XIX. Dürer Verseny

E+

kategória

Helyi forduló (2025. november 14.) **Megoldókulcs**

E+1. Tyrion és Kisujj egy játékot játszanak, melynek kezdetén adott 2026 üres láda 0-tól 2025-ig sorszámozva. Minden körben a soron következő játékos kiválaszt egy i sorszámú, számot még nem tartalmazó ládát, majd a másik játékos választ egy a_i egész számot és beleteszi a ládába. A két játékos felváltva választ ládát, először Tyrion. A játéknak akkor van vége, amikor már minden ládába került szám. Ha az $a_{2025}x^{2025} + a_{2024}x^{2024} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ egyenletnek megoldása az 5202, akkor Tyrion nyer, különben Kisujj. Kinek van nyerő stratégiája?
A játékosok a játék során végig ismerik a ládák tartalmát.
Varga Boldi feladata

Megoldás: Tyrionnak van nyerő stratégiája. Az utolsó körben Tyrion fog a megmaradó üres ládába egy egész számot írni. Legyen ez a láda a k sorszámú. Ha ide nullát írva a bal oldalon lévő polinom értéke 5202-ben osztható 5202^k-nal, akkor Tyrion választhatja a_k-t úgy, hogy $-a_k \cdot 5202^k$ éppen ez az érték legyen, tehát az 5202 gyöke legyen az egyenletnek.

Így Tyrionnak elég azt garantálnia minden lépésben, hogy ha a legnagyobb sorszámú üres doboz a k sorszámú, akkor ha a jelenlegi lépésben még üres dobozokba 0-t írunk, és az így kapott egyenletbe x helyére 5202-t, akkor a bal oldal osztható 5202^k-nal.

Ez kezdetben teljesül, mert a kiindulási polinom helyettesítési értéke 0.

Ha egy adott körben Kisujj választ ládát, és Tyrion számot, akkor Tyrion írjon 0-t a kijelölt ládába. Ha eddig teljesült a fenti tulajdonság, akkor ezután is fog, hiszen a legnagyobb sorszámú üres láda sorszáma nem nőhetett, és a bal oldal értéke a 0-k beírása után nem változott.

Ha Tyrionnak kell ládát választania, akkor válassza a legnagyobb sorszámú üres ládát. Legyen ez a k-adik. Ekkor attól függetlenül, hogy Kisujj melyik számot választja, a legnagyobb sorszámú üres láda sorszáma csökken. Ez a lépés előtt k volt, tehát ezt a ládát figyelmen kívül hagyva a kérdéses összeg osztható 5202^k-nal. Ez $a_k \cdot 5202^k$-nal változik a lépés során, tehát továbbra is osztható lesz 5202^k-nal, azaz minden kisebb hatványával is, így Tyrion ebben az esetben is garantálni tudja a fenti tulajdonságot, tehát valóban neki van nyerő stratégiája.

XIX. Dürer Verseny

E+

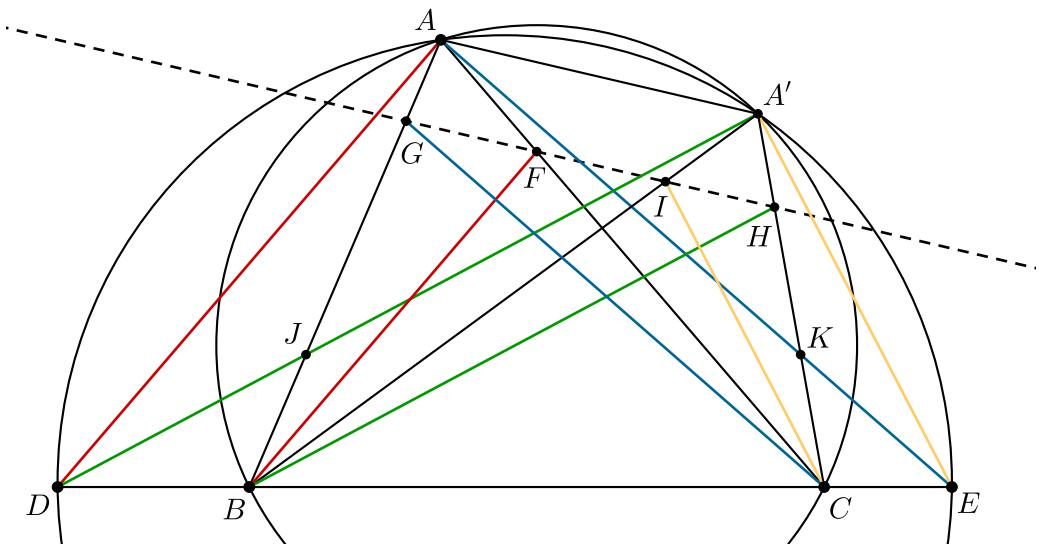
kategória

Helyi forduló (2025. november 14.) **Megoldókulcs**

E+2. Legyen ABC egy háromszög, továbbá legyen D és E két pont a BC egyenesen úgy, hogy a négy pont sorrendje D, B, C, E. Jelölje X az ABC és ADE háromszögek köréírt köreinek A-tól különböző metszéspontját. A B-n átmenő, AD-vel párhuzamos egyenes az AC egyenest F-ben, míg a C-n átmenő, AE-vel párhuzamos egyenes az AB egyenest G-ben metszi el. Hasonlóan, a B-n átmenő, XD-vel párhuzamos egyenes az XC egyenest H-ban, míg a C-n átmenő, XE-vel párhuzamos egyenes az XB egyenest I-ben metszi el. Bizonyítsátok be, hogy az F, G, H, I pontok egy egyenesen vannak!

Hegedűs Dani feladata

Megoldás: Színezzük meg az ábrát jobb átláthatóság érdekében. Ezentúl az X pontot A'-vel fogjuk jelölni. Legyen AB és DA' metszéspontja J, AE és $A'C$ metszéspontja K.



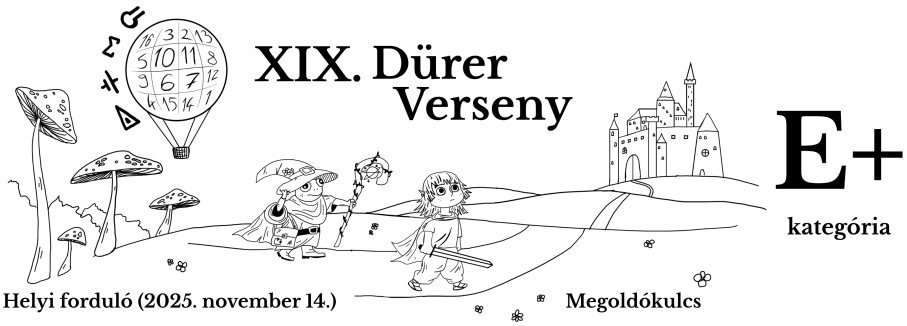
Először belátjuk, hogy GI és FH párhuzamosak AA'-vel. GI és FH definíciója szimetrikus, így elég ezt GI-re bizonyítani.

Megmutatjuk, hogy az $AA'E$ és GIC háromszögek középpontosan hasonlók. Ehhez tekintsük azt a B középpontú hasonlóságot, amely E-t C-be viszi. Ha eszerint A képe X, akkor $XCB\sphericalangle = AEB\sphericalangle$, továbbá X az AB egyenesen van, tehát $X = G$. Hasonlóan A' képe I, tehát $AA'E$ háromszögé GIC, így AA' és GI párhuzamos. (Ennek egy másik bizonyítása a Desargues-tétel alkalmazása az $AA'E$ és GIC háromszögekre.

Megkaptuk tehát, hogy $GI||FH$, tehát elég megmutatni, hogy GH is párhuzamos AA'-vel. Ismert, és egyszerű szögszámolással bizonyítható, hogy ha $DAA'E$ és $BAA'C$ húrnégyszögek úgy, hogy $DBCE$ egy egyenesre esik, akkor $DA'B\sphericalangle = CAE\sphericalangle$. Ebből, és $AA'CB$ húrnégyszögségéből

$$BGC\sphericalangle = JAK\sphericalangle = BAC\sphericalangle + CAE\sphericalangle = BA'C\sphericalangle + DA'B\sphericalangle = JA'K\sphericalangle = BHC\sphericalangle$$

tehát $BGHC$ húrnégyszög. Mivel $AA'CB$ is húrnégyszög, ebből $BGH\sphericalangle = 180° - BCH\sphericalangle = BAA'\sphericalangle$, így $AA'||GH$, ezzel az állítást beláttuk.



E+3. Egy goblin megette az összes olyan n pozitív egész számot, melyre teljesül, hogy az n-nél kisebb, n-hez relatív prím pozitív egészek négyzetösszege osztható n-nel. Bizonyítsátok be, hogy létezik 2025 egymást követő pozitív egész, melyek mindegyikét megette a goblin!
Beke Csongor feladata

Megoldás: Legyen $f(n)$ az n-hez relatív prím, nála kisebb számok négyzetösszege. Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor $n = p^k$ valamely p prímszámra és $k \in \mathbb{N}$-re. Ekkor

$$\begin{aligned} f(p^k) &= \sum_{i=1}^{p^k-1} i^2 - \sum_{j=1}^{p^{k-1}-1} (pj)^2 \\ &= \frac{(p^k-1)p^k(2p^k-1)}{6} - p^2\frac{(p^{k-1}-1)p^{k-1}(2p^{k-1}-1)}{6} \\ &= \frac{p^k}{6}\Big((p^k-1)(2p^k-1) - (p^{k-1}-1)p(2p^{k-1}-1)\Big) \end{aligned}$$

Látható, hogy a zárójelben lévő kifejezés 1 maradékot ad p-vel osztva, ezért $v_p(f(p^k)) = k - v_p(6)$, ahol $v_p(a)$ az a szám prímtényezős felbontásában p kitevője. Azaz, ha $p \neq 2, 3$, akkor p^k-t megette a goblin, ha $p = 2, 3$, akkor pedig nem, viszont ebben az esetben is $p^{k-1} | f(p^k)$.

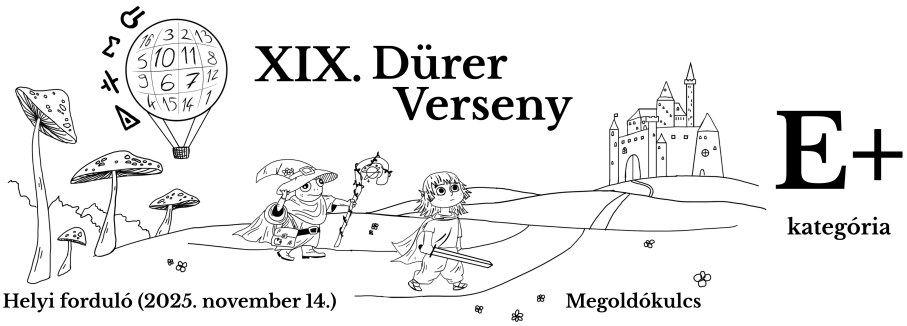
Legyen $n = p^k \cdot M$, ahol p nem osztja M-et. Ekkor a kínai maradéktétel miatt bármely p^k-nál kisebb, p^k-hoz relatív prím i-re és M-nél kisebb, M-hez relatív prím j-re pontosan egy olyan $p^k \cdot M$-nél kisebb, $p^k \cdot M$-hez relatív prím ℓ szám létezik, amire $\ell \equiv i \pmod{p^k}$ és $\ell \equiv j \pmod{M}$. Tehát minden ilyen i számhoz pontosan $\phi(M)$ olyan $0 < \ell < p^k \cdot M$ szám van, ami $p^k \cdot M$-hez relatív prím, és $\ell \equiv i \pmod{p^k}$, ahol $\phi(M)$ az M-nél kisebb, M-hez relatív prím pozitív egészek száma. Ezért

$$f(p^k \cdot M) \equiv \phi(M) \cdot f(p^k) \pmod{p^k}.$$

Egy általános $n = \prod_{i=1}^m p_i^{k_i}$ számot tehát akkor evett meg a goblin, ha minden i-re $\phi(n/p_i^{k_i}) \cdot f(p_i^{k_i})$ osztható $p_i^{k_i}$-nel. Ha $p_i \neq 2, 3$, akkor a második tag osztható $p_i^{k_i}$-nel, ezért az egész kifejezés is. Ha $p_i \leq 3$, akkor a korábbiak miatt az kell, hogy p_i osztója legyen $\phi(n/p_i^{k_i})$-nek. Ismert, hogy $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$, ha a és b relatív prímek, tehát az előzőhöz az kell, hogy valamilyen $p_j \neq p_i$-re $p_i \mid \phi(p_j^{k_j}) = p_j^{k_j-1}(p_j - 1)$, tehát $p_i \mid p_j - 1$. Ez $p_i = 2$ esetében akkor teljesül, ha n-nek van még egy prímosztója, $p_i = 3$ esetében pedig akkor, ha van $3k + 1$ alakú prímosztója.

Összességében a goblin az olyan n-eket nem ette meg, amik vagy kettőhatványok, vagy amik oszthatóak 3-mal, de nem oszthatóak $3k+1$ alakú prímmel. Tehát többek között megette az összes olyan számot, ami osztható $3k + 1$ alakú prímmel.

Ezt használva most találunk 2025 egymást követő számot, amiket megevett a goblin. Ismert, hogy van végtelen sok $3k+1$ alakú prímszám, legyen ezek közül néhány $p_1, p_2, \ldots, p_{2025}$. A kínai maradéktétel szerint van olyan n egész, amire $n + i \equiv 0 \pmod{p_i}$ minden i-re, hiszen a p_i számok páronként relatív prímek. Erre az n-re az $n+1, n+2, \ldots, n+2025$ számok mindegyike osztható $3k+1$ alakú prímszámmal, tehát ezeket mind megette a goblin.



E+4. Legyen p egy rögzített prímszám. A sík egy véges nemüres H ponthalmazát nevezzük *p-fantasztikusnak*, ha tudunk úgy pozitív egészeket írni H pontjaira, hogy az alábbi három feltétel mindegyike teljesüljön.

- Nincs H összes pontja egy egyenesen.
- Létezik olyan H-beli pont, amin p-vel nem osztható szám van.
- Ha egy egyenes legalább két H-beli pontot tartalmaz, akkor a rajta fekvő pontokra írt számok összege osztható p-vel.

Határozzátok meg p függvényében a p-fantasztikus ponthalmazok lehető legkisebb elemszámát!
A H-beli pontokra pontosan egy számot írunk, a többi pontra nem írunk számot.
Beke Csongor feladata

Megoldás: A lehető legkisebb ilyen ponthalmaz $p+1$ méretű.

Először mutatunk egy $p+1$ méretű, p-fantasztikus ponthalmazt.

Legyen H az p pont egy egyenesen, valamint egy pont, ami nincs rajta ezen az egyenesen. Ha az egyenesen lévő pontokra 1-et, a $p+1$-edik pontra pedig $p-1$-et írunk, akkor az olyan egyeneseken, amin ez a pont rajta van, $1+(p-1) \equiv 0 \pmod p$ lesz a pontokra írt számok összege, ezeken kívül pedig csak az az egyenes van, amin az összes többi pont rajta van, ezen $p \cdot 1 \equiv 0 \pmod p$ az összeg, tehát H tényleg p-fantasztikus.

Rátérünk annak a bizonyítására, hogy egy legfeljebb p méretű H halmaz nem lehet p-fantasztikus. Tegyük fel indirekten, hogy H egy $n \le p$ méretű p-fantasztikus halmaz, és $f : H \to \mathbb{Z}_+$ egy számozás, ami teljesíti a feltételeket. A $p = 2$ eset könnyű, így mostantól feltesszük, hogy $p \ge 3$.

Először megmutatjuk, hogy a pontokra írt összes szám összege osztható p-vel. Legyen s a pontokra írt számok összege, L azon egyenesek halmaza, amik tartalmaznak legalább két H-beli pontot, és minden $\ell \in L$-re legyen $c(\ell)$ a pontok száma ℓ-en. Ekkor

$$0 \equiv \sum_{\ell \in L} \left[(c(\ell)-1) \sum_{P \in \ell} f(P) \right] = \sum_{P \in H} \left[f(P) \sum_{\ell : P \in \ell} (c(\ell)-1) \right] = \sum_{P \in H} f(P)(n-1) = s(n-1) \pmod p$$

Mivel $2 \le n \le p$, leoszthatunk $n-1$-gyel modulo p, tehát $p \mid s$.

Tekintsünk egy tetszőleges $P \in H$ pontot, és az ezen átmenő L-beli egyeneseket. Minden ilyen egyenes mentén a pontokra írt számok összege osztható p-vel, és ezeknek az összegeknek az összege $s + (k-1)f(P)$, ha k egyenes megy át P-n. De nincs minden pont egy egyenesen, tehát $2 \le k \le p-1$, így $p \nmid k-1$. Mivel $p \mid s$, ebből $p \mid f(P)$ következik. P tetszőleges volt, így minden ponton P-vel osztható szám van, ami ellentmondás, tehát valóban nincs $p+1$-nél kevesebb pontú p-fantasztikus halmaz.

2. Megoldás: Csak azt a részt bizonyítjuk, hogy a pontok száma legalább $p+1$. A Sylvester-Gallai tétel miatt van olyan egyenes, amin pontosan két H-beli pont van, legyenek ezek A és B. Legyenek a rájuk írt számok p-es maradéka rendre 1 és -1. (Ez feltehető, hiszen különben a rájuk írt szám $\pmod p$ inverzével szorozhatunk mindent, és nem változik az állítás.)

Egy A-n átmenő, B-t nem tartalmazó egyenesen a többi szám összege -1, míg egy B-n átmenő, A-t nem tartalmazó egyenesen 1. Így ha az A-n és B-n kívüli pontok összegét tekintjük, akkor kétféleképpen leszámolva ez megegyezik az A-n átmenő egyenesek (kivéve AB) számának (-1)-szeresével, és a B-n átmenő egyenesek (kivéve AB) számával. Azaz ahhoz, hogy ezek egyenlők legyenek, van még legalább p darab egyenes, amik az A és B pontok közül pontosan az egyiket tartalmazzák.

Ha veszünk egy P pontot H-ból, és azt a két egyenest, amik közül az egyik átmegy A-n és P-n, míg a másik átmegy B-n és P-n, akkor az egyiken van még egy másik pont is, különben ha a P-re írt szám x, akkor $1 + x \equiv -1 + x \pmod p$. Tehát van összesen legalább $2 + p - 1 = p + 1$ pont.

XIX. Dürer Verseny

E+

kategória

Helyi forduló (2025. november 14.) **Megoldókulcs**

E+5. Létezik-e olyan valós számokból álló korlátos $a_1, a_2, \ldots$ végtelen sorozat, amelyre $|a_i - a_j| > \frac{1}{|i-j|}$ teljesül minden $i \neq j$ esetén?

Egy valós számokból álló végtelen sorozatot korlátosnak nevezünk, ha létezik hozzá egy M valós szám, amelyre $|a_i| \leq M$ teljesül minden i esetén.

Varga Boldi feladata

Megoldás: Belátjuk, hogy az $a_n = 3\sqrt{2} \cdot \{n \cdot \sqrt{2}\}$ sorozat ilyen tulajdonságú. Ehhez azt kell igazolni, hogy tetszőleges $i > j$-re $|3\sqrt{2} \cdot \{i \cdot \sqrt{2}\} - 3\sqrt{2} \cdot \{j\sqrt{2}\}| > \frac{1}{i-j}$, amit átosztva elég, hogy

$$|\{i \cdot \sqrt{2}\} - \{j \cdot \sqrt{2}\}| > \frac{1}{3\sqrt{2}(i-j)}$$

A törtrészek különbségének abszolút értéke vagy $\{i\sqrt{2}\} - \{j\sqrt{2}\} = \{(i-j)\sqrt{2}\}$, ha $\{i\sqrt{2}\} > \{j\sqrt{2}\}$, vagy $\{j\sqrt{2}\} - \{i\sqrt{2}\} = 1 - \{(i-j)\sqrt{2}\}$.

A továbbiakban jelölje $||x||$ az x valós szám és a legközelebbi egész eltérését, azaz $||x|| = \min(\{x\}, 1-\{x\})$. Ebből világos, hogy $|\{i \cdot \sqrt{2}\} - \{j \cdot \sqrt{2}\}| \geq ||(i-j)\sqrt{2}||$, így elég megmutatni, hogy $||(i-j)\sqrt{2}|| > \frac{1}{3\sqrt{2}(i-j)}$. Ehhez az egyszerűség kedvéért jelöljük a mindkét oldalon megjelenő $i-j$ változót k-val, és legyen ℓ az $(i-j)\sqrt{2}$-höz legközelebbi egész szám. Ekkor tegyük fel indirekt, hogy $||k\sqrt{2}|| = |k\sqrt{2} - \ell| \leq \frac{1}{3\sqrt{2}k}$. Mindkét oldalt $k\sqrt{2} + \ell$-lel megszorozva $|2k^2 - \ell^2| \leq \frac{k\sqrt{2}+l}{3k\sqrt{2}}$. A bal oldal egy nem nulla egész, tehát legalább 1. Viszont a jobb oldalon $k\sqrt{2} + \ell \leq k\sqrt{2} + k\sqrt{2} + 1 < 3k\sqrt{2}$, hiszen $k \geq 1$. Így a jobb oldal kisebb 1-nél, ami ellentmondás.