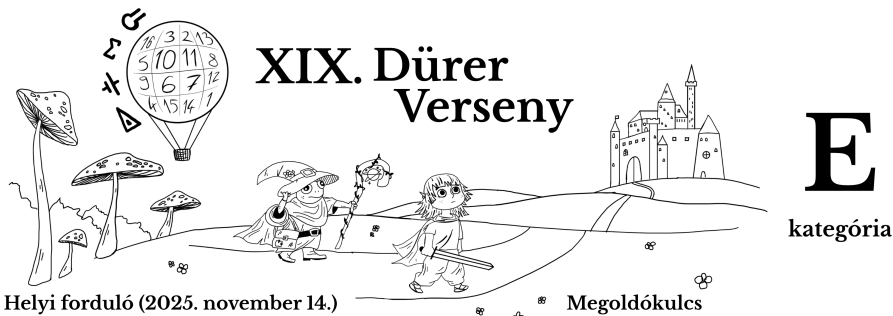




E1. Egy versenyen több különböző kategóriában összesen 20 versenyző indul, mindenki pontosan egy kategóriában. A 2, 3, ..., 21 rajtszámokat a verseny kezdete előtt a szervező úgy osztja szét köztük, hogy mindenki egy-egy rajtszámot kap. A szervező szeretné úgy kiosztani a rajtszámokat, hogy akárhogy is alakul a verseny a kategóriákon belül, bármely két kategória dobogósai között találjon egy-egy embert, akiknek a rajtszámjai nem relatív prímek.

a) Bizonyítsátok be, hogy a szervező szét tudja így osztani a rajtszámokat, ha 5 kategória van, mindegyikben 4-4 versenyzővel!

b) Ki tudja-e osztani a rajtszámokat a szervező ilyen módon, ha 4 kategóriában indul 5-5 versenyző?

c) Létezik-e a fentieknek megfelelő kiosztása a rajtszámoknak, ha két tízfős kategória van a versenyen?

A dobogón egy kategóriában mindig három versenyző áll. A szervező tudja, hogy melyik versenyző melyik kategóriában indul. Két különböző egész szám relatív prím, ha a legnagyobb közös osztójuk 1.

Például a b) részben az nem jó kiosztása a rajtszámoknak, ha az első kategóriában a 4, 11, 14, 20, 21 rajtszámok, míg a második kategóriában a 3, 9, 10, 12, 15 rajtszámok szerepelnek, mert ekkor nem igaz, hogy bármilyen eredmény esetén lesz a dobogókon egy-egy versenyző, akiknek a rajtszáma nem relatív prím. Ugyanis ha az első kategóriában a 4, 11 és 14 rajtszámú versenyzők végeznek a dobogón, a másodikban pedig a 3, 9 és 15 rajtszámúak, akkor bárhogy is választunk egy rajtszámot az első dobogóról, és egyet a másodiktól, azok mindenképpen relatív prímek lesznek.

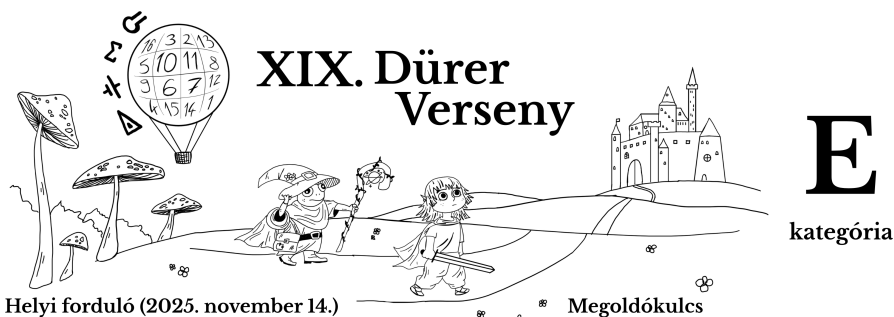
Halasi Gergő feladata

Megoldás: a) 10 páros és 10 páratlan rajtszámunk van. Tehát, ha a szervező mind az 5 kategóriában pontosan 2 versenyzőnek ad páros rajtszámot, akkor a skatulya elv miatt mind az 5 kategóriában lesz legalább egy páros rajtszámú dobogós. Ezért bármely két kategória dobogósai között a szervező meg tudja találni a két páros rajtszámú versenyzőt, akiknek a rajtszáma nem relatív prím egymáshoz képest. Tehát ki tudja osztani a szervező megfelelően a rajtszámokat, például így:

- A kategória: 2, 3, 4, 5
- B kategória: 6, 7, 8, 9
- C kategória: 10, 11, 12, 13
- D kategória: 14, 15, 16, 17
- E kategória: 18, 19, 20, 21

b) Legyen az A és B kategóriában 3 – 3 páros rajtszámú versenyző, hívjuk ezeket a kategóriákat páros kategóriáknak. A C és D kategóriában pedig 2 páros rajtszámú versenyző, hívjuk ezeket a kategóriákat páratlan kategóriáknak. (Négy páros szám fölösleges lenne egy kategóriában, mert a skatulya elv miatt már 3 páros számnál is legalább 1 páros rajtszámú versenyző a dobogón végezne.) Ekkor ha az A és a B kategóriát nézzük, akkor közöttük teljesül a feltétel, mert 3 – 3 páros rajtszám indul ezekben a kategóriákban, így a dobogókon lesz mindkét kategóriában páros számú versenyző, akik rajtszáma nem relatív prím egymással. Tehát akkor lehet problémánk ha valamelyik páratlan kategóriából a 3 páratlan sorszámú versenyző végez a dobogón. A páratlan kategóriákban úgy osszuk ki a 3 – 3 páratlan sorszámot, hogy mindkét kategóriában ezek közül az egyik 3-mal, egy másik 5-tel és a harmadik 7-tel osztható rajtszám legyen. Így a 11, 13, 17 és a 19 rajtszámoknak a páros kategóriákban kell indulniuk. Emellett a páros kategóriákban is legyen egy 3-mal és egy 5-tel osztható rajtszámú versenyző. Ezeknek páros rajtszámoknak kell lenniük, mert a 11, 13, 17 és a 19 rajtszámoknak is mind a páros kategóriában kell lenniük, hiszen nem lehetnek a páratlan kategóriákban az oszthatósági feltételek miatt.

Tehát ha veszünk egy páratlan és egy páros kategóriát, akkor a dobogón vagy lesz 1 – 1 páros rajtszámú versenyző, vagy a páratlan kategóriából lesz egy 3-mal, egy 5-tel és egy 7-tel osztható rajtszámú versenyző a dobogón és a páros kategóriából pedig lesz legalább 1 versenyző, akinek a rajtszáma vagy 3-mal vagy 5-tel szintén osztható. Hasonlóan ha vesszük a két páratlan kategóriát, akkor vagy lesz mindkét dobogón páros rajtszám vagy az egyik kategóriában a 3 páratlan rajtszámú versenyző a dobogós, amiben a rajtszámok rendre oszthatók 3-mal, 5-tel és 7-tel. Ekkor a másik dobogón is van



legalább egy rajtszám, ami ezen számok valamelyikével osztható. Tehát ekkor is teljesül a feltétel és lefedtünk minden esetet. Ez az elméleti szétosztás meg is valósítható, egy példa:

- A kategória: 6, 10, 11, 14, 17
- B kategória: 12, 13, 18, 19, 20
- C kategória: 4, 5, 8, 9, 21
- D kategória: 2, 3, 7, 15, 16

c) A 11, 13, 17 és a 19 prímszámok, ezek minden másik rajtszámhoz relatív prímek. Tehát, ha az egyik kategóriában legalább 3 db van ezen rajtszámok közül, akkor ha ez a 3 versenyző végez a dobogón, akkor minden rajtszám hozzájuk képest relatív prím lenne, tehát ilyen esetben nem lehetséges a szétosztás. Nézzük a másik esetet, amikor a két kategóriában 2 – 2 db van ebből a 4 rajtszámból. Feltehetjük szimmetria miatt, hogy az A kategóriában van a 11-es és a 13-as, míg a B kategóriában a 17-es és a 19-es rajtszám. Az egyik kategóriában az egyik versenyzőnek viselnie kell a 7-es rajtszámot, feltehetjük, hogy az A kategóriában. Ekkor viszont a B kategóriában a maradék 8 rajtszámnak mind 7-tel oszthatónak kell lennie, mert ha az A kategóriából a 11-es, 13-as és a 7-es rajtszámú versenyző, és a B kategóriából a 17-es és a 19-es rajtszámú versenyző végez a dobogón, akkor a B kategória 3. dobogósának 7-tel osztható rajtszámúnak kell lennie minden esetben, ezért a B kategóriában a maradék 8 rajtszámának mind 7-tel oszthatónak kell lennie. Viszont ennyi 7-tel osztható rajtszám nincsen, csak a 14 és a 21. Így biztos lesz a B kategóriában 7-tel nem osztható rajtszám, tehát itt nem tudja a feltételeknek megfelelően kiosztani a szervező a rajtszámokat a versenyzőknek.



E

kategória

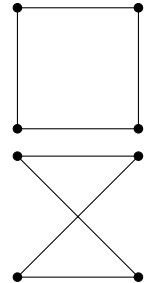
Helyi forduló (2025. november 14.)

Megoldókulcs

E2. Az elfek egy városában egy szociológus szeretné feltérképezni a lakosok ismeretségi hálózatát. Személyiségi jogok miatt viszont a hálózatra nem ír neveket. Azt tudja, hogy bármely három A , B , C lakosra igaz, hogy ha A és B nem ismeri egymást, valamint B és C sem ismeri egymást, akkor A és C sem ismeri egymást. Továbbá azt is tudja, hogy ha két lakos ismeri egymást, akkor ugyanannyi ismerősük van. Milyen lakosszámok esetén páratlan a lehetséges hálózatok száma?

Az ismeretség kölcsönös. Két hálózatot azonosnak tekintünk, ha pusztán a hálózatok ismeretében lehetséges, hogy pontosan ugyanazok a lakospárok ismerik egymást. Például az ábrán látható két hálózatot azonosnak tekintjük.

Kempf Alex és Takács Tamás feladata



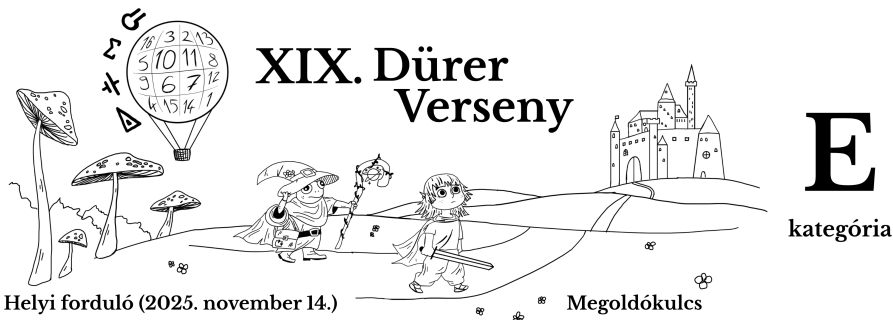
Megoldás: Gondoljunk egy ismeretségi hálózatra, mint egy gráfra, aminek a csúcsai a lakosoknak felelnek meg, és két csúcs pontosan akkor van összekötve, ha a hozzájuk tartozó lakosok ismerik egymást. Vegyünk egy gráfot, ami teljesíti a feladat feltételeit, és ebben egy v csúcsot. Legyen v fokszáma k és legyenek a szomszédainak halmaza az A csúcshalmaz, a maradék csúcsok halmaza pedig B .

Ha veszünk egy $a \in A$ és $b \in B$ csúcsot, akkor ezek össze vannak kötve. Ugyanis ha nem lennének, akkor a és b nincsenek összekötve, b és v sincsenek összekötve, azaz a és v sem lehetne összekötve, ami nem lehetséges.

Tehát minden A -beli csúcs össze van kötve minden B -beli csúccsal. Mivel v -vel össze vannak kötve az A -beli csúcsokkal, így azok foka is k , és a B -beliek pedig az A -beliekkel vannak összekötve, így a fokuk szintén k . De a B -belieknek k szomszédjuk már adott (az A csúcshalmaz), így több szomszédjuk nincs. Tehát v és B együttesen egy üres gráfot feszít ki.

Ezt tetszőleges v -re elmondhatjuk, így minden csúcs a vele nem szomszédos csúcsokkal együtt egy üres részgráfot alkot, míg az összes többi csúccsal pedig össze vannak kötve. Azaz a gráf komplementere diszjunkt teljes gráfok uniója. Mivel minden csúcs foka k , így a teljes gráfok méretei megegyeznek, és így n -nek osztói.

Továbbá meggondolható, hogy n tetszőleges m osztójára $\frac{n}{m}$ darab teljes m -csúcsú teljes gráf uniójának komplementere megfelel a feltételeknek. Azaz annyi n -csúcsú tarantulagráf van, ahány osztója n -nek. Ez pedig pontosan akkor páratlan, ha n prímtényezős felbontásában minden prím páros kitevővel szerepel, azaz ha n négyzetszám.



E3. Egy szabályos n -szög felosztása alatt $n - 3$ páronként nem metsző átló behúzását értjük. Egy felosztást nevezzünk *trükkösnek*, ha az így keletkező $n - 2$ háromszög közül pontosan kettő egyenlő szárú. Mely $n \geq 4$ egészekre létezik egy szabályos n -szögnek trükkös felosztása?
Tarján Berci és Varga Boldi feladata

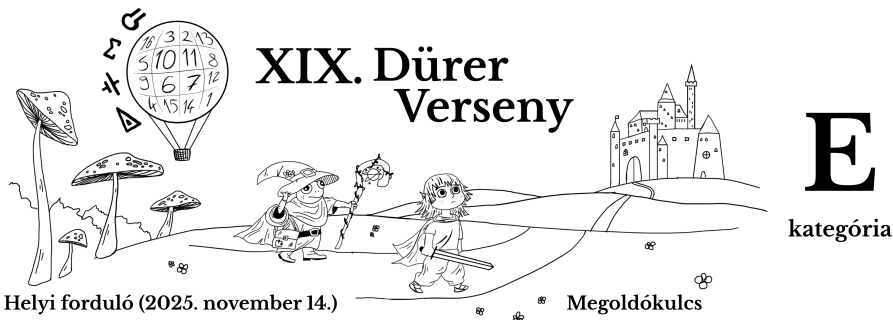
Megoldás: Először belátjuk, hogy páros n -re létezik trükkös felosztás. Legyenek a szabályos n -szög csúcsai $a_1, \dots, a_n$, amik ebben a sorrendben követik egymást a sokszöget körbejárva. Válasszuk ki az n -szögünk a_1 csúcsát, és húzzuk be a rá illeszkedő $n - 3$ átlót. Ez persze egy felosztását adja az n -szögnek. Megmutatjuk, hogy ez egy trükkös felosztás.

Azonnal látszik, hogy az a_1 -ből a_3 -ba menő átló meghatározza az $a_1 a_2 a_3$ egyenlő szárú háromszöget, és hasonlóan az a_{n-1} -be menő átló meghatározza az $a_{n-1} a_n a_1$ egyenlő szárú háromszöget, így már van kettő egyenlő szárú háromszöge a felosztásnak. Vegyük észre, hogy minden más háromszögnek pontosan egy olyan oldala van, ami a sokszögnek is oldala, a másik két oldala pedig a sokszög egy-egy átlója. Mivel minden átló hosszabb, mint a sokszög egy oldala, így egy ilyen háromszög csak akkor lehet egyenlő szárú, ha a két átló, amik az oldalai, egyenlő hosszúak. Legyen a háromszög három csúcsa a_1, a_j, a_{j+1} . Az $a_1 a_j$ és $a_1 a_{j+1}$ átlók csak akkor lehetnek egyenlő hosszúak, ha a_j az a_1 -től az egyik irányban a k -edik csúcs, a_{j+1} pedig a másik irányban a k -edik csúcs valamilyen k pozitív egész számra. Viszont ekkor a sokszög oldalainak száma $2k + 1$, hiszen $a_j a_{j+1}$ -en kívül minden oldalt pontosan egyszer számoltunk. De n páros, $2k + 1$ pedig páratlan, tehát ez nem lehet, azaz pontosan két egyenlő szárú háromszög lesz a felosztásban, így egy trükkös felosztást kaptunk tetszőleges n páros szám esetén.

Most belátjuk, hogy páratlan n -re nem létezik trükkös felosztás. Először belátjuk a következő segédállítást: Egy konvex n -szög tetszőleges felosztása tartalmaz legalább kettő olyan háromszöget, amiknek két oldala is az eredeti sokszög oldala, ha $n \geq 4$. A bizonyítás n szerinti teljes indukcióval történik. Nyilvánvaló, hogy $n = 4$ -re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy minden $k < n$ -re igaz az állítás, azaz minden konvex k -szög tetszőleges felosztásában van két ilyen háromszög. Most lássuk be, hogy ekkor n -re is igaz. Vegyük az n -szög egy tetszőleges átlóját. Ez két részre osztja a sokszöget, amik k_1 és k_2 csúcsú konvex sokszögek, ahol $k_1, k_2 < n$. Ha $k_1 = 3$, akkor ez a rész maga egy háromszög, aminek két oldala az eredeti n -szögünk oldala. Ha $k_1 \geq 4$, akkor alkalmazhatjuk erre a konvex k_1 -szögre az indukciót, így tudjuk, hogy bármilyen felosztása esetén van két olyan háromszög, aminek két oldala is a k_1 -szög oldala. Mivel a k_1 -szögünk oldalai az eredeti n -szög oldalai, kivéve az átlót amit behúztunk, ezért a két háromszög közül az egyik az n -szög oldalai közül is tartalmaz kettőt (hiszen az átlót csak egy háromszög tartalmazhatja). Ugyanezt elmondhatjuk az átló másik oldalán kapott k_2 -szögre, így mutattunk az átló mindkét oldalán egy-egy ilyen háromszöget. Ezzel beláttuk a segédállítást minden olyan felosztásra, ami tartalmazza ezt az átlót, de mivel az átlót tetszőlegesen választottuk, ez az indoklás bármelyik átlóra elmondható, így igaz a segédállítás. Készen állunk a feladat állításának bizonyítására. (Egyszerű skatulya-elv alapján is bizonyíthattunk volna, hiszen $n - 2$ háromszög van és n oldala a sokszögnek, viszont nincs olyan háromszög, aminek mindhárom oldala a sokszögről van.)

Vegyük egy szabályos n -szöget, ahol $n \geq 5$ páratlan, és ennek egy felosztását. Tudjuk, hogy ebben van két olyan háromszög $a_{i-1} a_i a_{i+1}$ és $a_{j-1} a_j a_{j+1}$, amik az n -szög két oldalát tartalmazzák, így egyenlő szárúak, sőt egybevágóak is, így az $a_{i-1} a_{i+1}$ és $a_{j-1} a_{j+1}$ átlók egyenlő hosszúak.

1.eset Ha a két háromszögnek van közös csúcsa, tegyük fel $a_{i-1} = a_{j+1}$, azaz $i - 1 = j + 1$. Ekkor mivel páratlan sok oldala van a sokszögnek, ezért a sokszögnek páratlan sok oldala van az a_{i+1} -ből a sokszög élein a_{j-1} -be menő a_i -t nem tartalmazó úton. Ekkor a felosztásunk egy felosztása lesz annak a sokszögnek, amit a_i és a_j levágásával kapunk az $a_{i-1} a_{i+1}$ és $a_{j-1} a_{j+1}$ átlók mentén. Vegyük észre, hogy ebben az $(n - 2)$ -szögben minden oldal az eredeti n -szög oldala kivéve $a_{i-1} a_{i+1}$ -et és $a_{j-1} a_{j+1}$ -et. A segédállításunk miatt ebben a sokszögben is lesz olyan háromszög, ami két oldalt tartalmaz, így ahhoz, hogy ne kapjunk újabb egyenlő szárú háromszöget, muszáj az egyik háromszögnek tartalmaznia $a_{i-1} a_{i+1}$ -et, a másiknak pedig $a_{j-1} a_{j+1}$ -et. Ekkor ismét két olyan háromszöget kapunk, amiknek van



közös csúcsuk, és az előző gondolatmenet ismét alkalmazható, most már egy $(n - 4)$ -szögre, és így tovább egészen addig, amíg egy háromszöget kapunk. Ennek a háromszögnek két oldala az eredeti sokszög átlója, ráadásul egyenlő hosszúak, így kaptunk egy újabb egyenlő szárú háromszöget. Ezzel beláttuk, hogy a felosztásban van legalább 3 egyenlő szárú háromszög, így nem lehet trükkös.

2.eset Ha a kezdetben kapott $a_{i-1}a_i a_{i+1}$ és $a_{j-1}a_j a_{j+1}$ háromszögeknek nincs közös csúcsa, akkor a sokszög azon oldalai, amiket egyik háromszög sem tartalmaz, két diszjunkt utat határoznak meg. Mindkét út az egyik háromszög egyik csúcsát köti össze a másik egy csúcsával, az egyik a_{i-1} -et a_{j+1} -gyel, a másik a_{i+1} -et a_{j-1} -gyel. Mivel a sokszögnek páratlan sok oldala van, ezen utak hossza különböző paritású. Az előző esethez hasonlóan a felosztásunknak az $a_{i-1}a_{i+1}$ és $a_{j-1}a_{j+1}$ átlók behúzásával kapott $(n - 2)$ -szögnek egy olyan felosztását kell adnia, amiben a két olyan háromszög, ami két oldalt tartalmaz, tartalmazza ezt a két átlót, amik mentén elvágtuk az n -szöget, különben nem lehetne trükkös. Továbbra is igaz, hogy az $(n - 2)$ -szögnek minden oldala az eredeti sokszög oldala, kivéve a két átlót, amik mentén vágva megkaptuk a sokszöget. Ezeknek az átlóknak a hossza viszont egymással megegyezik. Ebben az esetben több lehetőségünk is lehet arra, hogy hogy mi lesz a két háromszög, amiket kapunk, de mindenképp igaz marad ez a tulajdonság. Sőt, az is igaz marad, hogy a két útnak, amiket a háromszögek meghatároznak a sokszög oldalain, különböző a paritása, és ahogy egyre kisebb sokszögeket nézünk, ezen utak közül legalább az egyik mindig rövidebb lesz. Így ezt a gondolatmenetet ismételjük, és a különböző paritások miatt egyszer eljutunk az 1. esetnek megfelelő állapotba, amiről pedig már tudjuk, hogy nem adhat trükkös felosztást. Ezzel beláttuk, hogy páratlan $n \geq 5$ esetén nem lehet trükkös felosztása a szabályos n -szögnek.

2. Megoldás:

Vázolunk egy másik alternatív megoldást is. Feltehetjük, hogy nincs három olyan háromszög a felosztásban, amiknek két-két oldala az a szabályos n -szögben is oldal. Ekkor viszont egyszerű leszámolás alapján tetszőleges felosztásbeli háromszögnek valamelyik oldala az a szabályos n -szögnek is oldala. Ekkor viszont az egyik, szomszédos oldalpárra illeszkedő egyenlő szárú háromszögből a másik felé lépkedve a használt átlókon át, a használt átlók hosszai egy ideig monoton nőnek egyesével, majd monoton csökkennek egyesével (a váltást nem számítva). Mivel kezdetben a két kis átló azonos hosszú volt, így pontosan akkor lesz a monotonitás váltásakor azonos hosszúságú két átló, ha n páros.



E

kategória

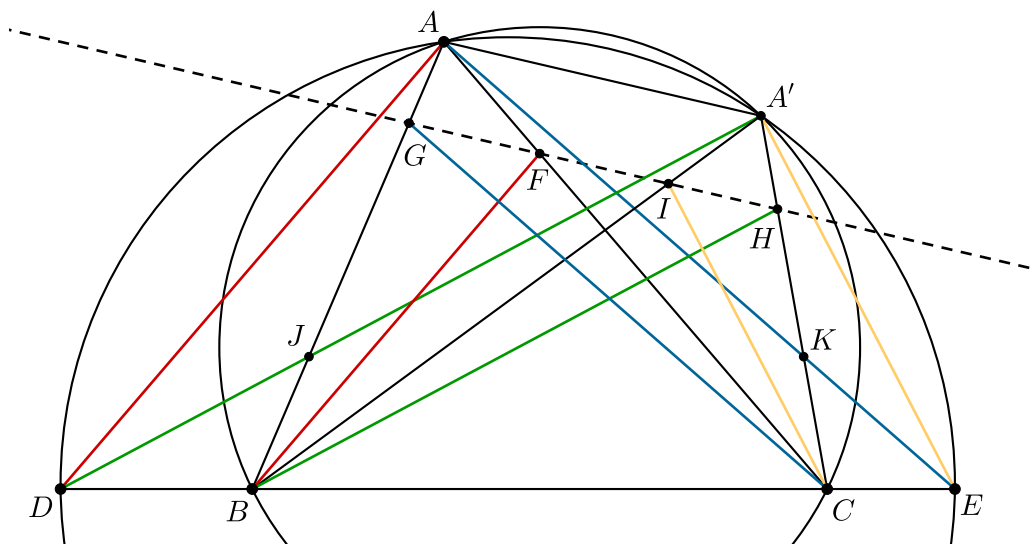
Helyi forduló (2025. november 14.)

Megoldókulcs

E4. Legyen ABC egy háromszög, továbbá legyen D és E két pont a BC egyenesen úgy, hogy a négy pont sorrendje D, B, C, E . Jelölje X az ABC és ADE háromszögek köréírt köreinek A -tól különböző metszéspontját. A B -n átmenő, AD -vel párhuzamos egyenes az AC egyenest F -ben, míg a C -n átmenő, AE -vel párhuzamos egyenes az AB egyenest G -ben metszi el. Hasonlóan, a B -n átmenő, XD -vel párhuzamos egyenes az XC egyenest H -ban, míg a C -n átmenő, XE -vel párhuzamos egyenes az XB egyenest I -ben metszi el. Bizonyítsátok be, hogy az F, G, H, I pontok egy egyenesen vannak!

Hegedűs Dani feladata

Megoldás: Színezzük meg az ábrát jobb átláthatóság érdekében. Ezentúl az X pontot A' -vel fogjuk jelölni. Legyen AB és DA' metszéspontja J , AE és $A'C$ metszéspontja K .



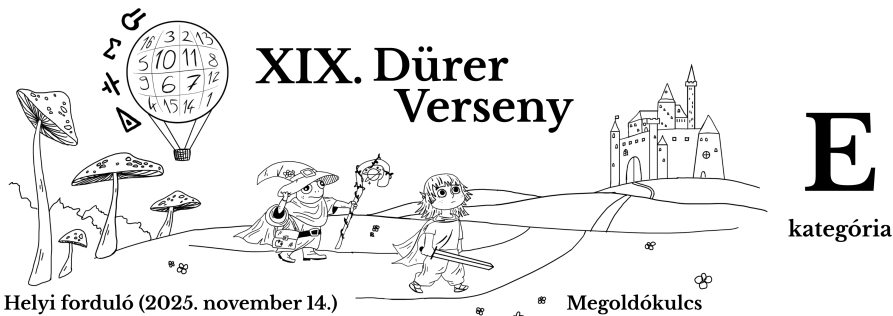
Először belátjuk, hogy GI és FH párhuzamosak AA' -vel. GI és FH definíciója szimmetrikus, így elég ezt GI -re bizonyítani.

Megmutatjuk, hogy az $AA'E$ és GIC háromszögek középpontosan hasonlóak. Ehhez tekintsük azt a B középpontú hasonlóságot, amely E -t C -be viszi. Ha eszerint A képe X , akkor $XC B \sphericalangle = AEB \sphericalangle$, továbbá X az AB egyenesen van, tehát $X = G$. Hasonlóan A' képe I , tehát $AA'E$ háromszöge GIC , így AA' és GI párhuzamos. (Ennek egy másik bizonyítása a Desargues-tétel alkalmazása az $AA'E$ és GIC háromszögekre.

Megkaptuk tehát, hogy $GI \parallel FH$, tehát elég megmutatni, hogy GH is párhuzamos AA' -vel. Ismert, és egyszerű szögszámolással bizonyítható, hogy ha $DAA'E$ és $BAA'C$ húrnégyszögek úgy, hogy $DBCE$ egy egyenesre esik, akkor $DA'B \sphericalangle = CAE \sphericalangle$. Ebből, és $AA'CB$ húrnégyszögségéből

$$BGC \sphericalangle = JAK \sphericalangle = BAC \sphericalangle + CAE \sphericalangle = BA'C \sphericalangle + DA'B \sphericalangle = JA'K \sphericalangle = BHC \sphericalangle$$

tehát $BGHC$ húrnégyszög. Mivel $AA'CB$ is húrnégyszög, ebből $BGH \sphericalangle = 180^\circ - BCH \sphericalangle = BAA' \sphericalangle$, így $AA' \parallel GH$, ezzel az állítást beláttuk.



E5. A D.Ü.R.E.R. szerepjátékot n játékos játssza egy kör alakú asztal körül. A mesélő szerepét a következőképpen sorolják ki. Kezdetben a legidősebb játékosnál van egy szabályos dobókocka. Egy lépés során akinél éppen van a dobókocka, az dob, és ha a dobás eredménye d , akkor a kockát d -szer eggyel balra adják. Ezt a lépést a játékosok k -szor ismétlik meg egymás után. Akinél a folyamat végén van a kocka, az lesz a mesélő. Határozzátok meg n összes olyan értékét, amihez létezik k , melyre a fenti sorsolási módszer igazságos!

Egy sorsolási módszer akkor igazságos, ha minden játékos ugyanakkora eséllyel lesz mesélő.

Móricz Benő feladata

Megoldás:

Ha n játékoshoz létezik olyan k szám, hogy k lépés után mindenki ugyanakkora eséllyel lesz a mesélő, vagyis a dobott k szám összegének n -es maradéka ugyanakkora eséllyel lesz a $0, 1, \dots, n-1$ mindegyike, akkor nevezzük k -t *jól sorsoló* számnak n -hez. Először belátjuk, hogy ha egy szám jól sorsoló egy adott n -hez, akkor minden nála nagyobb pozitív egész is az lesz. Vegyük észre, hogy ebben az esetben az utolsó dobás $\frac{1}{6}$ eséllyel ad az összeg maradékához $1, 2, \dots, 6$ -ot. Ha az utolsó dobás nélkül minden maradékot ugyanakkora eséllyel kaptunk meg, azaz ugyanannyi dobássorozat tartozott minden maradékhoz, akkor az utolsó dobás csak megszorozza a megfelelő dobássorozatok számát minden maradék esetén. Így tényleg ha egy szám jól sorsoló egy adott n -hez, akkor minden nála nagyobb pozitív egész is az lesz.

Ha egy m számhoz létezik jól sorsoló szám k_m , akkor m minden a osztójához is megfelelő lesz ez. Az $m = ab$ esetben minden m -es maradékot felírhatunk $ca + d$ alakban $0 \leq c < b$ és ezeket egyenlő eséllyel kapjuk meg k_m dobás esetén. Így minden a -s maradékot is ugyanakkora eséllyel kapunk meg, mégpedig b -szer akkora eséllyel, mint m esetén, hiszen minden $ca + d$ alakú maradék a -s maradéka d .

Ekkor k dobás után összesen 6^k különböző dobássorozat jöhetett létre. Ahhoz, hogy minden n -es maradékot egyenlő eséllyel kaphassunk meg, $n|6^k$ szükséges. Így n prímtényezői közt csak 2-esek és 3-asok lehetnek. Vegyük észre, hogy 1 dobás jól sorsol 1, 2, 3 és 6 ember esetén, így ezekhez létezik megfelelő k . (Sőt, minden pozitív egész jól sorsol ezekre.)

Végül belátjuk, hogy $n = 4$ és $n = 9$ esetén nem létezik jól sorsoló szám, azaz semmilyen többszörösükhöz sem. Indirekten tegyük fel, hogy létezik hozzájuk jól sorsoló szám. Egyik esetben sem sorsol jól 1 dobás, így feltehetjük, hogy $j \geq 1$ dobás még nem sorsol jól, de $j+1$ már igen. Az $n = 4$ esetben legyen j_i az olyan j dobásból álló sorozatok száma, amire az összeg maradéka i (ahol $i = 0, 1, 2, 3$ és a műveletek modulo 4 értendők). Ekkor tudjuk, hogy $(j+1)_i = j_i + j_{i+1} + 2j_{i+2} + 2j_{i+3}$ és ez minden i -re egyenlő kell, hogy legyen. Azaz $0 = (j+1)_{i+1} - (j+1)_i = j_i - j_{i+2}$, így $j_0 = j_2$ és $j_1 = j_3$ kellett, hogy teljesüljön. De j dobás jól sorsol 2-re, azaz $j_0 + j_2 = j_1 + j_3$, vagyis $j_0 = j_2 = j_1 = j_3$, tehát már $j \geq 1$ dobás is jól kellett, hogy sorsoljon $n = 4$ -re, ami ellentmondás.

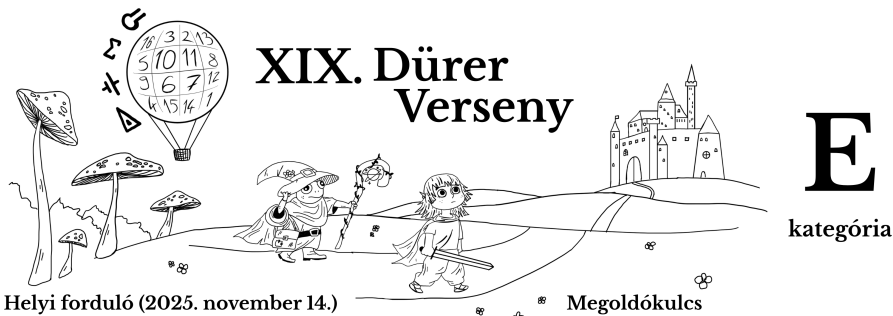
Nagyon hasonlóan $n = 9$ esetén is felírhatjuk $(j+1)_i$ értékét, itt már $i = 0, 1, \dots, 8$ és modulo 9 számolunk. $(j+1)_i = j_{i-1} + j_{i-2} + j_{i-3} + j_{i-4} + j_{i-5} + j_{i-6}$ és ez minden i -re egyenlő értéket kell, hogy felvegyen. Azaz $0 = (j+1)_{i+1} - (j+1)_i = j_i - j_{i-6}$ minden i -re. Ebből $j_0 = j_3 = j_6$, $j_1 = j_4 = j_7$ és $j_2 = j_5 = j_8$. De $j \geq 1$ dobás jól sorsol 3-ra, azaz $j_0 + j_3 + j_6 = j_1 + j_4 + j_7 = j_2 + j_5 + j_8$, vagyis minden j_i is egyenlő kellett, hogy legyen. Tehát már j dobás is jól kellett, hogy sorsoljon $n = 9$ -re, ami ellentmondás.

Vagyis megkaptuk, hogy n -et nem oszthatja se a 4, se a 9, így az 1, 2, 3 és 6-on kívül nincs másik megfelelő n . Tehát csak $n = 1, 2, 3, 6$ esetén létezik k pozitív egész, amire a sorsolás igazságos.

2. Megoldás:

A kíváncsi olvasónak alternatív megoldásként vázolunk egy, a fenténél trükkösebb, de nehezebb elméletet igénylő megoldást is. Ennek tudása nem elvárás a versenyen, de hasznos trükk hasonló problémák esetében.

Az $\frac{1}{6}(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$ polinom k -adik hatványra emelésével egy olyan polinomot kapunk, amiben x^i együtthatója pont annyi, amekkora eséllyel a dobások összege i . Ez azt jelenti, hogy akkor jó egy sorsolás, ha a kitevőket n -es maradék szerint csoportokba rendezve minden csoportban



az együtthatók összege ugyanannyi. Ekkor egy ε_n n -edik primitív egységgyököt behelyettesítve ebbe a polinomba, $\varepsilon_n^n = 1$ -et használva

$$\left(\frac{1}{6}(\varepsilon_n + \varepsilon_n^2 + \varepsilon_n^3 + \varepsilon_n^4 + \varepsilon_n^5 + \varepsilon_n^6) \right)^k = \frac{1}{n}(\varepsilon_n + \varepsilon_n^2 + \dots + \varepsilon_n^n).$$

A jobb oldalt szorzattá alakítva, ha $\varepsilon_n \neq 1$

$$\left(\frac{1}{6}(\varepsilon_n + \varepsilon_n^2 + \varepsilon_n^3 + \varepsilon_n^4 + \varepsilon_n^5 + \varepsilon_n^6) \right)^k = \frac{1}{n} \varepsilon_n \frac{\varepsilon_n^n - 1}{\varepsilon_n - 1} = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$0 = \frac{1}{6}(\varepsilon_n + \varepsilon_n^2 + \varepsilon_n^3 + \varepsilon_n^4 + \varepsilon_n^5 + \varepsilon_n^6) = \frac{1}{6} \varepsilon_n \frac{\varepsilon_n^6 - 1}{\varepsilon_n - 1},$$

vagyis $\varepsilon_n^6 - 1 = 0$, tehát az n -edik primitív egységgyök hatodik egységgyök is, vagyis $\varepsilon_n \neq 1$ esetén csak $n = 2, 3, 6$ -ra lehet megoldás és ilyenkor $k = 1$ dobás tényleg megfelelő. Az $\varepsilon_n = 1$ esetet még meg kell külön néznünk, mivel a számolás során feltettük, hogy $\varepsilon_n \neq 1$. Ekkor $n = 1$ és minden k igazságos sorsolást ad. Tehát csak $n = 1, 2, 3, 6$ esetén létezik k pozitív egész, amire a sorsolás igazságos.