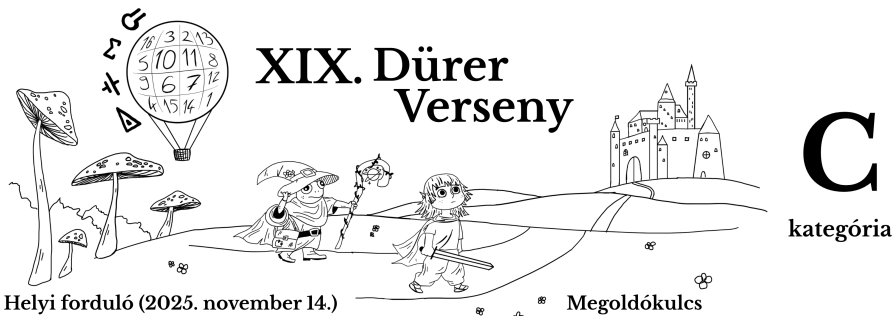
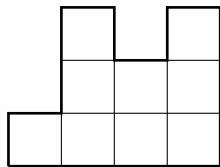
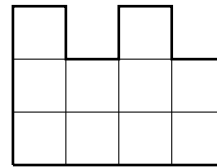




C1. Egy 4×4 -es táblán egységkockák vannak egymásra helyezve. Ha szemből, illetve jobb oldalról nézzük az építményt, akkor az alábbi alakzatokat látjuk:



szemből nézve



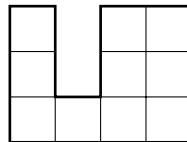
jobbról nézve

Mi lehet az építményben lévő kockák számának lehető legkisebb és legnagyobb értéke? A Válaszlapban a 4×4 -es táblázatokba írjátok be a legkevesebb és a legtöbb kockából álló építményeket, megadva, hogy az adott mezőn hány egységkocka van egymáson!

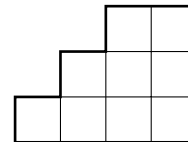
Az is megengedett, hogy egy mezőn nincs kocka.

Alább látható egy példaépítmény, valamint a szemből és jobb oldalról való nézete.

2	1	3	1
3	1	2	3
1	0	2	0
1	1	1	1



szemből



jobbról

Hegedűs Dani feladata

Megoldás: Írjunk a szemből nézet ismeretében számokat minden oszlop alá, ami megmutatja az adott oszlop legmagasabb tornyának magasságát. Hasonlóan írjuk minden sor mellé a "jobbról nézve" ábra alapján az adott sor legmagasabb építményének magasságát. Ekkor a táblázat a következőképpen néz ki:

				2
				3
				2
				3
1	3	2	3	

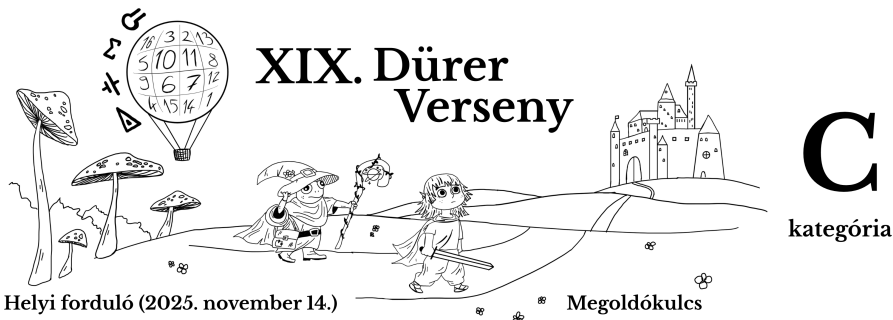
Sorszámozzuk a sorokat fentről lefelé, az oszlopokat pedig balról jobbra. Ekkor az 1. oszlophoz rendelt szám az 1; a 2. és 4. sorhoz rendelt szám egyaránt a 3 és így tovább.

Vegyük észre, hogy minden mezőbe legfeljebb akkora számot írhatunk, mint a sorához és oszlopához rendelt számok közül a kisebbik (nemnagyobbik).

A lehető legtöbb kockából álló építmény

Ha a lehető legtöbb kockát szeretnénk lerakni, akkor minden mezőbe írjuk be az oda kerülő lehető legnagyobb számot, azaz minden mezőbe írjuk a sorához és oszlopához rendelt számok közül a kisebbet (nemnagyobbat).

Ezzel pedig mezőnként beírva a lehető legnagyobb számot, egyértelmű kitöltést kapunk a lehető legtöbb kockára (ami tényleg megfelelő):



1	2	2	2	2
1	3	2	3	3
1	2	2	2	2
1	3	2	3	3
1	3	2	3	

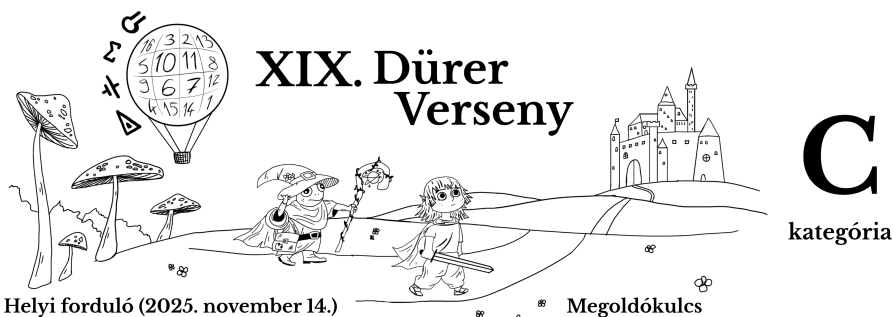
Tehát az építményben a kockák számának legnagyobb értéke 32.

A lehető legkevesebb kockából álló építmény

Vizsgáljuk meg a sorokba írt számokat! Ahhoz, hogy teljesüljön a látott szám az adott sorban, ahhoz arra van szükség, hogy a legmagasabb torony az adott sorban pont ilyen magas legyen. Ez tehát azt jelenti, hogy a legfelső sorban kell lennie egy 2 magasságúnak, a második sorban kell lennie egy 3 magasságúnak, stb. Mivel a sorok mezői közt nincs átfedés, így ezzel megkaptuk, hogy az építmény legalább $2 + 3 + 2 + 3 = 10$ kockából áll. Viszont vegyük észre, hogy az első oszlopban a legmagasabb torony pontosan 1 magasságú, így itt kell lennie még legalább 1 kockának. Vagyis megkaptuk, hogy az építmény legalább 11 kockából áll. Ez pedig tényleg lehetséges is, a példák közül egy:

1	0	2	0	2
0	3	0	0	3
0	2	0	0	2
0	0	0	3	3
1	3	2	3	

Tehát az építményben a kockák számának legkisebb értéke 11.



C2. Hófehérke és a hét törpe sakkoztak egymással, mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. A győzelem 2 pontot ért, a döntetlen 1-et, a vereség 0-t. A bajnokság végén Tudornak 2, Morgónak 3, Szendének 5, Vidornak 6, Hapcinak 7, Szundinak 10, Kukának 11 és Hófehérkének 12 pontja lett. Legfeljebb hány meccs végződhetett döntetlenre a bajnokság során? Adjatok példát minél több döntetlenre! A Válaszlapon tegyetek relációs jelet a játékospárok közé aszerint, hogy ki nyert! Jelöljétek „=” jellel a döntetlent, „>” jellel, ha a bal oldali játékos nyert és „<” jellel, ha a jobb oldali játékos nyert!

Nagy Kartal feladata

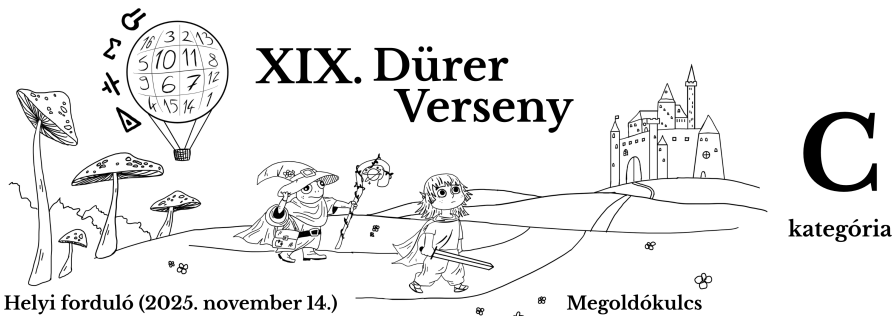
Megoldás: Belátjuk, hogy 13 döntetlen születhetett maximum a sakkbajnokságban. Egy példa:

Hóf = Kuk	Kuk = Szun	Szun = Hap	Hap = Vid	Vid = Szen	Szen > Mor	Mor = Tud
Hóf = Szun	Kuk = Hap	Szun = Vid	Hap = Szen	Vid = Mor	Szen = Tud	
Hóf > Hap	Kuk > Vid	Szun > Szen	Hap = Mor	Vid > Tud		
Hóf > Vid	Kuk > Szen	Szun > Mor	Hap > Tud			
Hóf > Szen	Kuk > Mor	Szun > Tud				
Hóf > Mor	Kuk > Tud					
Hóf > Tud						

Pusztán a saját pontszáma alapján, minden játékosra tudunk adni egy felső becslést, hogy legfeljebb hányszor döntetlenezhetett. Hófehérke 2-szer, Kuka 3-szor, Szundi 4-szer, Hapci 7-szer, Vidor 6-szor, Szende 5-ször, Morgó 3-szor és Vidor 2-szer. Ez összesen $32/2 = 16$ döntetlen meccs. Belátjuk, hogy nem lehet 13-nál több döntetlen. Használni fogjuk azt a gondolatot, hogy bármelyik játékosra igaz az, hogy a döntetleneinek számának paritása az megegyezik a pontszámának paritásával.

A 3 legtöbb pontot szerző játékosnál ki tudunk számolni egy minimum győzelem számot is. Ez Hófehérkének 5, Kukának 4 és Szundinak 3. Ezt a 3 játékost hívjuk topjátékosoknak. A fenti példában a topjátékosok egymás között 3 döntetlent játszottak. Ha ez nem így lenne, hanem valamelyikőjük nyert volna a másik ellen, az azt jelentené, hogy aki nyert, annak egy döntetlen meccse helyett kell egy vereség, és aki veszített, annak pedig egy döntetlen helyett kell egy győzelem. Tehát nem azzal a döntetlennel lesz kevesebb, amit eredetileg lecsereztünk, hanem még legalább másik kettővel, mert a döntetlenek paritása minden játékosnál adott a pontjaiknak paritása miatt. Tehát legalább 3 döntetlent (pontosan 3-at, ha körbeverés van) veszítünk, ami csökkenti az elméleti maximumot $16 - 3 = 13$ -ra, amire már van példánk. Tehát a 3 top játékosról feltehetjük, hogy döntetleneztek egymással.

Mivel Hófehérke 2 döntetlenjét elhasználtuk, ezért a maradék 5 meccsén nyernie kellett. Ez azt jelenti, hogy Hapcinak (mivel önmagával nem játszott) 2-vel csökken az elméletileg elérhető döntetlenjeinek száma, tehát $16 - 2 = 14$ -nél járunk. Kukának is van már 2 döntetlenje, tehát ő még egyszer kell, hogy döntetlenezzon, viszont 4-szer nyernie kell. Ha Hapci megint kikapna, akkor megint 2-vel csökkenne az elméleti döntetlenjeinek száma, de ennél már a fenti példánk is jobb ($14 - 2 = 12 < 13$). Tehát Kukának döntetleneznie kell Hapcival és a maradék 4 ellenfelét le kell győznie. Így viszont Vidor kikapott Hófehérkétől és Kukától is, amivel az elméleti döntetlenjeinek száma 2-vel csökken. Tehát az elméleti döntetlenszámunk 1-gyel csökken, mert lehetséges, hogy a Hapci-Vidor meccset kétszer számoltuk. Ezzel megkaptuk, hogy $14 - 1 = 13$ a döntetlenek elméleti legnagyobb száma, vagyis beláttuk az állítást.



C3. Frodó a Mordorba tartó hosszú utazása előtt 11 napig futással edzett. Az első napon 2 mérföldet futott. Ezt követően minden reggel eldöntötte, hogy mekkora távot teljesít aznap. Ha fáradt volt, akkor 1 mérfölddel kevesebbet futott, mint az azt megelőző napon, különben az előző napi táv kétszeresét tette meg. Az utolsó napon Frodó 13 mérföldet futott. Hányféleképpen tudta ezt elérni? A Válaszlapon adjátok meg minél többféle sorozatát az egyes napokon Frodó által megtett távoknak!

Török Eszter feladata

Megoldás: Mivel Frodó az első napon 2 mérföldet futott és minden további napon az előző napi távolságnál 1 mérfölddel kevesebbet vagy kétszer annyit futott, ezért minden napon biztosan egész mérföldnyi távolságot tett meg. Frodó az utolsó, 11. napon biztosan fáradt volt, hiszen 13 mérföldet futott, ami páratlan, így ez biztosan nem lehet a 10. nap távolságának kétszerese. Így tudjuk, hogy a 10. napon 14 mérföldet kellett, hogy fusson Frodó. Hasonlóan igaz továbbá, hogyha Frodó az egyik napon páratlan mérföldet futott, akkor aznap csakis fáradt lehetett, tehát az azt megelőző naphoz képest 1 mérfölddel kevesebbet tett meg. Vegyük észre, hogy Frodó biztosan futott valamennyit minden nap, hiszen ha egyszer 0 mérföldet tenne meg, akkor minden további napon 0 mérföldet tenne meg, így nem érhetne volna el, hogy az utolsó napon 13 mérföldet fusson.

Vizsgáljuk a második és harmadik napok lehetséges eseményeit! Mindkét nap fáradt nem lehetett, mert ekkor a 3. napon már nem ment volna futni. Így a lehetséges megtett távolságok az első három nap (mérföldben):

$$2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots$$

$$2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow \dots$$

$$2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow \dots$$

Most vizsgáljuk meg a nyolcadik és kilencedik napokat. Mivel a tizedik napon Frodó 14 mérföldet futott, ezért a kilencediken ennél 1-gyel többet vagy ennek a felét futhatta. Azaz 7 vagy 15 mérföldet futhatott Frodó ezen a napon. Mindkét esetben páratlan sok mérföldet tett meg, azaz a nyolcadik napon biztosan 1-gyel többet futott, mint a kilencediken. Így az utolsó négy napon a lehetséges megtett távolságok mérföldben mérve:

$$\dots \rightarrow 16 \rightarrow 15 \rightarrow 14 \rightarrow 13$$

$$\dots \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 14 \rightarrow 13$$

Az első három nap három lehetséges távolságsorozatát vessük össze az utolsó négy nap két lehetséges távolságsorozatával, így kapunk 6 lehetőséget, amelyekből még négy nap távolságai (negyedik naptól a hetedik napig) hiányoznak.

$$2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow 16 \rightarrow 15 \rightarrow 14 \rightarrow 13$$

$$2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow 16 \rightarrow 15 \rightarrow 14 \rightarrow 13$$

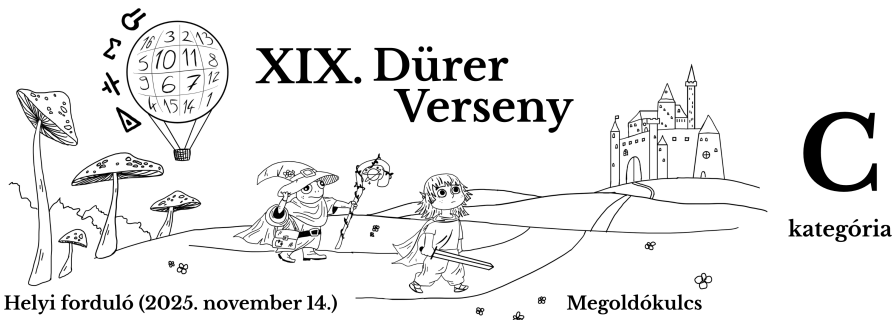
$$2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow 16 \rightarrow 15 \rightarrow 14 \rightarrow 13$$

$$2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 14 \rightarrow 13$$

$$2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 14 \rightarrow 13$$

$$2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 14 \rightarrow 13$$

Nézzük az első három esetet, amikor a nyolcadik napon Frodó 16 mérföldet fut. Ez előtt nem futhatott 17 mérföldet, mert akkor a hatodik napon 18-at kellett volna hogy fusson, de az azt jelentené, hogy az előtte lévő két napon vagy $20 \rightarrow 19$ vagy $10 \rightarrow 9$ mérföldet futott. Így a negyedik napon 10 vagy 20 mérföldet kellett, hogy megtegyen, de ez nem lehetséges, mert a harmadik napon 2, 3 vagy 8 mérföldet futott. Így az első három esetben a hetedik napon 8 mérföldet tett meg Frodó.



$2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 15 \rightarrow 14 \rightarrow 13$

$2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 15 \rightarrow 14 \rightarrow 13$

$2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 15 \rightarrow 14 \rightarrow 13$

Az első eset csak úgy fejezhető be, ha a negyedik napon fáradt volt Frodó, míg a második eset csak úgy, ha a negyedik napon nem volt fáradt Frodó. A harmadik eset nem fejezhető be, mivel 8 mérföldről 4 nap alatt 8 mérföldre nem tud visszajutni Frodó, mert valamikor kétszereznie is kell a távolságot. Így az első három esetből két lehetséges megoldást kaptunk:

$2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 15 \rightarrow 14 \rightarrow 13$

$2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 15 \rightarrow 14 \rightarrow 13$

Most vizsgáljuk az utóbbi három esetet, amikor Frodó a nyolcadik napon 8 mérföldet tett meg. Az első opció, hogy ekkor fáradt volt, azaz a hetedik napon eggyel többet, 9 mérföldet tett meg. Ekkor a hatodik napon 10-et kellett futnia. Így a negyedik és ötödik napon vagy $6 \rightarrow 5$ vagy $12 \rightarrow 11$ mérföldet futott. Ezek közül csak az előbbi merülhet fel lehetőségnek és az is csak akkor lehet jó, ha a harmadik napon Frodó 3 mérföldet futott, 2 és 8 mérföld esetén nem futhat a következő napon se 6, se 12 mérföldet. Így ebből az opcióból egyetlen megoldás származik:

$2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 10 \rightarrow 9 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 14 \rightarrow 13$

Így innentől feltehető, hogy Frodó a nyolcadik napon nem volt fáradt, azaz a hetedik napon 4 mérföldet futott.

$2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 14 \rightarrow 13$

$2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 14 \rightarrow 13$

$2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 14 \rightarrow 13$

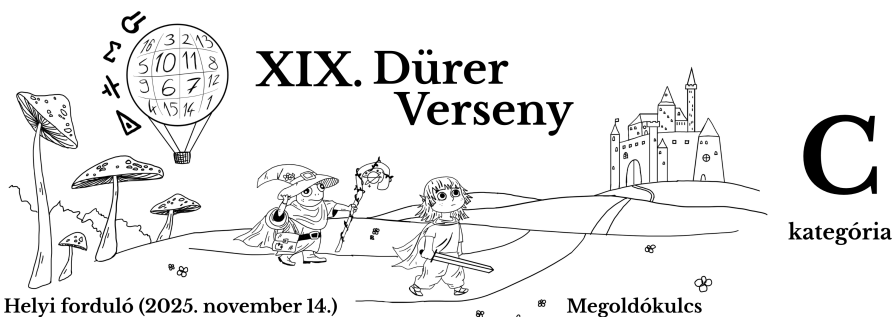
Mindhárom megmaradt lehetőség pontosan egyféleképpen fejezhető be a szabályok szerint:

$2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 14 \rightarrow 13$

$2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 14 \rightarrow 13$

$2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 14 \rightarrow 13$

Összességében tehát 6 lehetséges sorozata van a Frodó által megtett távolságoknak.



C4. Egy legalább kétjegyű pozitív egész szám *prímtökéletes*, ha bármely két szomszédos számjegyét balról jobbra összeolvasva kétjegyű prímszámot kapunk, és az így kapott prímszámok mind különbözőek. Mi a legnagyobb prímtökéletes szám? Adjatok meg a Válaszlapon egy minél nagyobb prímtökéletes számot!

Például a 113 prímtökéletes, de az 1717 és a 347 nem.

Halasi Gergő feladata

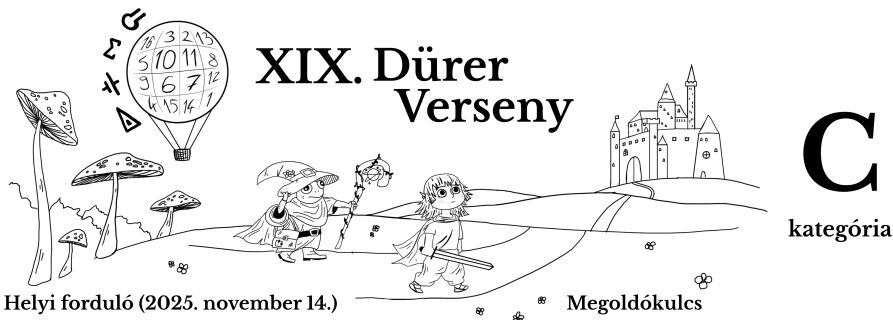
Megoldás: Páros számjegy és az 5 csak az első számjegy lehet, hiszen a későbbiek mind utolsó számjegyei lennének egy kétjegyű prímnek. Nézzük az összes lehetséges prímet 10 és 100 között: 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Ezeknek szeretnénk egy olyan egymás után illesztését, ami a lehető legnagyobb számot adja, ezért nyilván minél hosszabbat is szeretnénk kapni, és azokon belül a legnagyobbat keressük. Mivel páros számjegy vagy az 5 nem lehet az első számjegyet követően így érdemes ezek valamelyikével kezdeni. Minden páratlan számjegyre van olyan páros jegy, vagy az 5, amit elé rakva prímet kapunk (1: 41, 61, 3: 23, 43, 53, 83, 7: 47, 67, 9: 29, 59, 89). Így ha létezik a párosak és az 5 nélküli leghosszabb sorozat, akkor annak az elejére egy megfelelő páros számot vagy az ötöt odarakva egy hosszabb sorozatot kapunk (több lehetőség esetén a nagyobb tizedesjegyűt).

Nézzük csak a páratlan (és nem 5) kezdetűeket, hogy mi ezek között a leghosszabb sorozat. Vizsgáljuk meg, hogy ezen számjegyek közül melyikek állhatnak egymás után. A kétjegyű prímek:

- 1-re végződő számok: 11, 31, 71, 1-gyel kezdődőek: 11, 13, 17, 19
- 3-ra végződőek: 13, 73, 3-mal kezdődőek: 31, 37
- 7-re végződőek: 17, 37, 97, 7-tel kezdődőek: 71, 73, 79
- 9-re végződőek: 19, 79, 9-cel kezdődőek: 97

Láthatjuk, hogy minden számhoz tartozik egy jó folytatás (az 1, 3, 7 és 9 számjegyek közül), kivéve a 9 végűeknél. Ha nem 19 vagy 79 a prímtökéletes szám utolsó két számjegye, akkor csak az egyik szerepelhet benne. Megmutatjuk, hogy tudunk olyan számsorozatot is csinálni, amiben mindegyik szerepelhet (és ekkor az utolsó számjegy 9 lesz).

Először is nézzük, hogy mivel kezdhethetünk. Ha 89 a kezdő kétjegyű prím, akkor egyből 97-tel kell folytatnunk és biztos kimarad egy 9-re végződő prím. Ha 83-mal kezdünk, akkor pedig a 3 végűekből lesz három, de csak kettőt tudunk felhasználni, mert csak két 3 kezdetű prím van (vagy végződhet 3 végűre, de akkor egy 9 végű esik ki). A 67 ugyanígy nem jó kezdet, mert a 7 végűek száma is több lesz, mint a 7 kezdetűeké. Így tehát kezdjünk a következő legnagyobb kétjegyű prímmel, a 61-gyel. Ekkor már fel tudunk mindenkit használni. Mivel a 61 után 1 kezdetű kell, de a legnagyobb számot keressük, így kezdjük a 19-cel. Ekkor megfelelő sorozat: 19 – 97 – 73 – 37 – 71 – 13 – 31 – 11 – 17 – 79. Ebben valóban minden páratlan, nem 5 kezdetű prím fel van sorolva, így elé rakva a 61-et a 619737131179 lesz a megoldás. Ez valóban a legnagyobb prímtökéletes szám, hiszen a kétjegyű számok benne prímek (így csináltuk), és a leghosszabb is, mert minden lehetséges prímet tartalmaz. Az ilyen hosszú prímtökéletesek közül pedig a legnagyobb, mert ha nem 61-gyel kezdünk, akkor kevesebb számjegyből állna (kisebb szám lenne), a 61 után pedig a 9 a legjobb választás, hiszen az a legnagyobb számjegy. Így valóban a legnagyobbat találtuk meg.



C5. Legfeljebb hány bástyát lehet feltenni egy 8×8 -as sakktáblára úgy, hogy mindegyik legfeljebb egy másikat tartson ütésben?

Egy bástya akkor tart ütésben egy másikat, ha egy sorban vagy oszlopban vannak és nincs köztük bástya.
Hegedűs Dani feladata

Megoldás: Írjuk fel minden sorhoz és minden oszlop végére, hogy hány bástya van bennük! Ezen számok között egy helyes bástyafelrakás végén nem lehet 2-nél nagyobb szám, hiszen ekkor az adott sorban/oszlopban a középső bástya mindkét szomszédjával ütésben állna.

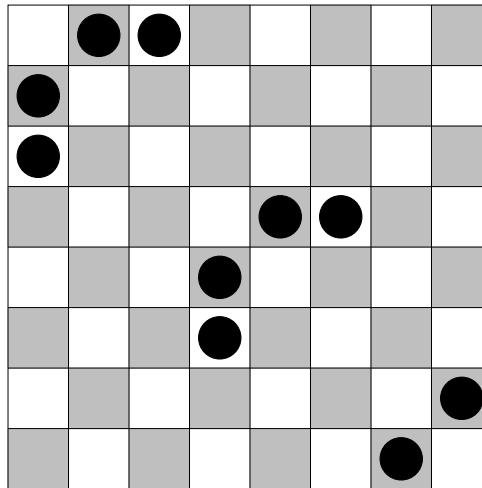
Amennyiben egy sor végére 2-est írtunk, akkor a sorban szereplő két bástya oszlopában márcsak 1-es szerepelhet, hiszen különben a sor és az oszlop találkozásánál lévő bástya két másikkal is ütésben állna. Hasonlóan, ha egy oszlop végén van egy 2-es, akkor az oszlopban szereplő két bástya sorában is már csak 1-es szerepelhet.

A sorok végén lévő számok összege megegyezik az oszlopok végén lévőkével, hiszen ezek az összegek pont a táblán szereplő bástyák számát adják.

Tegyük fel, hogy legalább három olyan sor van, amelyik végén 2-es szerepel. Ekkor van legalább $3 \cdot 2 = 6$ olyan oszlop, amelyik végén 1-es van, azaz legfeljebb $8 - 6 = 2$ végén szerepelhet 2-es. Tehát az összes bástya száma (azaz az oszlopok végén szereplő számok összege) ebben az esetben legfeljebb $6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 10$ lehet.

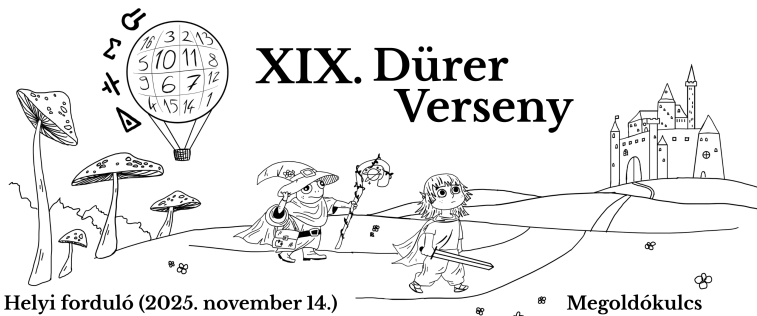
Ha kevesebb, mint 3 olyan sor van, aminek a végén 2-es van, akkor a bástyák száma (azaz a sorok végén szereplő számok összege) szintén legfeljebb $6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 10$ lehet. Tehát 10-nél több bástya nem helyezhető fel ilyen módon sem a sakktáblára.

Példa 10 bástyára:



2. Megoldás:

Alternatív megoldásként azt is mondhattuk volna, hogy mivel minden bástya legfeljebb egy másikkal áll ütésben, úgy minden bástya "látja" a kerület egy egység hosszú szakaszát. Továbbá észrevehetjük, hogy a kerület bármely pontját legfeljebb egy bástya "láthatja". Mivel a tábla kerülete 32, ezért nem lehet több bástya a táblán, mint $32/3 > 10$. A szemfüles olvasó észreveheti, hogy ezutóbbi okoskodás azt a két másik feladatot is megoldja, ha a feladatban nem azt tettük volna fel, hogy minden bástya legfeljebb 1 másikkal áll ütésben, hanem azt hogy minden bástya legfeljebb 2 vagy ha minden bástya legfeljebb 3 másikkal áll ütésben.



C
kategória

Helyi forduló (2025. november 14.)

Megoldókulcs

C6. Legyen $ABCD$ egy olyan négyszög, melyben $\angle BAD = 60^\circ$ és $\angle ABC = 90^\circ$. Továbbá azt is tudjuk, hogy az AB oldal hossza az éppen a CD és az AD oldalak hosszainak átlaga.

a) Határozzátok meg a BCD szög nagyságát!

b) Legyen a D pont tükörképe a BC oldalegyenesre E . Legyen az EC és az AB egyenesek metszéspontja F . Bizonyítsátok be, hogy az AF és a CE szakaszok hossza azonos!

Imolay Andris feladata

Megoldás:

a)

Legyen az AD és BC egyenesek metszéspontja G . Vegyük észre, hogy az ABG háromszög félszabályos, hiszen B -nél derékszög van, míg A -nál 60° . Ismert, hogy a félszabályos háromszög rövidebbik befogójának hossza az fele átfogó hosszának. Ezt az $ABCD$ oldalaira megadott feltétellel összekombinálva

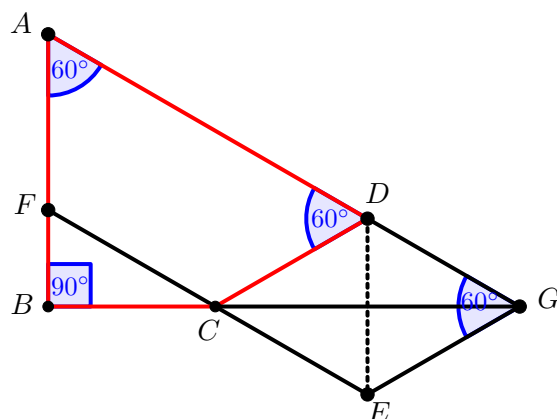
$$\frac{AD + DC}{2} = AB = \frac{AG}{2} = \frac{AD + DG}{2}$$

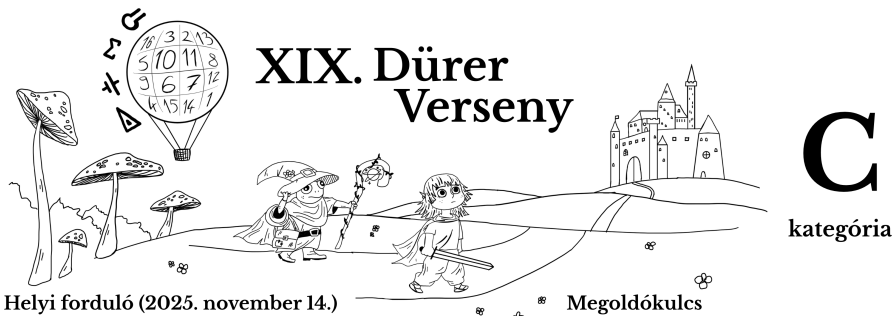
Ekkor viszont a két oldalt összehasonlítva kapjuk, hogy $DC = DG$, tehát DCG egyenlő szárú. Így ABG félszabályossága miatt $\angle AGB = 30^\circ$, tehát DCG egyenlő szárúsága miatt $\angle DCG = \angle DGC = \angle AGB = 30^\circ$. Ekkor viszont $\angle BCD = 180^\circ - \angle GCD = 150^\circ$.

b)

Mivel az E pont az a D -nek a tükörképe a CB egyenesre, ezért $CD = CE$. Ekkor tehát elég belátni, hogy $CD = AF$. Belátjuk, hogy $ADCF$ szimmetrikus trapéz, ami ehhez tényleg elegendő.

Vegyük észre, hogy CDE szabályos háromszög, mert $CD = CE$ és C -nél 60° van. Másrészt $ABCD$ szögeinek összege 360° , ezért $\angle ADC = 60^\circ$. Ekkor viszont AD és CE tényleg párhuzamosak, hiszen a CD szakasznál váltószögek vannak. Ekkor viszont megkaptuk, hogy $ADCF$ tényleg trapéz, valamint hogy $\angle FAD = 60^\circ$ és $\angle ADC = 60^\circ$, vagyis $ADCF$ tényleg szimmetrikus trapéz, amivel beláttuk az állítást.





C7. Egy versenyen több különböző kategóriában összesen 20 versenyző indul, mindenki pontosan egy kategóriában. A 2, 3, ..., 21 rajtszámokat a verseny kezdete előtt a szervező úgy osztja szét köztük, hogy mindenki egy-egy rajtszámot kap. A szervező szeretné úgy kiosztani a rajtszámokat, hogy akárhogy is alakul a verseny a kategóriákon belül, bármely két kategória dobogósai között találjon egy-egy embert, akiknek a rajtszámai nem relatív prímek.

a) Bizonyítsátok be, hogy a szervező szét tudja így osztani a rajtszámokat, ha 5 kategória van, mindegyikben 4-4 versenyzővel!

b) Ki tudja-e osztani a rajtszámokat a szervező ilyen módon, ha 4 kategóriában indul 5-5 versenyző?

c) Létezik-e a fentieknek megfelelő kiosztása a rajtszámoknak, ha két tízfős kategória van a versenyen?

A dobogón egy kategóriában mindig három versenyző áll. A szervező tudja, hogy melyik versenyző melyik kategóriában indul. Két különböző egész szám relatív prím, ha a legnagyobb közös osztójuk 1.

Például a b) részben az nem jó kiosztása a rajtszámoknak, ha az első kategóriában a 4, 11, 14, 20, 21 rajtszámok, míg a második kategóriában a 3, 9, 10, 12, 15 rajtszámok szerepelnek, mert ekkor nem igaz, hogy bármilyen eredmény esetén lesz a dobogókon egy-egy versenyző, akiknek a rajtszáma nem relatív prím. Ugyanis ha az első kategóriában a 4, 11 és 14 rajtszámú versenyzők végeznek a dobogón, a másodikban pedig a 3, 9 és 15 rajtszámúak, akkor bárhogy is választunk egy rajtszámot az első dobogóról, és egyet a másodiktól, azok mindenképpen relatív prímek lesznek.

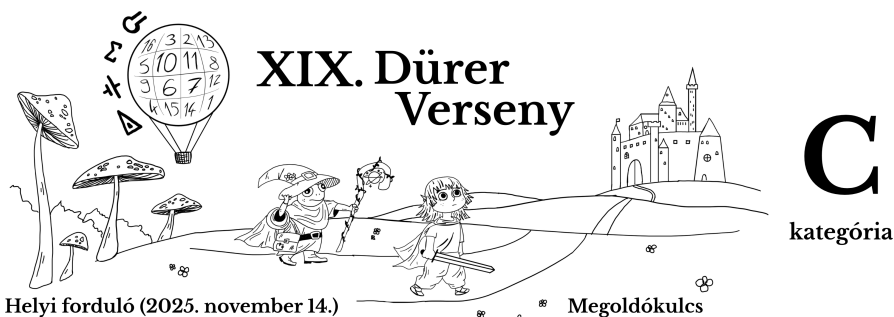
Halasi Gergő feladata

Megoldás: a) 10 páros és 10 páratlan rajtszámunk van. Tehát, ha a szervező mind az 5 kategóriában pontosan 2 versenyzőnek ad páros rajtszámot, akkor a skatulya elv miatt mind az 5 kategóriában lesz legalább egy páros rajtszámú dobogós. Ezért bármely két kategória dobogósai között a szervező meg tudja találni a két páros rajtszámú versenyzőt, akiknek a rajtszáma nem relatív prím egymáshoz képest. Tehát ki tudja osztani a szervező megfelelően a rajtszámokat, például így:

- A kategória: 2, 3, 4, 5
- B kategória: 6, 7, 8, 9
- C kategória: 10, 11, 12, 13
- D kategória: 14, 15, 16, 17
- E kategória: 18, 19, 20, 21

b) Legyen az A és B kategóriában 3 – 3 páros rajtszámú versenyző, hívjuk ezeket a kategóriákat páros kategóriáknak. A C és D kategóriában pedig 2 páros rajtszámú versenyző, hívjuk ezeket a kategóriákat páratlan kategóriáknak. (Négy páros szám fölösleges lenne egy kategóriában, mert a skatulya elv miatt már 3 páros számnál is legalább 1 páros rajtszámú versenyző a dobogón végezne.) Ekkor ha az A és a B kategóriát nézzük, akkor közöttük teljesül a feltétel, mert 3 – 3 páros rajtszám indul ezekben a kategóriákban, így a dobogókon lesz mindkét kategóriában páros számú versenyző, akik rajtszáma nem relatív prím egymással. Tehát akkor lehet problémánk ha valamelyik páratlan kategóriából a 3 páratlan sorszámú versenyző végez a dobogón. A páratlan kategóriákban úgy osszuk ki a 3 – 3 páratlan sorszámot, hogy mindkét kategóriában ezek közül az egyik 3-mal, egy másik 5-tel és a harmadik 7-tel osztható rajtszám legyen. Így a 11, 13, 17 és a 19 rajtszámoknak a páros kategóriákban kell indulniuk. Emellett a páros kategóriákban is legyen egy 3-mal és egy 5-tel osztható rajtszámú versenyző. Ezeknek páros rajtszámoknak kell lenniük, mert a 11, 13, 17 és a 19 rajtszámoknak is mind a páros kategóriában kell lenniük, hiszen nem lehetnek a páratlan kategóriákban az oszthatósági feltételek miatt.

Tehát ha veszünk egy páratlan és egy páros kategóriát, akkor a dobogón vagy lesz 1 – 1 páros rajtszámú versenyző, vagy a páratlan kategóriából lesz egy 3-mal, egy 5-tel és egy 7-tel osztható rajtszámú versenyző a dobogón és a páros kategóriából pedig lesz legalább 1 versenyző, akinek a rajtszáma vagy 3-mal vagy 5-tel szintén osztható. Hasonlóan ha vesszük a két páratlan kategóriát, akkor vagy lesz mindkét dobogón páros rajtszám vagy az egyik kategóriában a 3 páratlan rajtszámú versenyző a dobogós, amiben a rajtszámok rendre oszthatók 3-mal, 5-tel és 7-tel. Ekkor a másik dobogón is van



legalább egy rajtszám, ami ezen számok valamelyikével osztható. Tehát ekkor is teljesül a feltétel és lefedtünk minden esetet. Ez az elméleti szétosztás meg is valósítható, egy példa:

- A kategória: 6, 10, 11, 14, 17
- B kategória: 12, 13, 18, 19, 20
- C kategória: 4, 5, 8, 9, 21
- D kategória: 2, 3, 7, 15, 16

c) A 11, 13, 17 és a 19 prímszámok, ezek minden másik rajtszámhoz relatív prímek. Tehát, ha az egyik kategóriában legalább 3 db van ezen rajtszámok közül, akkor ha ez a 3 versenyző végez a dobogón, akkor minden rajtszám hozzájuk képest relatív prím lenne, tehát ilyen esetben nem lehetséges a szétosztás. Nézzük a másik esetet, amikor a két kategóriában 2 – 2 db van ebből a 4 rajtszámból. Feltehetjük szimmetria miatt, hogy az A kategóriában van a 11-es és a 13-as, míg a B kategóriában a 17-es és a 19-es rajtszám. Az egyik kategóriában az egyik versenyzőnek viselnie kell a 7-es rajtszámot, feltehetjük, hogy az A kategóriában. Ekkor viszont a B kategóriában a maradék 8 rajtszámnak mind 7-tel oszthatónak kell lennie, mert ha az A kategóriából a 11-es, 13-as és a 7-es rajtszámú versenyző, és a B kategóriából a 17-es és a 19-es rajtszámú versenyző végez a dobogón, akkor a B kategória 3. dobogósának 7-tel osztható rajtszámúnak kell lennie minden esetben, ezért a B kategóriában a maradék 8 rajtszámának mind 7-tel oszthatónak kell lennie. Viszont ennyi 7-tel osztható rajtszám nincsen, csak a 14 és a 21. Így biztos lesz a B kategóriában 7-tel nem osztható rajtszám, tehát itt nem tudja a feltételeknek megfelelően kiosztani a szervező a rajtszámokat a versenyzőknek.