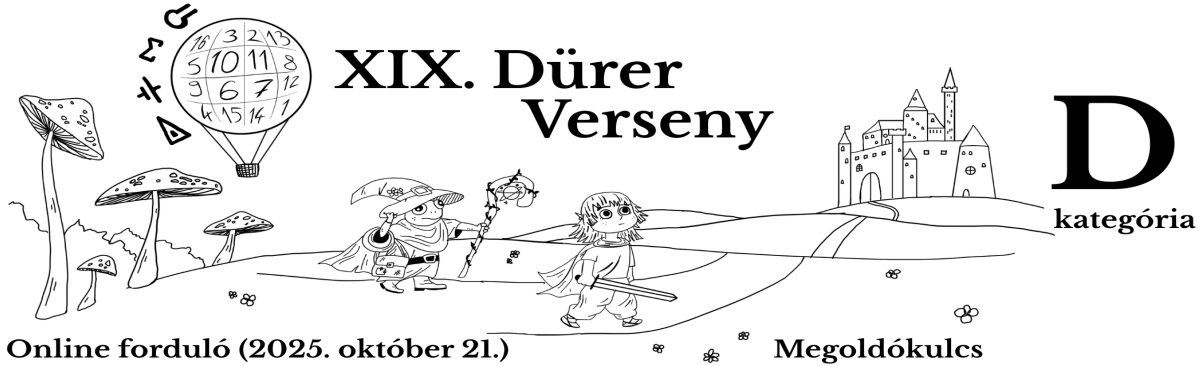




Válaszok

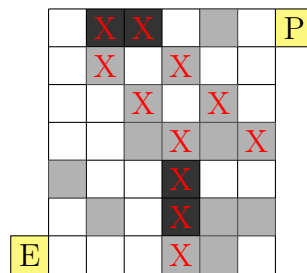
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
133	6	40	2200	360	312	5600	5184	1210

Részletes megoldások

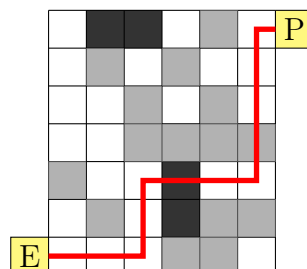
D-1. Ha Ábel elcseréli a $30 = 6 \cdot 5$ kalapját, azért összesen $6 \cdot 2 = 12$ madáretetőt fog kapni. Ezzel összesen $27 + 12 = 39$ madáretetője lesz. Ha ezt a $39 = 13 \cdot 3$ madáretetőt tányérokra cseréli, akkor összesen $13 \cdot 7 = 91$ tányért fog kapni érte.

D-2. Vegyük észre, hogy mivel zárójelek nem használhatók, így a szorzás és osztás használata nem változtat az eredményen. Ebből fakadóan a legnagyobb lehetséges elérhető eredmény az $1+1+1+1 = 4$, ennél van szükségünk 1-gyel kevesebbre. Ha használnánk kivonást, akkor a maximumhoz képest egy $+1$ -et cserélnénk le -1 -re, vagyis 2-vel kisebb eredményt kapunk. Tehát nem használhatunk kivonást, vagyis két összeadást és egy osztást vagy szorzást kell használnunk. A két összeadás helye 3-féle lehet, míg a másik művelet 2-féle, így összesen $2 \cdot 3 = 6$ -féle eset van. Könnyen ellenőrizhető, hogy ezek tényleg mind 3-at adnak eredményül.

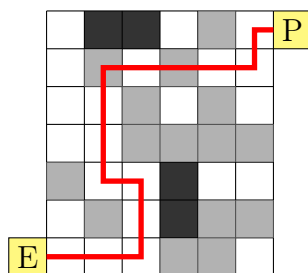
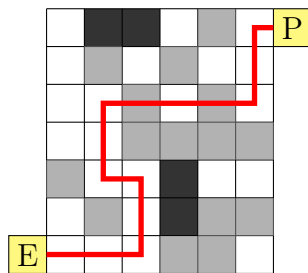
D-3. Vegyük észre, hogy legalább két dombos vagy hegyes mezőn minden esetben át kell haladnia a vándornak, mivel az ábrán x-szel jelölt mezőkből legalább kettőt biztosan érintenie kell:



Minden út legalább 12 mezőből áll. Ha csak jobbra vagy felfelé lépünk, akkor pont 12 mezőből álló utakat kapunk, azonban ezek között csak egy van, amely pontosan két dombos vagy hegyes mezőt érint:



Ennek hossza pedig $10 \cdot 2 + 1 \cdot 13 + 1 \cdot 8 = 41$. (A többi 12 hosszúságú út legalább 3 dombos vagy hegyes mezőt érint, azaz leglább $9 \cdot 2 + 3 \cdot 8 = 42$ nap hosszú.) Ennél csak úgy lehetne rövidebb út, ha két világosszürke mezőt érintenénk, ezeken kívül pedig csak fehéreket. Ilyen, 12 mezőből álló út nem létezik a fentiek alapján, tehát legalább egyszer balra vagy lefelé is kell lépünk, ha ilyen utat szeretnénk találni. És egy balra lépéssel több ilyen út is létezik, két példa:



Ezek hossza $12 \cdot 2 + 2 \cdot 8 = 40$ nap. A fentiekből pedig következik, hogy ezeknél nincs rövidebb út, mivel ahhoz még egyszer valahol balra vagy lefelé kellene lépünk, azaz növelnénk a mezők számát, azonban legalább két világosszürke mezőn így is át kellene haladnunk, tehát csak a mezők számát növelnénk, így pedig hosszabb utat kapnánk.

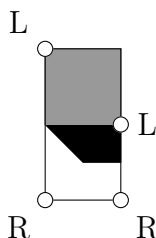
D-4. Tudjuk, hogy két ponttól a tőlük azonos távolságra levő pontok halmaza az őket összekötő szakasz felezőmerőlegese. Két pont felezőmerőlegese két félsíkra osztja a síkot, amelyek közül az egyikben van benne az egyik pont, a másikon a másik. Azon pontok halmaza, amik konkrétan az egyikhez vannak közelebb, az épp az öt tartalmazó félsík.

Mikor érzünk a kert egy pontjában levendulát? Akkor, ha a hozzá legközelebbi levendula távolsága legfeljebb akkora, mint bármelyik rózsáé. Vegyük észre, hogy a kert felső felében mindig levendulát érzünk, hiszen itt bármelyik levendula közelebb van bármelyik rózsánál. Továbbá láthatjuk, hogy a kert felső és alsó fele is egy-egy 40 méter oldalhosszúságú négyzet.

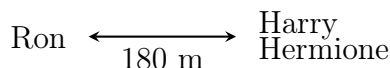
A kert alsó felében a két levendula közül mindig az lesz közelebb, ami a hosszabbik oldal felező-pontjában van. Ez a levendula és az egyes rózsák meghatároznak két szakaszt, vegyük ezeknek a felezőmerőlegesét. Ekkor tehát a kert alsó felében egy pontban akkor érzünk levendulaillatot, ha mindkét felezőmerőlegesre nézve a pont abban a félsíkban helyezkedik el, amelyben az előbb említett levendula.

A két felezőmerőleget behúzva láthatjuk, hogy a közös részük az ábrán látható fekete trapéz, itt fogunk még levendulát érezni. Vegyük észre, hogy az egyik felezőmerőleges az épp a kert alsó felében levő négyzet egyik átlója, míg a másik a középvonala. Ekkor viszont a trapéz alapjai 40 és 20 méter hosszúak, míg magassága 20 méter.

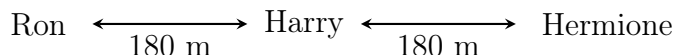
Ekkor tehát a négyzet területe $40^2 = 1600$, míg a trapéz területe: $\frac{(40+20)}{2} \cdot 20 = 600$. Összesen tehát a kertben 2200 négyzetméteren érzünk levendulaillatot.



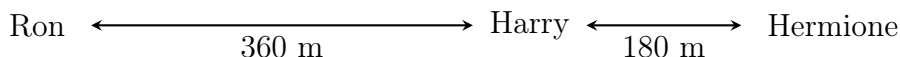
D-5. Gondolkodjunk visszafelé, és tekintsük a végállást:



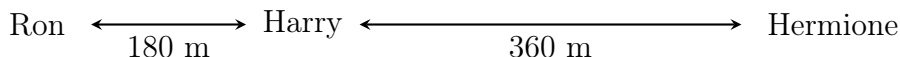
Az utolsó lépésben a Hermione és Ron közötti távolság feleződött, azaz visszafele gondolkodva az ábrán lévő (180 m) távolság megkétszereződött, tehát az ez előtti állás így néz ki:



Ugyanígy gondolkodva az ez előtti lépésben Harry és Ron távolsága feleződött, azaz az ez előtti állás:



Majd hasonlóan a kezdőállapot:



Tehát Harry és Hermione eredetileg 360 méterre voltak egymástól.

D-6.

Vegyük észre, hogy ahhoz, hogy egy szám osztható legyen 40-nel, 0-ra kell végződnie, tehát a jobb alsó cellába kizárólag a 0-s jegy kerülhet.

Vegyük észre továbbá azt is, hogy ahhoz, hogy egy szám 25-tel osztható legyen, 5-re, vagy 0-ra kell végződnie, viszont a 0-s számjegy már bekerült a bal alsó cellába, tehát a középen alul lévő cellába csak az 5-ös jegy kerülhet.

Ezután következő lépésnek a bal alsó cellába kerülő jegyet fogjuk meghatározni. Mivel egy szám pontosan akkor osztható 9-cel, ha a számjegyeinek összege is osztható 9-cel, az alsó sorban lévő számok összege kizárólag 9 lehet, azaz a bal alsó cellába 4-es kerül.

Mivel a felső sorban lévő számnak párosnak kell lennie, emiatt a jobb felső cellába kizárólag páros jegy kerülhet. Hasonlóan, mivel a jobb oldali oszlopban lévő szám osztható 40-nel, azaz 20-szal is, az utolsó előtti számjegye páros kell, hogy legyen, azaz a jobb oldalt középen lévő cellába is páros számjegy kerül. Továbbá, mivel egy 4-re végződő legalább kétjegyű szám pontosan akkor lesz osztható 4-gyel, ha az utolsó előtti jegye páros, a bal oldalt középen lévő cellába is páros jegy kell, hogy kerüljön. Viszont mindössze a 2, a 6 és a 8 páros számjegyek maradtak, amik még nincsenek beírva a táblába, tehát a még nem említett három cellába páratlan jegy kell, hogy kerüljön.

Egy 5-re végződő szám pontosan akkor osztható 25-tel, ha 2 vagy 7 az utolsó előtti jegye, viszont mivel páratlannak kell lennie ennek a jegynek, csak 7 kerülhet a középső cellába.

Vizsgáljuk következő lépésként a jobb oldali oszlopot. A felső két számjegyből képzett szám osztható kell, hogy legyen 4-gyel, hiszen a 10-szerese osztható 40-nel. Mivel mindkét jegye páros ennek a számnak, emiatt az utolsó jegye kizárólag 0, 4, vagy 8 lehet, ebből viszont a 0 és a 4 már be lett írva korábban, tehát a jobb oldali középső cellába kizárólag a 8 kerülhet.

			8
			3
4	5	0	9
4	25	40	

ptl	ptl	ps	8
ps	ptl	ps	3
4	5	0	9
4	25	40	

ptl	ptl	ps	8
ps	7	8	3
4	5	0	9
4	25	40	

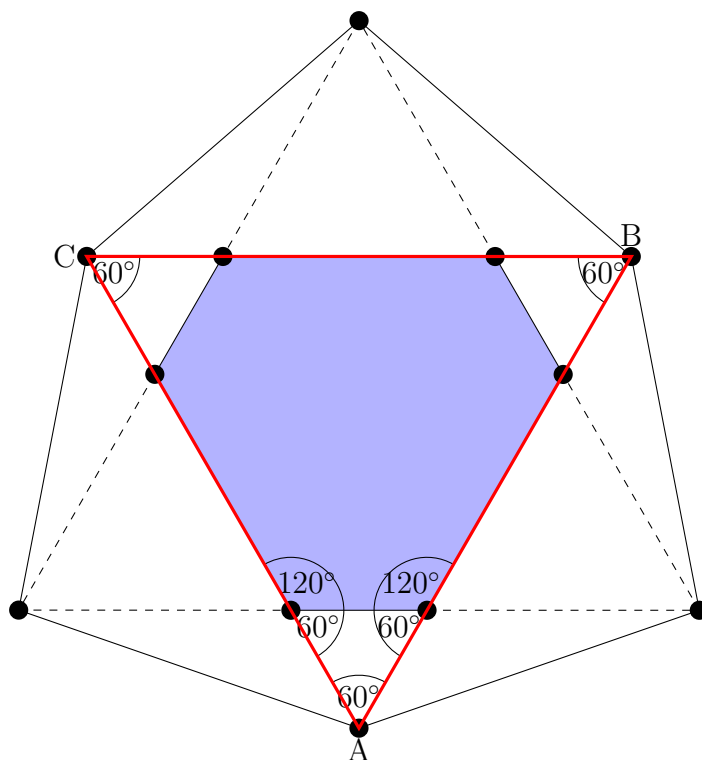
A középső sorban lévő szám számjegyeinek összege osztható kell, hogy legyen 3-mal és már csak az első jegye nem ismert. Könnyen véggigondolható, hogy ez kizárólag akkor fog teljesülni, ha ez a jegy a 6.

Ekkor az egyetlen megmaradó páros számjegy, amit még nem írtunk be, a 2, tehát az kerül a jobb felső cellába.

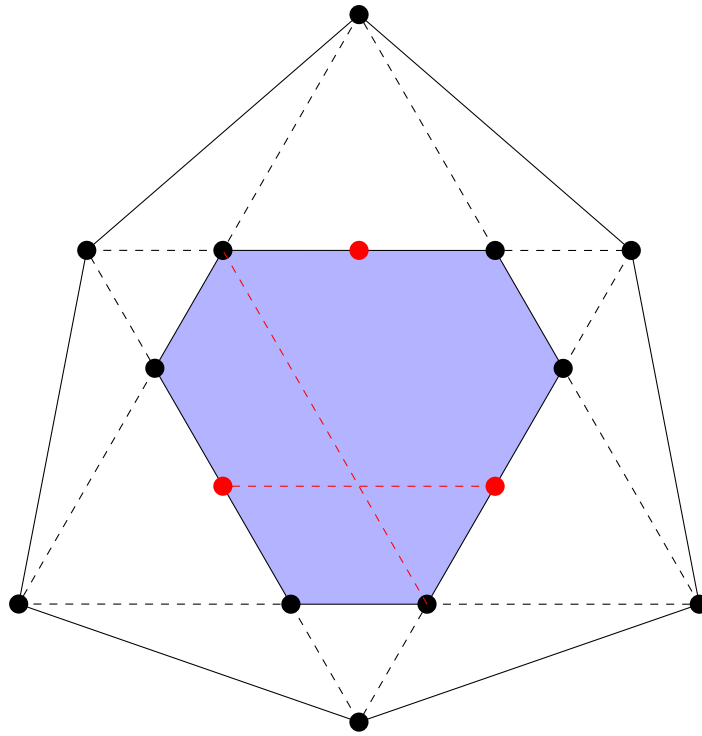
Tehát már csak az 3-at és az 1-et nem írtuk be a táblába. Ha a felső sor az 132 lenne, nem lenne osztható 8-cal, tehát kizárólag az 312 lehet a felül lévő szám. Ezzel beírtuk az összes számjegyet.

3	1	2	8
6	7	8	3
4	5	0	9
4	25	40	

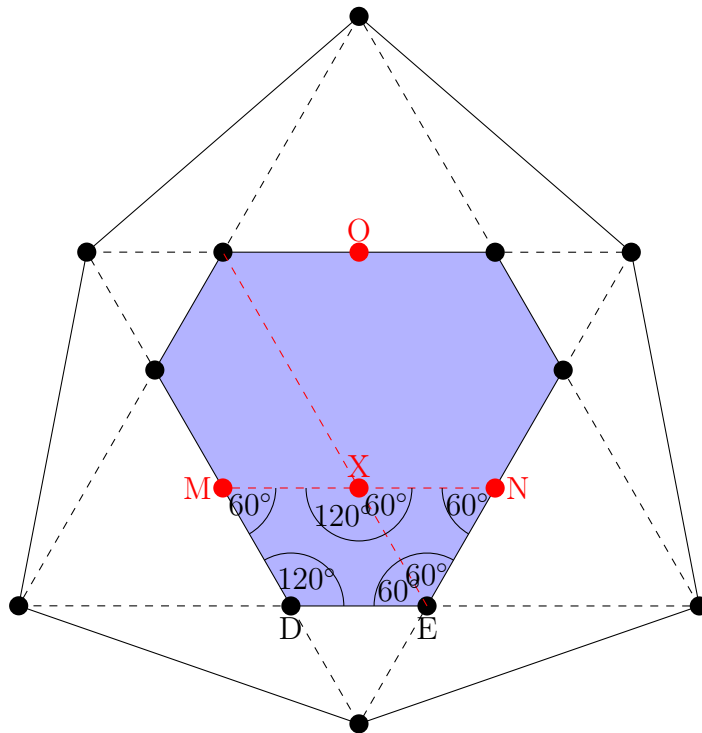
D-7. Egy hatszög belső szögeinek az összege mindig 720° , tehát a kék hatszög minden szöge 120° , tehát minden külső szög 60° , így pedig a kis háromszögek az A , B és C csúcsoknál szabályosak, és ezáltal az ABC háromszög is.



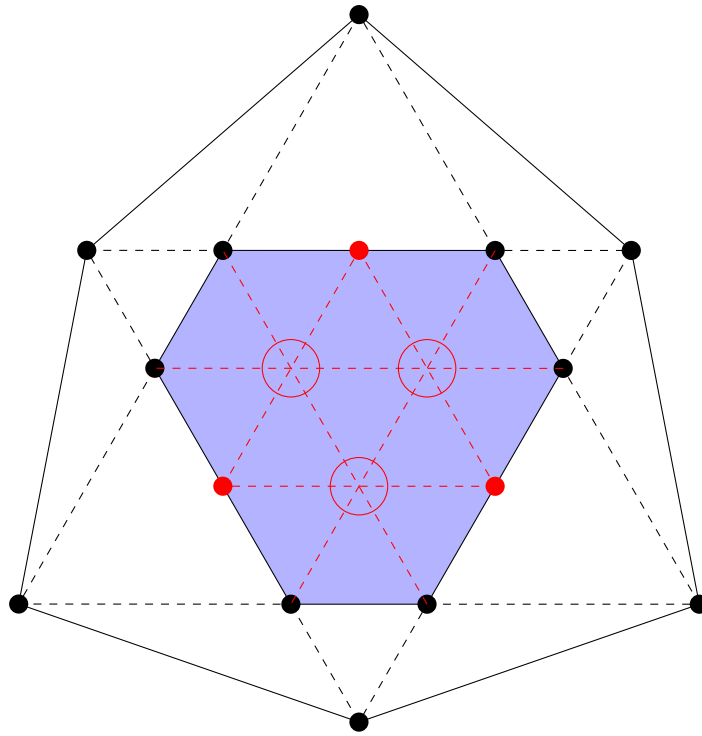
Tekintsük a kék hatszög hosszú oldalain a felezőpontokat, és húzzuk be az alábbi szakaszokat.



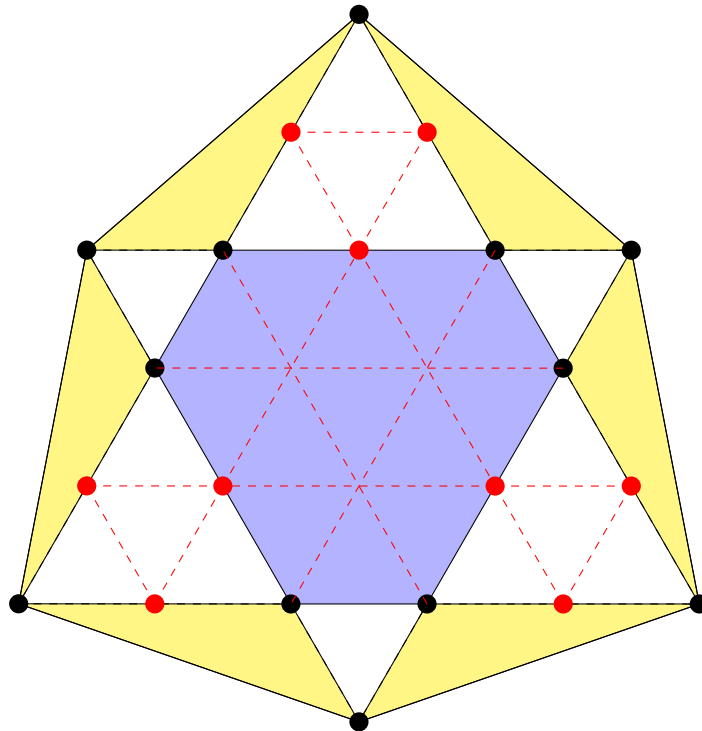
Vegyük észre, hogy a kék hatszögön a piros és fekete pontok az ABC háromszög oldalainak felező és negyedelő pontjai, így minden szakasz párhuzamos lesz az ABC háromszög egyik oldalával. Nézzük meg a szögeket:



Tehát az $MDEX$ négyszög paralelogramma, és azt is tudjuk, hogy $|DE| = |MD|$, mivel M felezőpont, és a hatszög oldalainak aránya $1 : 2 : 1 : 2 : 1 : 2$, tehát $MDEX$ rombusz. Így pedig X felezi az MN szakaszt, mivel XEN háromszög szögei 60 fokosak, tehát $|XN| = |EX| = |MX|$. Ebből következik, hogy ha berajzoljuk az alábbi szakaszokat, akkor a megfelelő szakaszok egy ponton (az MN , NO és OM szakaszok felezőpontjain) mennek át a szimmetria miatt.



Vegyük észre azt is, hogy a keletkező kis háromszögek egybevágó szabályos háromszögek, mivel minden oldaluk párhuzamos az ABC háromszög oldalaival, és pontosan negyedakkorák mint az ABC háromszög. Az alábbi háromszögeket is hasonló módon fel tudjuk bontani ilyen kis háromszögekre:



Tehát ezen az ábrán 28 egybevágó kis háromszög van. A sárga részeket nem tudjuk felbontani ugyanilyen háromszögekre, azonban vegyük észre, hogy ezeknek területe pontosan kétszerese egy kis háromszög területének, hiszen a magasságuk ugyanakkora, az alapjuk pedig kétszer akkora. Így a nagy hatszög területe pontosan $28 + 2 \cdot 6 = 40$ kis háromszög területével egyenlő. A kék hatszög 13 kis háromszögből áll, tehát a nagy hatszög területe: $1820 \cdot \frac{40}{13} = 5600$.

D-8. Vegyük észre, hogy a 3-mal való oszthatóság szempontjából a számoknak csak a 3-as maradéka számít. Továbbá láthatjuk, hogy mindhárom maradékból pontosan három áll rendelkezésre.

Vizsgáljuk meg, hogy mikor lehet három maradék összege 3-mal osztható! Ha három azonos maradékot adunk össze, akkor az összeg osztható lesz 3-mal, míg ha a három különböző maradékot adjuk össze, akkor is. Minden más esetben az egyik maradékból veszünk kettőt és egy másikból egyet. Ez viszont nem megfelelő, hiszen ekkor a $2a + b = 3a + (b - a)$ számnak kellene 3-mal oszthatónak lennie, viszont a $3a$ osztható 3-mal, de a $b - a$ nem (ahogy a és b különböző maradékok voltak). Ekkor tehát minden sorban, oszlopban és a két átlóban is vagy három azonos maradéknak kell állnia, vagy három különbözőnek.

Tegyük fel, hogy van olyan sor, amiben három azonos maradék van. Ekkor felhasználtuk mindhármat ebből a maradékból, tehát kénytelen a többi sorban is három azonos maradéknak lenni. Ekkor viszont automatikusan az átlók megfelelőek lesznek, hiszen bennük így három különböző maradék lesz. Az, hogy melyik maradék tartozik melyik sorhoz, az $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ -féle lehetőség. Mindegyikben egyenként a három szám sorrendje $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ -féle lehet, tehát ebben az esetben összesen $6 \cdot 6^3 = 6^4$ -féle kitöltés van.

Most tegyük fel, hogy van olyan oszlop, amiben három azonos maradék van. Ekkor az előző esethez hasonlóan a sorokban különböző maradékok lesznek, az átlók pedig automatikusan megfelelőek lesznek. Tehát az itteni kitöltések, azok az elforgatottjai az előbbi esetben szereplőknek, tehát itt is 6^4 -féle kitöltés van.

Végül tegyük fel, hogy minden sorban és oszlopban is három különböző maradék szerepel. Ekkor legyen a legelső sorban a maradékok sorrendje a, b, c . Ekkor az a sor, amelyik b -vel kezdődik, az nem végződhet c -vel, tehát kötelező b, c, a -nak lennie. Hasonlóan az a sor, amelyik c -vel kezdődik, annak a középső eleme nem lehet b , tehát kötelező c, a, b -nek lennie. A két felső sornak mindkét sorrendje megfelelő, hiszen az átlók most is automatikusan jók lesznek. Így tehát a, b, c értékeinek megválasztása $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ -féle lehetőség, míg a felső két sor sorrendjének megválasztása 2-féle lehetőség. Végül az adott maradékon belül a három szám elosztására a korábbi esetekhez hasonlóan 6^3 -féle lehetőségünk van. Tehát itt $2 \cdot 6^4$ -féle kitöltés van.

Összesen tehát $6^4 + 6^4 + 2 \cdot 6^4 = 5184$ -féle kitöltés van.

D-9. A bővös számokról tudjuk, hogy 55 a harmadik legnagyobb osztójuk, tehát $n = 55 \cdot k$ alakban keressük őket, ahol k pozitív egész szám. Először szeretnénk megmutatni, hogy k -nak prímszámnak kell lennie. Indirekten tegyük fel, hogy két különböző prím, p és q is osztja k -t. Ekkor n -nek osztója lesz 55, $55 \cdot p$, $55 \cdot q$ és $55 \cdot p \cdot q$ is, tehát 55 nem lehet a harmadik legnagyobb osztó. Ez pedig ellentmondás, tehát $n = 55 \cdot p^m$ alakú.

Most p kitevőjét vizsgáljuk. Ha $m \geq 3$ lenne, akkor hasonlóan 55, $55 \cdot p$, $55 \cdot p^2$ és $55 \cdot p^3$ is osztaná n -t, tehát $m \leq 2$. Ezzel két esetet kapunk:

1. eset: $m = 1$. Tehát $n = 55 \cdot p$ alakú számokat keresünk, amelyek harmadik legnagyobb osztója az 55, azaz n osztói növekvő sorrendben: $1, \dots, 55, n', 55 \cdot p = n$. Ez alapján tudjuk, hogy p osztja n' -t, mivel $n' \neq 55$ és $n' > 55$, így $n' = 5 \cdot p$ vagy $n' = 11 \cdot p$. Ha $n' = 5 \cdot p$ lenne, akkor $11 \cdot p$ is osztaná n -t, és nagyobb lenne 55-nél, tehát 55 nem lenne a harmadik legnagyobb osztó, így $n' = 11 \cdot p$. Vegyük észre, hogy $p = 11$ -re bővös számot kapunk, mivel $55 \cdot 11 = 605$ osztói: $1, 5, 11, 55, 121, 605$. Ha $p \neq 11$, akkor pedig az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk, mivel $5 \cdot p$ is osztója n -nek:

$$5 \cdot p < 55 < 11 \cdot p$$

Tehát $5 < p < 11$, azaz $p = 7$, ez pedig szintén bővös szám, hiszen $55 \cdot 7 = 385$ osztói: $1, 5, 7, 11, 35, 55, 77, 385$.

2. eset: $m = 2$. Most $n = 55 \cdot p^2$ alakban keresünk bővös számokat, melyek osztói sorrendben: $1, \dots, 55, 55 \cdot p, 55 \cdot p^2 = n$. Tudjuk, hogy $11 \cdot p^2$ osztja n -et, tehát $11 \cdot p^2 < 55$ vagy $11 \cdot p^2 = 55$ vagy $11 \cdot p^2 = 55 \cdot p$ vagy $11 \cdot p^2 = 55 \cdot p^2$.

Ha $11 \cdot p^2 < 55$, akkor $p^2 < 5$, azaz $p = 2$, ez pedig tényleg bővös számot eredményez, mivel $55 \cdot 2^2 = 220$ osztói: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, 220. A $11 \cdot p^2 = 55$ nem lehetséges, mivel $p^2 = 5$ egyenletnek nincs egész megoldása. A $11 \cdot p^2 = 55 \cdot p$ esetben $p = 5$, ami viszont nem lesz jó megoldás, mert $55 \cdot 5^2 = 1375$ osztói: 1, 5, 11, 25, 55, 125, 275, 1375. Végül $11 \cdot p^2 = 55 \cdot p^2$ pedig nem lehetséges, mert leosztva a nemnulla p^2 -tel $11 = 55$ -öt kapnánk.

Tehát három bővös szám létezik: 605, 385 és 220, melyek összege 1210.

D-10. Éles játékok $n = 10$ és $n = 11$ értékekkel voltak. Stratégia:

$n = 10$: A második játékosnak van nyerő stratégiája. Elkészítjük az alábbi 5 párt a számokból:

1 - 7

2 - 6

3 - 9

4 - 8

5 - 10

Mindig amikor az első játékos kiválaszt egy számot, akkor mi ki tudjuk választani annak a párját a fentiek alapján. Ezzel a stratégiával a második játékos mindig fog tudni szabályosat lépni, viszont maximum 10 lépés után a játéknak vége lesz és így az első játékos veszteni fog.

$n = 11$: Az első játékosnak van nyerő stratégiája, nevezzük ezt prímes stratégiának. Először egy prímmel kezd, aminek nincs a számok között többszöröse, legyen ez most 11. A második játékos csak az 1-et választhatja. Ekkor ha az első játékos a 7-et választja, akkor a második játékos nem tud már lépni.

További esetekben:

$n = 15, n = 14, n = 13$: prímes stratégia 11 és 13 prímet választja az első játékos

$n = 12, n = 11$: prímes stratégia 7 és 11 prímeke

$n = 10$: lásd fentebb

$n = 9, n = 8, n = 7$: prímes stratégia 5 és 7 prímekekkel

$n = 6$: működik a párosítós stratégia a második játékos számára:

1 - 5

2 - 4

3 - 6

$n = 5$: prímes stratégia 3 és 5 prímekekkel

$n = 4$: működik a párosítós stratégia a második játékos számára:

1 - 3

2 - 4

$n = 3$: prímes stratégia 2 és 3 prímekekkel

$n = 2$: működik a párosítós stratégia a második játékos számára:

1 - 2

$n = 1$: nyer az első játékos

Összesítve tehát $n = 2, n = 4, n = 6$ és $n = 10$ esetén nyer a második játékos, különben pedig az első, ha optimálisan játszanak.