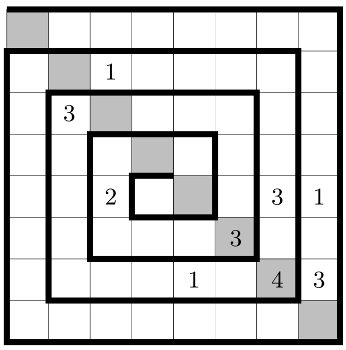
S	8	7	6	5	4	3	<3
(a,c)	$(7,1),(6,2),(5,3)$	$(6,1),(5,2),(4,3)$	$(5,1),(4,2)$	$(4,1),(3,2)$	$(3,1)$	$(2,1)$	$\emptyset$
$\#(a,c)$	3	3	2	2	1	1	0

Miután valamilyen S-re kiválasztottuk, hogy mi legyen az (a,c) oldalpár, akkor (b,d) kiválasztására már eggyel kevesebb lehetőségünk van, mivel a négyszög minden oldala különböző hosszú.

Tehát az (a,c) és (b,d) oldalpárokat összesen $0+0+0+2+2+6+6+12+12+12+6+6+2+2+0+0+0=68$-féleképpen választhatjuk ki. Ezt, a korábban említett felcserélhetőség miatt, 4-gyel szorozva $68\cdot 4=272$-t kapunk megoldásul.

E+13. Csabinak, a kis csigának a háza a bal oldali ábrán látható módon 8×8 négyzetből áll. Csabi most tanulja a számokat, egyelőre még csak 4-ig tud számolni. Csabi bátyja úgy akarja segíteni a tanulását, hogy néhány négyzetbe beír egy számot az $1,2,3,4$ közül. Szeretné, hogy a csigavonal mentén kívülről befelé haladva a nemüres négyzetekben az $1,2,3,4,1,2,3,4,1,2,\ldots,4$ számok szerepeljenek ebben a sorrendben. Továbbá, hogy Csabi fel ne boruljon, arra is szeretne figyelni, hogy minden sorban és oszlopban mind a négy szám pontosan egyszer szerepeljen. Eddig a jobb oldali ábrán látható jegyeket írta be, segíts neki befejezni a kitöltést! Mennyi lesz végül azon szürke mezőkben lévő számok szorzata, melyek nem maradnak üresen?





Megoldás:

Első lépésként a hatodik sort egyértelműen ki lehet tölteni és néhány további mezőnél megállapítható, hogy oda nem kerül szám.

		1					
	3						
	-	2		-	-	3	1
-	-	-	1	4	3	-	2
		-		1	-	4	3

A harmadik és a hatodik sorban szereplő hármasok közé még be kell írni egy 4-1-2-t, amiből az 1-es, 2-es csak egyféleképpen jöhet oda. Az alsó sorban lévő 1-estől balra kell lennie még két számjegynek, így az is beírható.

							-
		1					-
	3				1		-
					2	-	-
	-	2		-	-	3	1
-	-	-	1	4	3	-	2
		-		1	-	4	3
					-	1	4

A bal oldali oszlopba 2-es csak úgy kerülhet, ha a második és az alsó sorban lévő 1-es közé még bekerülnek a 2-3-4-1-2-3-4 számok. Ebből a 4-es nem kerülhet az alsó három sorba.

-							-
3	4	1					-
2	3				1		-
1	-				2	-	-
4	-	2	-	-	-	3	1
-	-	-	1	4	3	-	2
-		-		1	-	4	3
					-	1	4

Innen a sorok a következő sorrendben egyértelműen kitölthetőek: 4., 3., 7., 1., 2., 6. A kérdéses számok szorzata: $4^5 \cdot 3 = 3072$.

-	1	-	2	3	4	-	-
3	4	1	-	-	-	2	-
2	3	4	-	-	1	-	-
1	-	3	4	-	2	-	-
4	-	2	-	-	-	3	1
-	-	-	1	4	3	-	2
-	2	-	-	1	-	4	3
-	-	-	3	2	-	1	4

E+14. Legyen x olyan valós szám, melyre $\sin^{10}(x)+\cos^{10}(x)=\frac{11}{36}$. Mennyi $\sin^{12}(x)+\cos^{12}(x)$? **Válaszként a tört egyszerűsített alakjában a számláló és a nevező összegét adjátok meg!**

Megoldás: Legyen $a=\sin^2(x)$. Ismert, hogy minden x-re $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$ fennáll, tehát ekkor $\cos^2(x)=1-a$. Ekkor a feladatban szereplő azonosságot átírva a binomiális tétel segítségével:

$$\frac{11}{36}=sin^{10}(x)+cos^{10}(x)=a^5+(1-a)^5=a^5-a^5+5a^4-10a^3+10a^2-5a+1=$$

$$=5a^4-10a^3+10a^2-5a+1=5\cdot\left(a^4-2a^3+2a^2-a+\frac{1}{5}\right).$$

5-tel egyszerűsítve a két oldalt:

$$\frac{11}{180}=a^4-2a^3+2a^2-a+\frac{1}{5}=\left(a^2-a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{20}.$$

Mindkét oldalhoz $\frac{1}{20}$-ot adva:

$$\frac{20}{180}=\frac{1}{9}=\left(a^2-a+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Tehát $a^2-a+\frac{1}{2}=\pm\frac{1}{3}$. Ebből viszont az $a^2-a+\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$ kizárható, mivel a bal oldal minden a-ra pozitív. Tehát a $a^2-a+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$ kifejezést továbbalakítva:

$$0=a^2-a+\frac{1}{6}=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{12}.$$

Következésképpen: $a_1=\frac{1}{\sqrt{12}}+\frac{1}{2}$ és $a_2=-\frac{1}{\sqrt{12}}+\frac{1}{2}$.

Mi a $\sin^{12}(x)+\cos^{12}(x)=a^6+(1-a)^6$ értékét szeretnénk kiszámolni. Könnyen látható, hogy $a_1=1-a_2$, tehát a kifejezés értéke mindkét számra ugyanannyi lesz.

Behelyettesítve:

$$a^6 + (1-a)^6 = \left(\frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{2}\right)^6 + \left(-\frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{2}\right)^6.$$

Vegyük észre, hogy a zárójelek binomiális tétellel való felbontásakor azok a tagok, melyekben páratlan kitevőn szerepelne a $\frac{1}{\sqrt{12}}$, kiesnek, mivel a másik zárójel felbontásakor ugyanezek a tagok jelennek meg fordított előjellel. Azon tagok, melyekben a $\frac{1}{\sqrt{12}}$ páros kitevőn szerepel, ugyanolyan előjellel fognak megjelenni a másik zárójel felbontásakor, tehát a zárójeleket felbontva:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{2}\right)^6 + \left(-\frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{2}\right)^6 = 2\cdot\left(\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)^6 + 15\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 15\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6\right) =$$

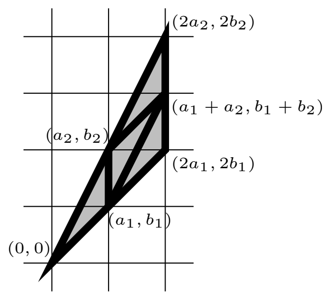
$$= 2\cdot\left(\frac{1}{1728} + \frac{15}{576} + \frac{15}{192} + \frac{1}{64}\right) = 2\cdot\frac{1+45+135+27}{1728} = 2\cdot\frac{208}{1728} = 2\cdot\frac{13}{108} = \frac{13}{54}.$$

Ebben a számláló és a nevező összege $13 + 54 = 67$.

E+15. Csongi a kockás füzetébe szakaszokat rajzolgat úgy, hogy minden szakasznak az egyik végpontja az origó, a másik pedig az első síknegyednek (ahol mindkét koordináta nemnegatív) egy rácspontja. Az első szakasz a $(0,1)$ pontba, a második pedig az $(1,1)$ pontba megy. Innentől kezdve az új szakaszt mindig úgy rajzolja be, hogy az x tengellyel bezárt szöge szigorúan az előző két szakasz x tengellyel bezárt szöge közé essen, valamint ezek közül minimális legyen a hossza. Mennyi a 666. berajzolt szakasz hossznégyzetének a 66-os maradéka?
Minden lépésben pontosan egy szakasz van, ami megfelel a feltételeknek.

Megoldás: Legyenek valahány lépés után a legutóbb behúzott három szakasz $(0,0)$-tól különböző végpontjai (a_0, b_0), (a_1, b_1) és (a_2, b_2). Vizsgáljuk meg az $(0,0), (a_1, b_1), (a_2, b_2)$ háromszöget. Ennek nem lehet rácspont a belsejében, mert akkor az a pont közelebb lenne a $(0,0)$-hoz (a_2, b_2)-nél és a meredeksége szintén szigorúan $(0,0), (a_0, b_0)$ és $(0,0), (a_1, b_1)$ meredeksége közé esne. Illetve ennek a háromszögnek határán sem lehet rácspont (a csúcsain kívül), hiszen ha az a $(0,0), (a_1, b_1)$, vagy a $(0,0), (a_2, b_2)$ oldalakon helyezkedne el, akkor az abba húzott szakaszokat rajzolta volna meg Csongi a háromszög megfelelő oldala helyet, hiszen egy ilyennek azonos a meredeksége, mint annak az oldalnak, amin van, a hossza viszont rövidebb. Ha pedig az $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ oldalon lenne rácspont, akkor annak a meredeksége is a $(0,0), (a_0, b_0)$ és a $(0,0), (a_1, b_1)$ szakaszok közé esne, viszont a $(0,0)$-tól vett távolsága kisebb lenne, mint (a_1, b_1) és (a_2, b_2) pontok közül a távolabbikénak, tehát oda rajzolt volna szakaszt Csongi korábban valamelyik másik helyett. Mivel ennek a háromszögnek se a belsején, se a külsején nincs további rácspont, így a területe a Pick-tétel miatt $\frac{1}{2}$.

A $(0,0), (a_1, b_1)$ és a $(0,0), (a_2, b_2)$ egyenesek által bezárt szögtartomány leparkettázható a $(0,0), (a_1, b_1), (a_2, b_2)$ háromszöggel egybevágó háromszögekkel, amiknek szintén nincs belső és határrácspontja se (hiszen ezek területe is $\frac{1}{2}$), tehát ezen háromszögek csúcsain kívül nem lesz más rácspont a szögtartományban. Könnyen látható, hogy ez azt jelenti, hogy a szögtartománybeli rácsportok mindegyike előáll úgy, mint (a_1, b_1) és (a_2, b_2) egy pozitív egész együtthatós kombinációja. Ebből azonnal következik, hogy a következőnek behúzott szakasz végpontja csak az $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ pont lehet (a_2, b_2) után.



Láthatjuk, hogy a $(0,1)$ és $(1,1)$ pontokból kiindulva a behúzott szakaszok végpontjainak koordinátái Fibonacci-számok lesznek.

i	1	2	3	4	5	6	7
a_i	0	1	1	2	3	5	8
b_i	1	1	2	3	5	8	13

Legyen $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ és $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ha $n \geq 1$. Ekkor $(a_k, b_k) = (F_k, F_{k-1})$. Tehát a k. szakasz hossznégyzete $a_k^2 + b_k^2 = F_k^2 + F_{k-1}^2$. Ismert, hogy minden n-re és $0 < m \leq n$-re $F_n = F_m \cdot F_{n-m+1} + F_{m-1} \cdot F_{n-m}$ (ez $m = 1$ esetén nyilvánvalóan igaz, $m = 2$ esetén az n. Fibonacci-szám definíciója, más m-ekre pedig indukcióval bizonyítható). Ebben a képletben n helyére $2k-1$-et, m helyére pedig k-t írva azt kapjuk, hogy $F_{2k-1} = F_k^2 + F_{k-1}^2$, ez pedig a korábbiak alapján a k. szakasz hossznégyzete.

Tehát $F_{2\cdot 666-1} = F_{1331}$ 66-os maradékát keressük. Egy szám 66-os maradékát a kínai maradéktétel alapján egyértelműen meghatározza a 2-es, a 3-as és a 11-es maradéka.

- A Fibonacci-számok 2-es maradékai: $1, 1, 0, 1, 1, \ldots$, ez egy 3 hosszú ciklus.
- A Fibonacci-számok 3-as maradékai: $1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, \ldots$, ez egy 8 hosszú ciklus.
- A Fibonacci-számok 11-es maradékai: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1, 0, 1, 1 \ldots$, ez egy 10 hosszú ciklus.

Tehát F_{1331} esetén:

- Mivel az 1331 maradéka 3-mal osztva 2, F_{1331} maradéka 2-vel osztva 1.
- Mivel az 1331 maradéka 8-cal osztva 3, F_{1331} maradéka 3-mal osztva 2.
- Mivel az 1331 maradéka 10-zel osztva 1, F_{1331} maradéka 11-gyel osztva 1.

Ezt a hármat összerakva azt kapjuk, hogy F_{1331} maradéka 66-tal osztva 23.

E+16. A Baker Street-i végállomásra menetrend szerint 10 percenként érkezik villamos és egyenletes valószínűséggel késik legalább 0, de legfeljebb t percet, ahol t egy 10-nél kisebb pozitív valós szám. A késések egymástól függetlenek. A villamosmegállóban mindig ki van írva, hogy a legközelebbi villamos, ami még nem érkezett meg, mennyit fog késni (a kiíráson tökéletes pontossággal szerepel a következő villamos késése és ez a járat megérkezéséig nem változik). Áron 12:00 és 13:00 között a villamosok késésétől függetlenül, egyenletes valószínűséggel ér ki a megállóba. Így az érkezésekor a megállóban látható késés várható értéke 4 perc. Mennyi t értéke? **Tudjuk, hogy t egyértelműen írható $a + \sqrt{b}$ alakba, ahol a és b egészek. Válaszként $a + b$ értékét adjátok meg!**

Megoldás: Vegyük észre, hogy nem számít, hogy 12:00 és 12:10 között a villamos menetrend szerinti érkezése melyik időpont lenne pontosan, hiszen egy adott időpontban a kiírt késés várható értéke ugyanaz, mint 10 perc múlva lesz. Tehát az általánosság elvesztése nélkül feltehető, hogy villamos menetrend szerinti érkezése 12:00. Továbbá az is megfigyelhető, hogy mivel az adott időpontokban kiírt várható értékek 10 percenként ismétlődnek, így 12:00 és 12:10 közt egyenletes valószínűséggel kimenve ugyanaz a kiírás várható értéke, mint 12:10 és 12:20 közt kimenve (és ez hasonlóan igaz akármilyen 10 perces intervallumra). Tehát 12:00 és 13:00 között egyenletes valószínűséggel kimenve ugyanaz a kiírás várható értéke, mint 12:00 és 12:10 közt egyenletes valószínűséggel kimenve. Innentől ezzel az utóbbival fogunk számolni.

A villamos késésének várható értéke $\frac{t}{2}$, mivel a villamos késése egyenletesen valószínű 0 és t perc között. Ha Áron több, mint t perccel ment ki 12:00 után, akkor már biztosan elment a menetrend szerint 12:00-kor érkező villamos, tehát a kiírás már a menetrend szerint 12:10-kor érkező villamos késését mutatja, ami az előbbi indoklás miatt $\frac{t}{2}$.

Jelölje x azt, hogy Áron egy adott alkalommal hány perccel ment ki 12:00 után. Ha $x \leq t$, akkor annak a valószínűsége, hogy a menetrend szerint 12:00-kor érkező villamos már elment, amikor Áron kiért, $\frac{x}{t}$, tehát annak, hogy még nem ment el, $\frac{t-x}{t}$. Ha a 12:00-s villamos már elment, akkor a kiírás már a 12:10-es villamos késését írja ki, aminek a várható értéke $\frac{t}{2}$. Ha a 12:00-s villamos még nem ment el ekkor, akkor a kiírás várható értéke egyenletes valószínűséggel van x és t között (hiszen x-nél kisebb már nem lehet), tehát ekkor a várható értéke $\frac{x+t}{2}$. Tehát $x \leq t$ esetén x perccel 12:00 után a kiírás várható értéke:

$$\frac{x}{t} \cdot \frac{t}{2} + \frac{t-x}{t} \cdot \frac{x+t}{2} = \frac{x}{2} + \frac{t^2 - x^2}{2t}.$$

Számoljuk ki, hogy mennyi a várható értéke a kiírt késésnek, ha Áron legfeljebb t perccel 12:00 után megy ki a megállóba. Ezt úgy kaphatjuk meg, hogy az egyes időpontokban kiírt késések várható értékét szorozzuk azzal, hogy mi az adott időpontnak a súlya és ezt integráljuk 0-tól t-ig (olyan, mintha súlyozott átlagot vennénk, csak mivel itt nem véges sok késési lehetőségünk van, így a lehetséges kiírásokat nem összeadjuk súlyozottan, hanem integráljuk). Mivel a villamos egyenletes valószínűséggel késik 0 és t perc között, így minden időpont súlya ugyanannyi lesz, mégpedig $\frac{1}{t}$, hiszen így lesz a súlyok integrálja 0-tól t-ig pont 1 (hasonlóan ahhoz, hogy a súlyozott átlag számolásánál a súlyok összege 1 kell, hogy legyen). Tehát ebben az esetben a kiírás várható értéke:

$$\int_0^t \frac{1}{t}\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{t^2-x^2}{2t}\right)dx=\frac{1}{t}\cdot\int_0^t \frac{x}{2}+\frac{t}{2}-\frac{x^2}{2t}dx=\frac{1}{t}\cdot\left[\frac{x^2}{4}+\frac{tx}{2}-\frac{x^3}{6t}\right]_0^t=\frac{1}{t}\cdot\left(\frac{t^2}{4}+\frac{t^2}{2}-\frac{t^2}{6}\right)=\frac{7t}{12}.$$

Tehát ha Áron legfeljebb t perccel 12:00 után megy ki a megállóba (aminek a valószínűsége $\frac{t}{10}$), akkor a kiírás várható értéke $\frac{7t}{12}$ lesz, amennyiben pedig több, mint t perccel (aminek a valószínűsége $\frac{10-t}{10}$), a kiírás várható értéke $\frac{t}{2}$. Tehát a kiírás várható értéke t paraméterében:

$$\frac{t}{10}\cdot\frac{7t}{12}+\frac{10-t}{10}\cdot\frac{t}{2}=\frac{7t^2}{120}+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{20}=\frac{t^2}{120}+\frac{t}{2}.$$

A feladat szövege alapján az utóbbi kifejezés 4-gyel egyenlő. Tehát az alábbi egyenletet kell megoldanunk:

$$\frac{t^2}{120}+\frac{t}{2}=4$$
$$t^2+60t-480=0$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletébe behelyettesítve a megoldások $t=-30\pm\sqrt{1380}$. Ebből az egyik érték negatív, ami a feladat szempontjából értelmetlen, tehát $t=-30+\sqrt{1380}$. Úgyhogy a feladatban kérdezett összeg $-30+1380=1350$.

1. megjegyzés: Ha egy x szám felírható $a+\sqrt{b}$ alakban, ahol a és b egészek, viszont x nem, akkor ez a felírása egyértelmű, hiszen ha $c+\sqrt{d}$-ként is felírható lenne, akkor $a-c-\sqrt{d}=-\sqrt{b}$ is fennállna, ahol se d, se b nem négyzetszám (mivel akkor x egész lenne). Ezt négyzetre emelve azt kapjuk, hogy $(a-c)^2-b+d=2\cdot(a-c)\cdot\sqrt{d}$, ami ellentmondás, hiszen a bal oldal egész, a jobb viszont nem. Tehát mivel az 1380 nem négyzetszám, a feladat megoldása tényleg nem írható más módon $a+\sqrt{b}$ alakba.

2. megjegyzés: Ha a feladatot általánosabban szeretnénk megoldani, akkor ha a villamos p percenként jár, t perc a maximális késése és k perc a kiírás várható értéke, akkor $t^2+6pt-12pk=0$ fog teljesülni, ez a korábbiakban leírtakhoz hasonlóan indokolható.