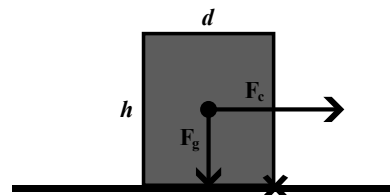


1. feladat

Robi autója akkor fog felborulni, ha a rá ható forgatónyomatékok eredője nem nulla lesz. Ekkor a forgástengely a kocsí külső kereke, ami a modellünkben a téglatest középponttól távolabbi éle, mely érintkezik a talajjal.

Vizsgáljuk a mozgást az autóhoz rögzített (forgó) koordináta-rendszerből. Ebben a rendszerben csak négy erő fog az autóra hatni: a tartó-, a súrlódási-, a nehézségi- és a tehetetlenségi (centrifugális) erő. A felborulás pillanatában csak a forgástengely érintkezik a talajjal, és az első két erő erővonala átmegy ezen a tengelyen, így csak a másik kettő fejt ki forgatónyomatékokot. A nehézségi erő által kifejtett nyomaték



1.1. ábra. Az autóra ható erők és a forgástengely.

$$M_g = F_g \frac{d}{2} = \frac{mgd}{2}, \quad (1.1)$$

ami az autót az 1.1. ábra szerinti pozitív irányba forgatja. Felhasználva, hogy a körforgalom sugara R , és ennél az autó sokkal keskenyebb, a centrifugális erő által kifejtett nyomaték:

$$M_c = F_c \frac{h}{2} = \frac{mv^2 h}{2R}, \quad (1.2)$$

ha az autó v sebességgel halad. Ez az autót az ábra szerinti negatív irányba forgatja, így próbálja felborítani azt, míg az előbbi pedig próbálja ezt megakadályozni. Az autó akkor borul fel, ha

$$M_c > M_g. \quad (1.3)$$

Ebbe behelyettesítve az (1.1)-es és a (1.2)-es egyenleteket:

$$\frac{mv^2 h}{2R} > \frac{mgd}{2} \iff v > \sqrt{\frac{gdR}{h}}. \quad (1.4)$$

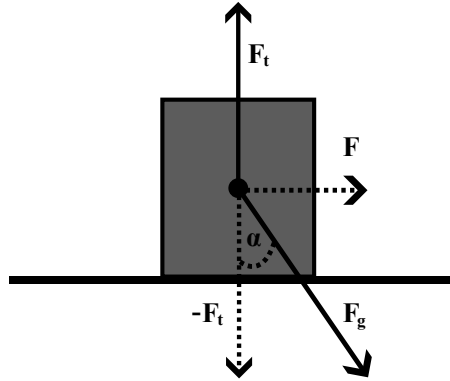
Tehát $v = \sqrt{gdR/h}$ a maximális sebesség, amivel Robi mehet felborulás nélkül.

2. feladat

Vizsgáljuk meg, hogy milyen erők hatnak az asztalon egy m tömegű korsóra. Hat rá az mg nagyságú nehézségi erő, valamint egy tartóerő, amely ennek a függőleges komponensét ellensúlyozza. A két erő eredője tehát meg fog egyezni a gravitációs erő vízszintes komponensével. Ennek nagysága a 2.1. ábra alapján

$$F = mg \sin(\alpha) \approx mg \tan(\alpha) = x \frac{2mg}{h}, \quad (2.1)$$

ahol x a korsó és az asztal közepének távolsága. Látható, hogy az eredő erő nagysága egyenesen arányos ezzel a távolsággal, és mindig az asztal közepe felé mutat. Ha egy rugóra rögzítünk egy



2.1. ábra. A söröskorsóra ható erők.

testet és kitérítjük x távolsággal, akkor is ilyen lesz a visszatérítő erő. Így tehát a korsó egy rugóra rögzített testhez hasonlóan harmonikus rezgőmozgást végez miután Artúr elengedi. Egy D rugóállandójú rugóra rögzített m tömegű test esetén a rezgőmozgás periódusideje:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}. \tag{2.2}$$

Esetünkben a (2.1)-es egyenlet alapján a rugóállandó megfelelője:

$$D = \frac{2mg}{h}. \tag{2.3}$$

Így (2.3)-at (2.2)-be helyettesítve:

$$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{h}{2g}}. \tag{2.4}$$

A teljes periódusidő az „oda- és vissza úthoz” tartozik. A sör az asztal átmérőjének két végpontja között mozog, így útja $T_A/2$ ideig tart.

Most vizsgáljuk meg Lancelot esetét is! Természetesen itt is (2.1) írja le az eredő erő nagyságát, de itt a korsó egyenletes körmozgást fog végezni, hiszen ez az erő mindig az asztal közepe felé mutat. A körmozgás során egy r sugarú pályán mozog a test, így a centripetális erő:

$$F_{cp} = mr\omega^2. \tag{2.5}$$

Ez lesz egyenlő a korsóra ható nehézségi erő vízszintes komponensével:

$$mr\omega^2 = m\frac{2rg}{h}. \tag{2.6}$$

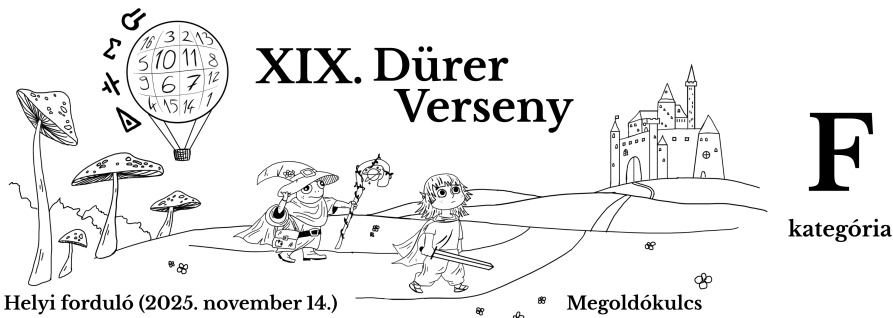
Így a szögsebesség:

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{h}}. \tag{2.7}$$

Innen pedig a periódusidő:

$$T_L = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{2g}}. \tag{2.8}$$

Ebben az esetben is a periódusidő fele lesz a megoldás, hiszen a korsó egy félkört tett meg. Mivel $T_A/2 = T_L/2$, így a két korsó ugyanannyi idő alatt ér célba.



3. feladat

A kerékpárosok azért végeznek munkát, hogy az őket lassító erők ellenében dolgozzanak. Egy kicsiny Δs út megtétele közben, összesen $\sum F$ nagyságú erővel szemben végzett munka:

$$W = \sum F \cdot \Delta s. \quad (3.1)$$

A teljesítmény definíciója:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}, \quad (3.2)$$

amibe (3.1)-et írva

$$P = \sum F \cdot v \quad (3.3)$$

adódik, ahol kihasználtuk, hogy $v = \Delta s / \Delta t$. A kerékpárosokat mozgásuk során három erő lassítja: a közegellenállási erő, a gördülési ellenállás miatti súrlódás és a nehézségi erő lejtővel párhuzamos komponense. Ezek nagysága rendre:

$$\begin{aligned} F_k &= kv^2, \\ F_s &= \mu_s N, \\ F_g &= mg \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Felhasználva, hogy

$$N = mg \cos \alpha, \quad (3.5)$$

kapjuk az eredő lassító erőket:

$$\sum F = kv^2 + mg(\mu_s \cos \alpha + \sin \alpha). \quad (3.6)$$

A (3.3)-as egyenlet alapján:

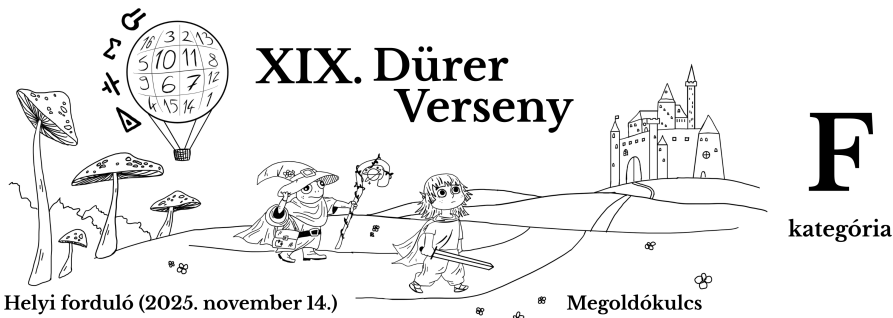
$$P = kv^3 + mg(\mu_s \cos \alpha + \sin \alpha)v. \quad (3.7)$$

A bicikliseknek minden pillanatban ekkora teljesítményt kell leadniuk ahhoz, hogy v sebességgel tudjanak haladni. Mi ezt a v sebességet keressük, tehát rendezzük erre az egyenletet, és osszunk le k -val:

$$v^3 + v \frac{mg}{k} (\mu_s \cos \alpha + \sin \alpha) - \frac{P}{k} = 0. \quad (3.8)$$

Könnyen belátható, hogy a B jelű versenyzőnek a meredekebb részen érdemes támadnia, hiszen ekkor lassabban haladnak ugyanazzal a teljesítmény-leadással, tehát kisebb az őket lassító közegellenállási erő. Így, ha nagyobb teljesítményt ad le, az jobban növeli a sebességét, mint ha a „levegővel szemben dolgozna”. Ezt persze ki is tudjuk számolni, a (3.8)-as egyenletbe a megadott numerikus értékeket behelyettesítve, és az *útmutatás*-t felhasználva:

$$\begin{aligned} v_{3,300} &= 6,69 \text{ m/s}, \\ v_{3,350} &= 7,35 \text{ m/s}, \\ v_{10,300} &= 3,36 \text{ m/s}, \\ v_{10,350} &= 3,87 \text{ m/s}. \end{aligned} \quad (3.9)$$



Itt az alsó indexben az első szám a lejtő meredekségét jelöli százalékban, a második pedig a leadott teljesítményt, amely esetén ezzel a sebességgel haladnak.

Az időkülönbség a sebességek különbségéből adódik. Nézzük meg először, hogy ha t_0 ideig haladnak v_B illetve v_A sebességgel, akkor mekkora lesz köztük az útkülönbség:

$$\Delta s = t_0(v_B - v_A). \quad (3.10)$$

Az időkülönbséget úgy kapjuk, hogy megnézzük, hogy az A jelű versenyző mennyivel később ér célba, mint a B jelű. Tehát ki kell számolni, hogy mennyi idő alatt teszi meg az imént felírt útkülönbséget:

$$\Delta t = t_0 \left(\frac{v_B}{v_A} - 1 \right). \quad (3.11)$$

Felhasználva a (3.9)-ből a sebességeket és a feladatban megadott $t_0 = 60$ s értéket, megkapjuk az időkülönbséget a két esetben:

(a) Amikor a meredekebb, 10 %-os részen támad a B jelű versenyző:

$$\boxed{\Delta t_a = 9,14 \text{ s}}. \quad (3.12)$$

(b) Amikor a kevésbé meredek, 3 %-os részen támad a B jelű versenyző:

$$\boxed{\Delta t_b = 5,91 \text{ s}}. \quad (3.13)$$

4. feladat

(a)

Ahogy kirázzuk a CO_2 -t a palackból, folyamatosan nő a gáztérben található részecskék száma, tehát a nyomás is, egészen addig, amíg ki nem repül a palackból a dugó. Vizsgáljuk azt az állapotot, amikor a dugó már majdnem elhagyta a palack száját. A kirepülés feltétele:

$$p_a A \geq mg + S + p_k A, \quad (4.1)$$

ahol p_a a gáz nyomása a kritikus helyzetben. Ezt kifejezve:

$$p_a = \frac{mg + S}{A} + p_k \approx 3p_k. \quad (4.2)$$

A kezdeti és a kritikus állapotokra felírhatjuk az egyetemes gáztörvényt:

$$p_0 V_0 = n_0 RT, \quad (4.3)$$

$$p_a V_a = n_a RT, \quad (4.4)$$

ahol n_0 a kezdetben, n_a pedig a kritikus pillanatban a gáztérben található gázmolekulák (először levegő, utána levegő és CO_2) anyagmennyisége. A (4.4)-es egyenletből p_a -t kifejezve:

$$p_a = \frac{n_a RT}{V_a}. \quad (4.5)$$

Ezt behelyettesítve (4.2)-be:

$$\frac{n_a RT}{V_a} = \frac{mg + S}{A} + p_k. \quad (4.6)$$

Innen n_a -t kifejezve:

$$n_a = \frac{V_a}{RT} \left(\frac{mg + S}{A} + p_k \right) = 0,122 \text{ mol}. \quad (4.7)$$

A pezsgőből kiszabadult CO_2 anyagmennyisége:

$$\Delta n = \frac{\Delta m}{M_{\text{CO}_2}}, \quad (4.8)$$

ahol Δm a kiszabadult CO_2 tömege. Ez alapján a kritikus pillanatban a gázmolekulák anyagmennyisége:

$$n_a = n_0 + \frac{\Delta m}{M_{\text{CO}_2}}. \quad (4.9)$$

A (4.3)-as egyenletből n_0 értékét beírva:

$$n_a = \frac{p_0 V_0}{RT} + \frac{\Delta m}{M_{\text{CO}_2}}. \quad (4.10)$$

Ezt visszaírva (4.7)-be:

$$\frac{p_0 V_0}{RT} + \frac{\Delta m}{M_{\text{CO}_2}} = \frac{V_a}{RT} \left(\frac{mg + S}{A} + p_k \right). \quad (4.11)$$

A dugó kiszabadulása miatti térfogatváltozás alapján V_a :

$$V_a = V_0 + Ad. \quad (4.12)$$

Ezt behelyettesítve (4.11)-be, átrendezéssel megkapható Δm :

$$\Delta m = \frac{M_{\text{CO}_2}}{RT} \left(\frac{V_0 + Ad}{A} (mg + S) + p_k (V_0 + Ad) - p_0 V_0 \right). \quad (4.13)$$

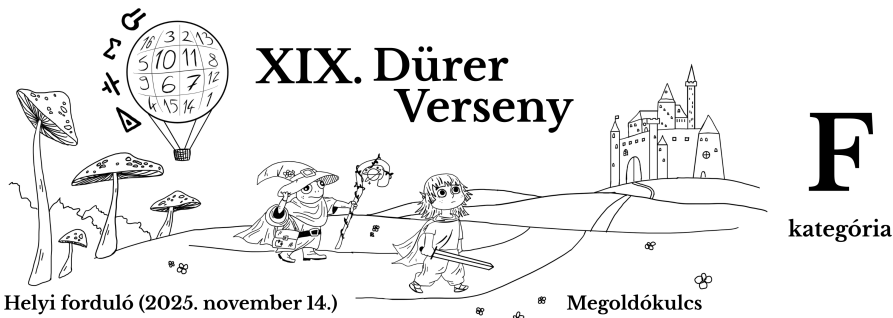
Ezt felírhatjuk ηm_0 alakban is, ahol η a keresett arány. Innen η -t kifejezve:

$$\boxed{\eta = \frac{M_{\text{CO}_2}}{m_0 RT} \left(\frac{V_0 + Ad}{A} (mg + S) + p_k (V_0 + Ad) - p_0 V_0 \right) = 0,107}. \quad (4.14)$$

(b)

Jelöljük a CO_2 kiszabadulása utáni, de még a dugó megmozdulása előtti állapotban az üvegben mérhető nyomást és anyagmennyiséget rendre p_b -vel illetve n_b -vel. Mivel η most adott (1/4), így a (4.10)-es egyenletnek megfelelően n_b kifejezhető:

$$n_b = \frac{p_0 V_0}{RT} + \frac{\eta m_0}{M_{\text{CO}_2}}. \quad (4.15)$$



A (4.5)-ös egyenletbe ezt behelyettesítve, valamint felhasználva, hogy befogjuk a dugót (tehát $V_0 = V_b$):

$$p_b = p_0 + \eta m_0 \frac{RT}{V_0 M_{\text{CO}_2}} = 3,76 \cdot 10^5 \text{ Pa.} \quad (4.16)$$

A dugó kirepülésére a munkatételt felírva:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgd + Sd = p_b \Delta V. \quad (4.17)$$

Tehát a dugó kinetikus és potenciális energiájának megváltozása, valamint a súrlódás által végzett munka összege egyenlő lesz a gáz által a tágulása során végzett munkával.¹ Ha behelyettesítjük (4.17)-be (4.16)-ot, akkor v_0 kifejezhető:

$$v_0 = \sqrt{2 \left(\frac{p_0 A d}{m} + \frac{2\eta m_0 R T A d}{m M_{\text{CO}_2} V_0} - dg - \frac{S}{m} d \right)} = 55,2 \text{ m/s} . \quad (4.18)$$

5. feladat

(a)

Rögzített atommag esetén a mozgás igen egyszerűen leírható. Az alfa-részecske kezdetben közeledik a mag felé, a Coulomb-taszítás miatt lassuló ütemben. Egy ponton a sebessége zérussá válik – ekkor lesz a két test távolsága minimális –, majd gyorsulva távolodni kezd, és távozik a végtelenbe.

A minimális $d_{\min}$ távolság az energiamegmaradás törvénye alapján határozható meg. Kezdetben az alfa-részecskének lényegében csak mozgási energiája van, a kérdéses időpillanat elérésekor ez teljes mértékben elektrosztatikus kölcsönhatási energiává alakul:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{kQq}{d_{\min}}. \quad (5.1)$$

Az egyenletet rendezve a minimális távolság kifejezhető:

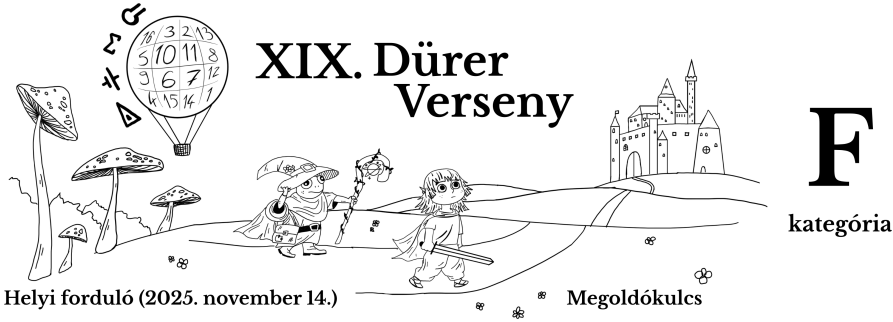
$$d_{\min} = \frac{2kQq}{mv^2}. \quad (5.2)$$

(b)

Rögzítetlen atommag esetén a mozgás valamivel bonyolultabb. A Coulomb-taszítás hatására az atommag is kimozdul kezdeti pozíciójából, ám eközben a rendszer tömegközéppontja végig egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Egy adott pillanatban, mikor a testek távolsága éppen d , a köztük ható Coulomb-erő kifejezhető, mint:

$$F = \frac{kQq}{d^2}. \quad (5.3)$$

¹Itt felhasználtuk, hogy p_a végig állandó a tágulás során.



Érdeemes áttérni a tömegközépponthoz rögzített vontakoztatási rendszerbe, ahol az alfa-részecske kezdeti sebességének nagysága $v' = v - mv/(m + M) = Mv/(m + M)$. Ebben a rendszerben az F erő értelmezhető úgy is, mintha egy a tömegközéppontban álló Q' töltésű test fejtene ki vonzó hatást az alfa-részecskére. A részecske tömegközépponttól való távolsága $d' = Md/(m + M)$, így a rá ható ekvivalens erő nagysága:

$$F = \frac{kQ'q}{d'^2} = \frac{(m + M)^2}{M^2} \frac{kQ'q}{d^2}. \quad (5.4)$$

Az (5.3) és (5.4) egyenletek összevetéséből a Q' töltés kifejezhető:

$$Q' = \frac{M^2}{(m + M)^2} Q. \quad (5.5)$$

Ezzel az egyszerűsített képpel problémánkat visszavezettük az (a) feladatrészen tárgyalt esetre, csupán a $Q \rightarrow Q'$, $v \rightarrow v'$ és $d_{\min} \rightarrow d'_{\min}$ cseréket kell elvégeznünk. Korábbi összefüggéseinket felhasználva:

$$d'_{\min} = \frac{M}{m + M} d_{\min} = \frac{2kQ'q}{mv'^2} = \frac{2kQq}{mv^2}. \quad (5.6)$$

Bevezetve az $m^* = mM/(m + M)$ redukált tömeget, a minimális távolság korábbi (5.4) képletünkhöz igen hasonló alakot ölt:

$$d_{\min} = \frac{2kQq}{m^*v^2}. \quad (5.7)$$

Jól látható, hogy ez általában nagyobb, mint az (a) feladatrészen, ám közelítőleg visszkapjuk ugyanazt az eredményt, amennyiben $M \gg m$. A Rutherford-kísérletben használt aranyatommagok az alfa-részecskéknél csaknem ötvenszer nehezebbek, ráadásul egy kristályrács részeként ennél is nagyobb tehetetlenséggel rendelkeznek. Emiatt jó közelítéssel érvényesnek tekinthető a rögzített atommag egyszerűsítő feltevése.