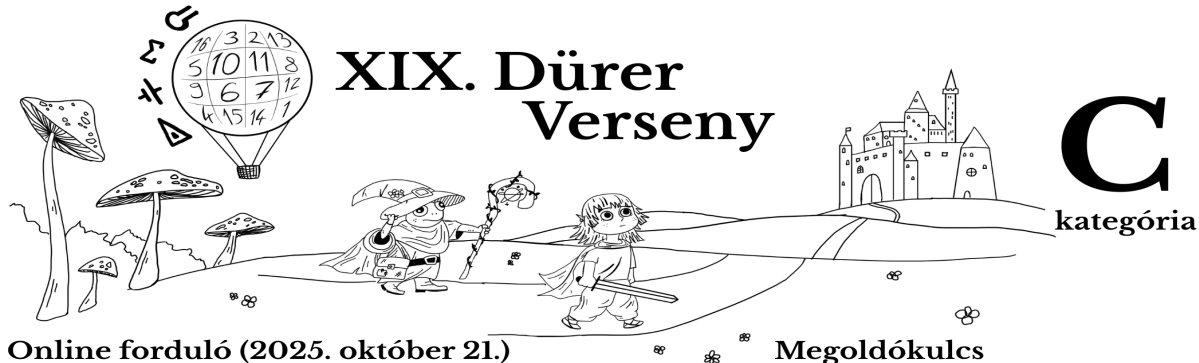




Válaszok

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
133	4	5599	40	8	2200	8488	312	5600

Részletes megoldások

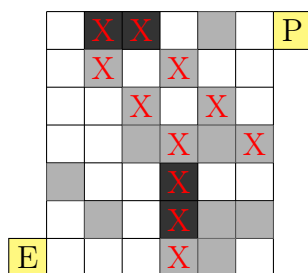
C-1. Ha Ábel elcseréli a $30 = 6 \cdot 5$ kalapját, azért összesen $6 \cdot 2 = 12$ madáretetőt fog kapni. Ezzel összesen $27 + 12 = 39$ madáretetője lesz. Ha ezt a $39 = 13 \cdot 3$ madáretetőt tányérokra cseréli, akkor összesen $13 \cdot 7 = 91$ tányért fog kapni érte.

C-2. Vegyük észre, hogy ha csak összeadást és kivonást használunk, akkor az eredmény mindig páratlan lesz. Hasonlóan, ha csak szorzást és osztást használunk, az eredmény akkor is mindig páratlan lesz (speciálisan 1). Ha használnánk kivonást, akkor nem tudunk 1-nél nagyobb számot kapni. Tehát kell használnunk egy összeadást és még egy szorzást vagy osztást. Így tehát az összeadás helye kétféle lehet, míg a másik művelet is kétféle lehet, tehát összesen $2 \cdot 2 = 4$ lehetséges eset van. Könnyen ellenőrizhető, hogy ezek tényleg mind 2-t adnak eredményül.

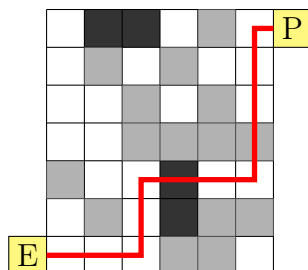
Alternatíván mivel csak 4·4-féle lehetséges beírás van, így akár egyesével felírva mindegyik eredménye ellenőrizhető, hogy megfelelő-e.

C-3. Mivel egy szám minden számjegye legfeljebb 9 és $9 \cdot 9 \cdot 9 < 2025$, emiatt egy legfeljebb 3-jegyű szám számjegyeinek szorzata nem lehet 2025. Mivel $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, emiatt legalább 2 számjegynek 5-ösnek kell lennie. Ha van benne két 5-ös jegy, akkor a többi számjegy szorzatának $2025 : 25 = 81$ -nek kell lennie. Ez csak akkor valósulhat meg egy 4-jegyű szám esetén, ha a megmaradó két jegye két kilences. Tehát a legkisebb ilyen szám két ötösből és két kilencesből áll. Ezen számok közül az 5599 a legkisebb.

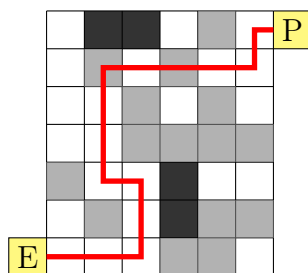
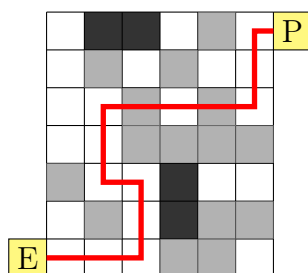
C-4. Vegyük észre, hogy legalább két dombos vagy hegyes mezőn minden esetben át kell haladnia a vándornak, mivel az ábrán x-szel jelölt mezőkből legalább kettőt biztosan érintenie kell:



Minden út legalább 12 mezőből áll. Ha csak jobbra vagy felfelé lépünk, akkor pont 12 mezőből álló utakat kapunk, azonban ezek között csak egy van, amely pontosan két dombos vagy hegyes mezőt érint:



Ennek hossza pedig $10 \cdot 2 + 1 \cdot 13 + 1 \cdot 8 = 41$. (A többi 12 hosszúságú út legalább 3 dombos vagy hegyes mezőt érint, azaz leglább $9 \cdot 2 + 3 \cdot 8 = 42$ nap hosszú.) Ennél csak úgy lehetne rövidebb út, ha két világosszürke mezőt érintenénk, ezeken kívül pedig csak fehéreket. Ilyen, 12 mezőből álló út nem létezik a fentiek alapján, tehát legalább egyszer balra vagy lefelé is kell lépünk, ha ilyen utat szeretnénk találni. És egy balra lépéssel több ilyen út is létezik, két példa:



Ezek hossza $12 \cdot 2 + 2 \cdot 8 = 40$ nap. A fentiekből pedig következik, hogy ezeknél nincs rövidebb út, mivel ahhoz még egyszer valahol balra vagy lefelé kellene lépünk, azaz növelnénk a mezők számát, azonban legalább két világosszürke mezőn így is át kellene haladnunk, tehát csak a mezők számát növelnénk, így pedig hosszabb utat kapnánk.

C-5. Először megadunk egy konstrukciót, ahol 8 számot választottunk ki! 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11 Ellenőrizhetjük, hogy ekkor semelyik két szám nem alkot szép számpárt. Ez a konstrukció lényegében az, hogy az első 12 számból kivettük a hárommal osztható számokat. Nem szerepel a számok között 3-mal osztható szám és $12 = 2^2 \cdot 3$, ezért semelyik két szám szorzata nem osztható 12-vel, mert akkor legalább az egyik szorzótényezőnek oszthatónak kellene lenni 3-mal, de ez nem lehet. (Ellenőrizhető, hogy 1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 11 szintén jó konstrukció.)

Most gondoljuk meg, hogy ennél többet nem választhatunk ki. Indirekten tegyük fel, hogy kiválasztható 9 szám úgy, hogy közülük semelyik kettő nem alkot szép számpárt. Ha egy adott n pozitív egész számot kiválasztottunk ($1 \leq n \leq 12$), akkor azokat a számokat nem választhattuk, amelyekkel n szép számpárt alkot, tehát amikkel a szorzata osztható 12-vel. Ha 9 számot választottunk, akkor a 4, 6, 8, 12 számok közül legalább az egyiket kiválasztottuk, mert ezeken kívül csak 8 darab szám van. Nézzük meg, hogy ezek a számok mely másik számokkal alkotnak szép számpárt:

$$4 : \{3, 6, 9, 12\}$$

$$6 : \{2, 4, 8, 10, 12\}$$

$$8 : \{3, 6, 9, 12\}$$

$$12 : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

Láthatjuk, hogy a 4, 6, 8, 12 számok mindegyike legalább 4 számmal alkot szép számpárt, tehát ha kiválasztjuk az egyiket, akkor legalább másik 4-et nem tudunk kiválasztani. Beláttuk, hogy az egyiket mindenképpen kiválasztottuk, ekkor ezzel kizárunk legalább 4 másik számot, azokat, amelyekkel szép számpárt alkot. Ekkor viszont ha 4 számot nem választhattunk, akkor összesen $12 - 4 = 8$ számot választhattunk maximum. Ez ellentmondásra vezet, hiszen feltettük, hogy kiválasztottunk 9 számot a feltételeknek megfelelően. Ezzel beláttuk, hogy legfeljebb 8 számot tudunk kiválasztani, amire mutattunk konstrukciót is, hogy lehetséges.

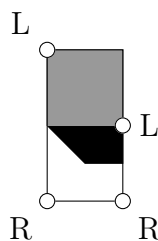
C-6. Tudjuk, hogy két ponttól a tőlük azonos távolságra levő pontok halmaza az őket összekötő szakasz felezőmerőlegese. Két pont felezőmerőlegese két félsíkra osztja a síkot, amelyek közül az egyikben van benne az egyik pont, a másikban a másik. Azon pontok halmaza, amik konkrétan az egyikhez vannak közelebb, az épp az őt tartalmazó félsík.

Mikor érzünk a kert egy pontjában levendulát? Akkor, ha a hozzá legközelebbi levendula távolsága legfeljebb akkora, mint bármelyik rózsáé. Vegyük észre, hogy a kert felső felében mindig levendulát érzünk, hiszen itt bármelyik levendula közelebb van bármelyik rózsánál. Továbbá láthatjuk, hogy a kert felső és alsó fele is egy-egy 40 méter oldalhosszúságú négyzet.

A kert alsó felében a két levendula közül mindig az lesz közelebb, ami a hosszabbik oldal felezőpontjában van. Ez a levendula és az egyes rózsák meghatároznak két szakaszt, vegyük ezeknek a felezőmerőlegesét. Ekkor tehát a kert alsó felében egy pontban akkor érzünk levendulaillatot, ha mindkét felezőmerőlegesre nézve a pont abban a félsíkban helyezkedik el, amelyben az előbb említett levendula.

A két felezőmerőlegest behúзва láthatjuk, hogy a közös részük az ábrán látható fekete trapéz, itt fogunk még levendulát érezni. Vegyük észre, hogy az egyik felezőmerőleges az épp a kert alsó felében levő négyzet egyik átlója, míg a másik a középvonala. Ekkor viszont a trapéz alapjai 40 és 20 méter hosszúak, míg magassága 20 méter.

Ekkor tehát a négyzet területe $40^2 = 1600$, míg a trapéz területe: $\frac{(40+20)}{2} \cdot 20 = 600$. Összesen tehát a kertben 2200 négyzetméteren érzünk levendulaillatot.



C-7. Azon kódok számát, amely tartalmaznak két azonos számjegyet, megkaphatjuk úgy, hogy az összes hat számjegyből álló kódból kivonjuk az azonos számjegyeket nem tartalmazó kódok számát. Összesen 10^6 darab hatjegyű kód van, hiszen mind a hat helyre bármelyik számjegy kerülhet a 10 számjegy közül. Számoljuk össze a csupa különböző számjegyeket tartalmazó kódokat. Itt az első jegy 10-féle lehet, a második 9-féle, hiszen nem lehet olyan, mint az első. A harmadik számjegy nem egyezhet meg az első kettővel, így csak 8-féle lehet stb. Tehát a csupa különböző számjegyekből álló kódok száma: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$. Ezek alapján két azonos számjegyet tartalmazó kódok száma: $10^6 - 151200 = 848800$. Ennek első négy számjegye: 8488.

C-8.

Vegyük észre, hogy ahhoz, hogy egy szám osztható legyen 40-nel, 0-ra kell végződnie, tehát a jobb alsó cellába kizárólag a 0-s jegy kerülhet.

Vegyük észre továbbá azt is, hogy ahhoz, hogy egy szám 25-tel osztható legyen, 5-re, vagy 0-ra kell végződnie, viszont a 0-s számjegy már bekerült a bal alsó cellába, tehát a középen alul lévő cellába csak az 5-ös jegy kerülhet.

Ezután következő lépésnek a bal alsó cellába kerülő jegyet fogjuk meghatározni. Mivel egy szám pontosan akkor osztható 9-cel, ha a számjegyeinek összege is osztható 9-cel, az alsó sorban lévő számok összege kizárólag 9 lehet, azaz a bal alsó cellába 4-es kerül.

Mivel a felső sorban lévő számnak párosnak kell lennie, emiatt a jobb felső cellába kizárólag páros jegy kerülhet. Hasonlóan, mivel a jobb oldali oszlopban lévő szám osztható 40-nel, azaz 20-szal is, az utolsó előtti számjegye páros kell, hogy legyen, azaz a jobb oldalt középen lévő cellába is páros számjegy kerül. Továbbá, mivel egy 4-re végződő legalább kétjegyű szám pontosan akkor lesz osztható 4-gyel, ha az utolsó előtti jegye páros, a bal oldalt középen lévő cellába is páros jegy kell, hogy kerüljön. Viszont mindössze a 2, a 6 és a 8 páros számjegyek maradtak, amik még nincsenek beírva a táblába, tehát a még nem említett három cellába páratlan jegy kell, hogy kerüljön.

Egy 5-re végződő szám pontosan akkor osztható 25-tel, ha 2 vagy 7 az utolsó előtti jegye, viszont mivel páratlannak kell lennie ennek a jegynek, csak 7 kerülhet a középső cellába.

Vizsgáljuk következő lépésként a jobb oldali oszlopot. A felső két számjegyből képzett szám osztható kell, hogy legyen 4-gyel, hiszen a 10-szerese osztható 40-nel. Mivel mindkét jegye páros ennek a számnak, emiatt az utolsó jegye kizárólag 0, 4, vagy 8 lehet, ebből viszont a 0 és a 4 már be lett írva korábban, tehát a jobb oldali középső cellába kizárólag a 8 kerülhet.

A középső sorban lévő szám számjegyeinek összege osztható kell, hogy legyen 3-mal és már csak az első jegye nem ismert. Könnyen végig gondolható, hogy ez kizárólag akkor fog teljesülni, ha ez a jegy a 6.

Ekkor az egyetlen megmaradó páros számjegy, amit még nem írtunk be, a 2, tehát az kerül a jobb felső cellába.

Tehát már csak az 3-at és az 1-et nem írtuk be a táblába. Ha a felső sor az 132 lenne, nem lenne osztható 8-cal, tehát kizárólag az 312 lehet a felül lévő szám. Ezzel beírtuk az összes számjegyet.

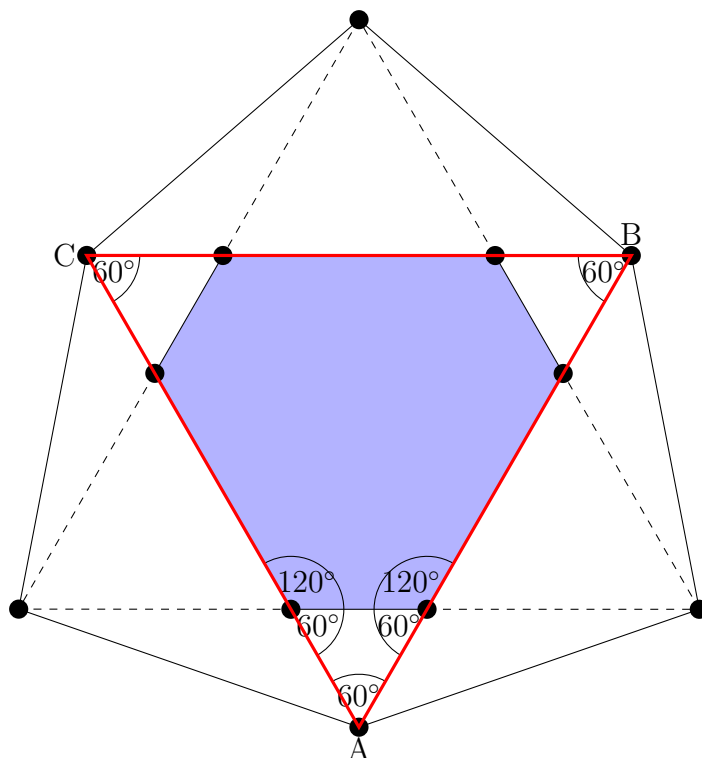
			8
			3
4	5	0	9
4	25	40	

ptl	ptl	ps	8
ps	ptl	ps	3
4	5	0	9
4	25	40	

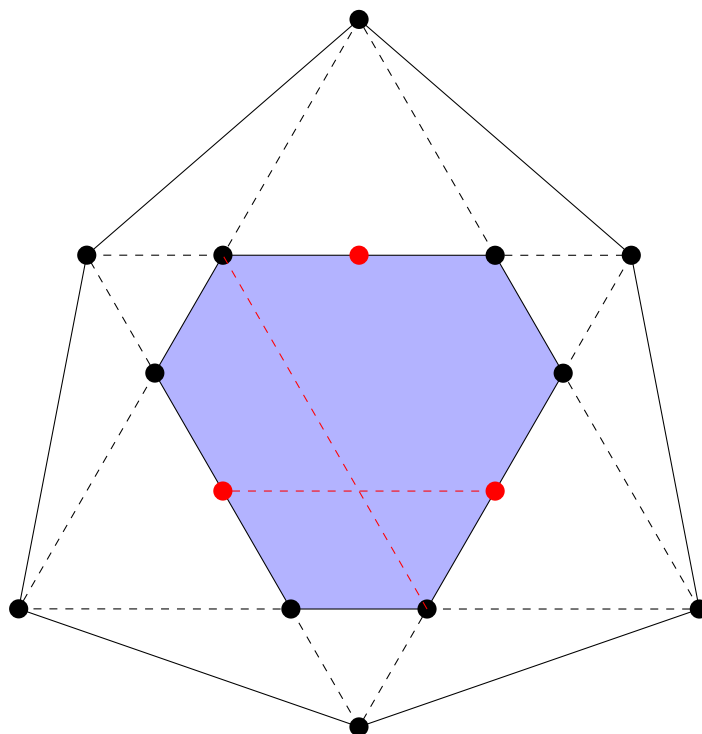
ptl	ptl	ps	8
ps	7	8	3
4	5	0	9
4	25	40	

3	1	2	8
6	7	8	3
4	5	0	9
4	25	40	

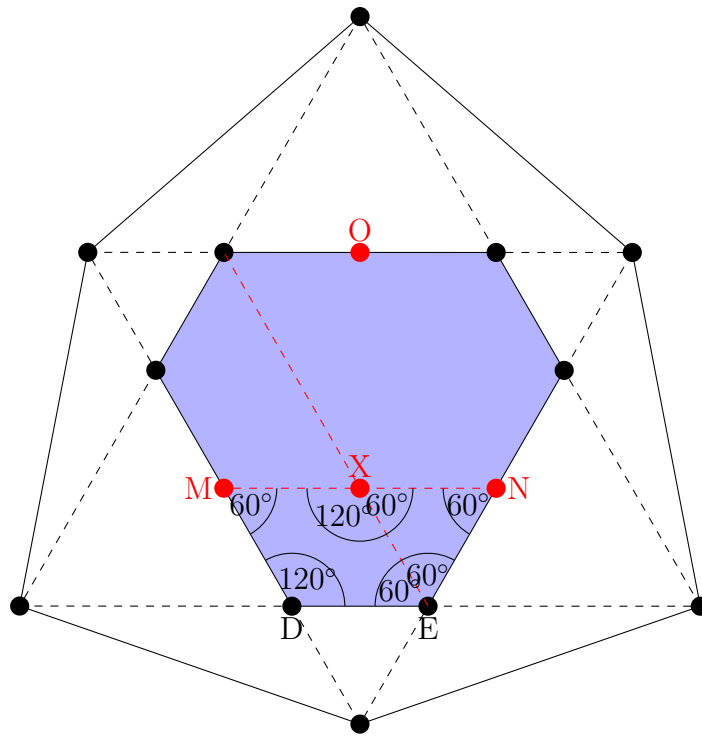
C-9. Egy hatszög belső szögeinek az összege mindig 720° , tehát a kék hatszög minden szöge 120° , tehát minden külső szög 60° , így pedig a kis háromszögek az A , B és C csúcsoknál szabályosak, és ezáltal az ABC háromszög is.



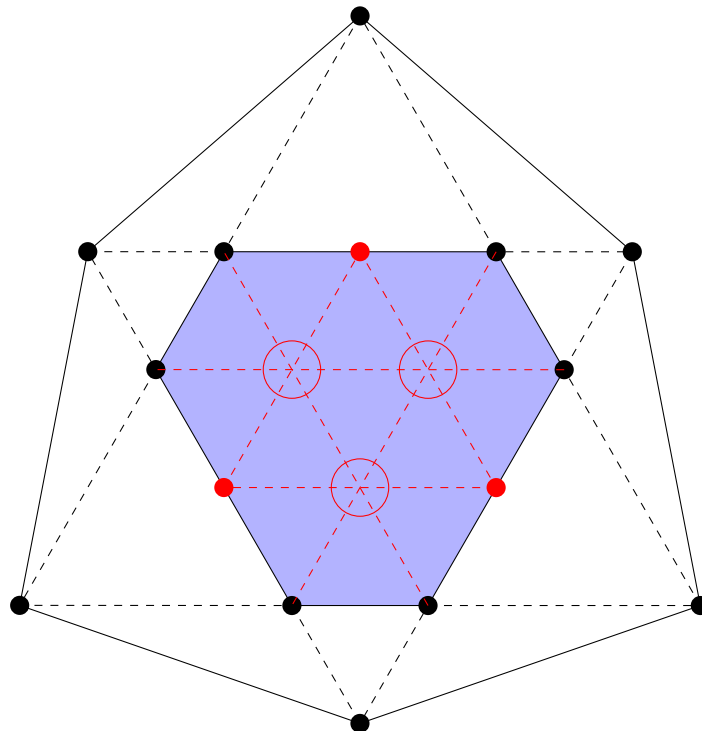
Tekintsük a kék hatszög hosszú oldalain a felezőpontokat, és húzzuk be az alábbi szakaszokat.



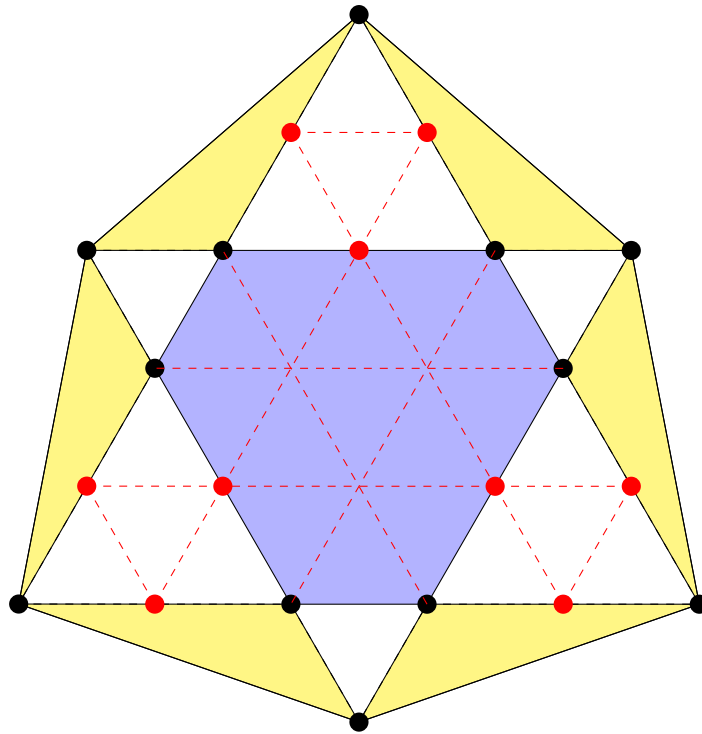
Vegyük észre, hogy a kék hatszögön a piros és fekete pontok az ABC háromszög oldalainak felező és negyedelő pontjai, így minden szakasz párhuzamos lesz az ABC háromszög egyik oldalával. Nézzük meg a szögeket:



Tehát az $MDEX$ négyszög paralelogramma, és azt is tudjuk, hogy $|DE| = |MD|$, mivel M felezőpont, és a hatszög oldalainak aránya $1 : 2 : 1 : 2 : 1 : 2$, tehát $MDEX$ rombusz. Így pedig X felezi az MN szakaszt, mivel XEN háromszög szögei 60 fokosak, tehát $|XN| = |EX| = |MX|$. Ebből következik, hogy ha berajzoljuk az alábbi szakaszokat, akkor a megfelelő szakaszok egy ponton (az MN , NO és OM szakaszok felezőpontjain) mennek át a szimmetria miatt.



Vegyük észre azt is, hogy a keletkező kis háromszögek egybevágó szabályos háromszögek, mivel minden oldaluk párhuzamos az ABC háromszög oldalaival, és pontosan negyedakkorák mint az ABC háromszög. Az alábbi háromszögeket is hasonló módon fel tudjuk bontani ilyen kis háromszögekre:



Tehát ezen az ábrán 28 egybevágó kis háromszög van. A sárga részeket nem tudjuk felbontani ugyanilyen háromszögekre, azonban vegyük észre, hogy ezeknek területe pontosan kétszerese egy kis háromszög területének, hiszen a magasságuk ugyanakkora, az alapjuk pedig kétszer akkora. Így a nagy hatszög területe pontosan $28 + 2 \cdot 6 = 40$ kis háromszög területével egyenlő. A kék hatszög 13 kis háromszögből áll, tehát a nagy hatszög területe: $1820 \cdot \frac{40}{13} = 5600$.

C-10. Éles játékok $n = 6$ és $n = 7$ értékekkel voltak. Stratégia:

$n = 6$: A második játékosnak van nyerő stratégiája. Elkészítjük az alábbi 3 párt a számokból:

- 1 - 5
- 2 - 4
- 3 - 6

Mindig amikor az első játékos kiválaszt egy számot, akkor mi ki tudjuk választani annak a párját a fentiek alapján. Ezzel a stratégiával a második játékos mindig fog tudni szabályosat lépni, viszont maximum 6 lépés után a játéknak vége lesz és így az első játékos veszteni fog.

$n = 7$: Az első játékosnak van nyerő stratégiája, nevezzük ezt prímes stratégiának. Először egy prímmel kezd, aminek nincs a számok között többszöröse, legyen ez most 5. A második játékos csak az 1-et választhatja. Ekkor ha az első játékos a 7-et választja, akkor a második játékos nem tud már lépni.

További esetekben:

$n = 9, n = 8, n = 7$: prímes stratégia 5 és 7 prímekekkel

$n = 6$: lásd fent

$n = 5$: prímes stratégia 3 és 5 prímekekkel

$n = 4$: működik a párosítás stratégia a második játékos számára:

- 1 - 3
- 2 - 4

$n = 3$: prímes stratégia 2 és 3 prímekekkel

$n = 2$: működik a párosítás stratégia a második játékos számára:

- 1 - 2

$n = 1$: nyer az első játékos

Összesítve tehát $n = 2$, $n = 4$ és $n = 6$ esetén nyer a második játékos, különben pedig az első, ha optimálisan játszanak.