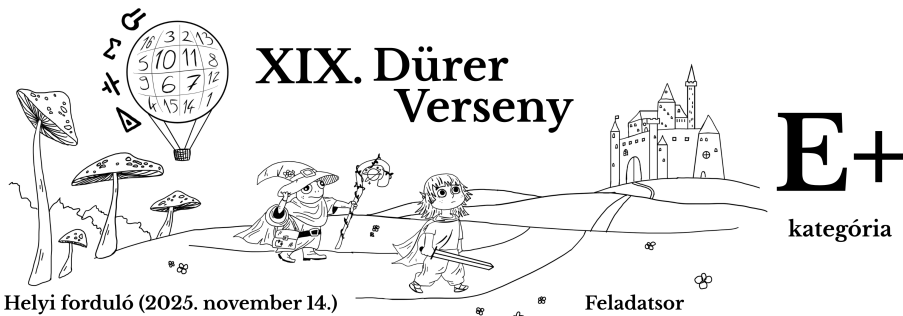




1. Tyrion és Kisujj egy játékot játszanak, melynek kezdetén adott 2026 üres láda 0-tól 2025-ig sorszámozva. Minden körben a soron következő játékos kiválaszt egy i sorszámú, számot még nem tartalmazó ládát, majd a másik játékos választ egy a_i egész számot és beleteszi a ládába. A két játékos felváltva választ ládát, először Tyrion. A játéknak akkor van vége, amikor már minden ládába került szám. Ha az $a_{2025}x^{2025} + a_{2024}x^{2024} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ egyenletnek megoldása az 5202, akkor Tyrion nyer, különben Kisujj. Kinek van nyerő stratégiája?

A játékosok a játék során végig ismerik a ládák tartalmát.

Varga Boldi feladata

2. Legyen ABC egy háromszög, továbbá legyen D és E két pont a BC egyenesen úgy, hogy a négy pont sorrendje D, B, C, E . Jelölje X az ABC és ADE háromszögek köréírt köreinek A -tól különböző metszéspontját. A B -n átmenő, AD -vel párhuzamos egyenes az AC egyenest F -ben, míg a C -n átmenő, AE -vel párhuzamos egyenes az AB egyenest G -ben metszi el. Hasonlóan, a B -n átmenő, XD -vel párhuzamos egyenes az XC egyenest H -ban, míg a C -n átmenő, XE -vel párhuzamos egyenes az XB egyenest I -ben metszi el. Bizonyítsátok be, hogy az F, G, H, I pontok egy egyenesen vannak!

Hegedűs Dani feladata

3. Egy goblin megette az összes olyan n pozitív egész számot, melyre teljesül, hogy az n -nél kisebb, n -hez relatív prím pozitív egészek négyzetösszege osztható n -nel. Bizonyítsátok be, hogy létezik 2025 egymást követő pozitív egész, melyek mindegyikét megette a goblin!

Beke Csongor feladata

4. Legyen p egy rögzített prímszám. A sík egy véges nemüres H pontthalmazát nevezzük p -fantasztikusnak, ha tudunk úgy pozitív egészeket írni H pontjaira, hogy az alábbi három feltétel mindegyike teljesüljön.

- Nincs H összes pontja egy egyenesen.
- Létezik olyan H -beli pont, amin p -vel nem osztható szám van.
- Ha egy egyenes legalább két H -beli pontot tartalmaz, akkor a rajta fekvő pontokra írt számok összege osztható p -vel.

Határozzátok meg p függvényében a p -fantasztikus pontthalmazok lehető legkisebb elemszámát!

A H -beli pontokra pontosan egy számot írunk, a többi pontra nem írunk számot.

Beke Csongor feladata

5. Létezik-e olyan valós számokból álló korlátos $a_1, a_2, \dots$ végtelen sorozat, amelyre $|a_i - a_j| > \frac{1}{|i-j|}$ teljesül minden $i \neq j$ esetén?

Egy valós számokból álló végtelen sorozatot korlátosnak nevezünk, ha létezik hozzá egy M valós szám, amelyre $|a_i| \leq M$ teljesül minden i esetén.

Varga Boldi feladata

Mindegyik megoldást külön lapra írájatok, amin szerepeljen a csapat neve, kategóriája és a feladat száma.

Minden helyes és megfelelően indokolt feladatmegoldás 12 pontot ér. Összesen 60 pont szerezhető.

A feladatok megoldására 180 perc áll rendelkezésetekre. Jó versenyzést kívánunk!

A XIX. Dürer Verseny szervezői